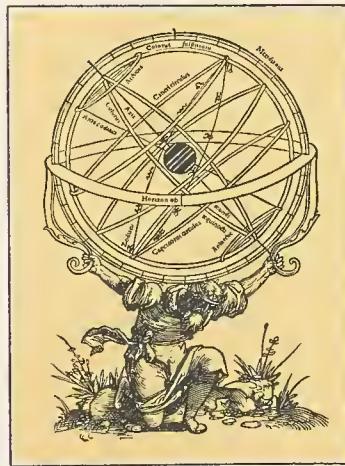
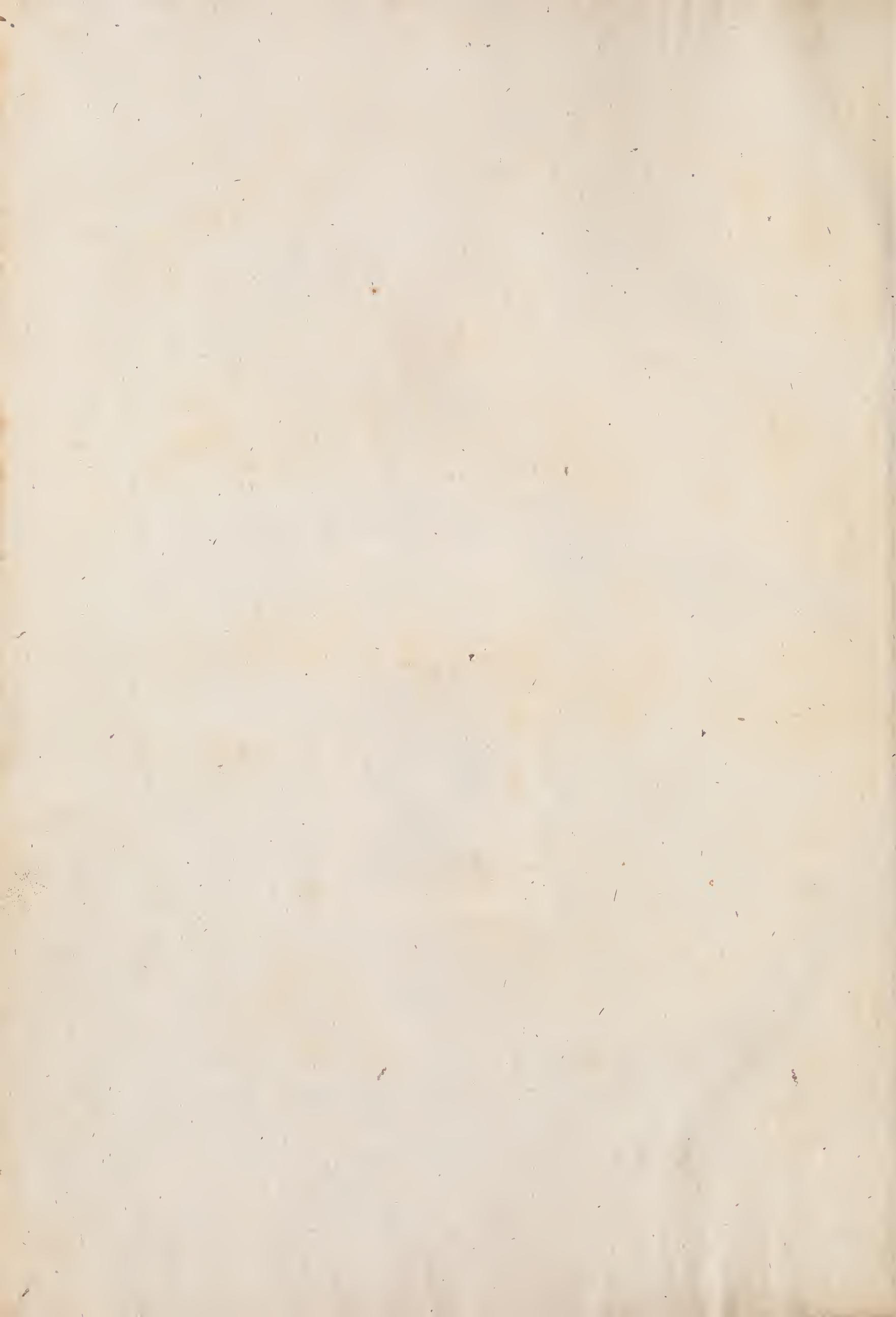


GIFT OF
BERN DIBNER

*The Dibner Library
of the History of
Science and Technology*

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES





A P O L L O N I I
P E R G A E I C O N I C O R V M
L I B R I Q V A T T V O R.

V N A C V M P A P P I A L E X A N D R I N I
L E M M A T I B V S, E T C O M M E N T A R I I S
E V T O C I I A S C A L O N I T A E.

S E R E N I A N T I N S E N S I S
P H I L O S O P H I L I B R I D V O
N V N C P R I M V M I N L V C E M E D I T I.

Q V A E O M N I A N V P E R F E D E R I C V S
Commandinus Vrbinas mendis quamplurimis expur-
gata è Græco conuertit, & commen-
tariis illustravit.



G V M P R I V I L E G I O P I I I I I . P O N T . M A X .
I N A N N O S X .

B O N O N I A E ,

E X O F F I C I N A A L E X A N D R I B E N A T I I L .

M D L X V I .

Monast. S. Eugenii Senarum
in R̄mi P.D. Honorii à Senis.

ЖАДИКОНДЫЛЫ ОРДЕНІНДЕМІСІЗ
АК СОМАКИ

ЗА ГИБИО С
ДЛЯКАЯ ТАКИХДА АДВИСО НА
ГУХДА М

9 QA
31
Ab4c
L1566
NB
NMAH V R B I N A T V M D V C I I I I .

G V I D O V B A L D O I I .

A L M A E Q V E V R B I S P R A E F E C T O .



X omnibus philosophiæ partibus, ut nulla certior, atque ad ueritatis rationem accommodatior est, quām quæ à græcis mathematice dicitur, sic nulla obscurior, atque ad cognoscendum difficilior esse hoc tempore potest. Huius autem facti culpam, cū ipsa rei natura, & subtilitas, tum maxime occupata nostrorum hominum in aliis artibus explicandis industria, ac nimia in plerisque, ut uere dicam, rerum ab usu uitæ communis remotarum negligentia sustinet. Quòd si qua alia pars est, quæ nostris incognita philosophis, interpretationis lumen aliquod postulet, ea profecto est, quæ de conicis appellatur. quanquam enim à ueteribus diligenter tractata sit, tamen eorum monumenta aut ad nos non peruerunt, aut ita peruerunt, ut uix proper multas uetus statis iniurias, maximasq; difficultates intelligantur. Ac primus quidem, ut colligi potest, hanc conicorum disputationem quattuor libris editis tractauit Euclides. quos deinde cum Apollonius Pergæus uir eximio ingenio, atque exquisita doctrina præditus usque ad octo perduxisset, incredibile est, quantam huic scientiæ accessionem, dignitatemq; adiunxerit. quo rum quattuor primi græce scripti adhuc leguntur, reliqui temporum superiorum calamitate desiderantur. Verum cum in his demonstraciones ille breues ferè, atque obscuras attulisset, ac multa lemmata incognita pro notis adhibuisset, factum est, ut tantæ tollendæ difficultatis causa multi se ad eorum expositionem contulerint. inter quos Pappus Alexandrinus, & Eutocius Ascalonita reliquis facile eruditionis laude, & ingenii præstiterunt. neque uero dubitandum est, quin illi huic studio plurimum opis afferre hoc tempore possent, si eorum scripta aut multis patarent, aut satis emendata in manibus hominum uersarentur. atque hæc quidem me caussa potissimum impulit, ut huius disciplinæ subleuandæ gratia, eos de græco conuerterem, ac commentariis quoque meis explicarem. nam cum in Archimedis & Ptolemæi libris aliquot interpretandis, qui sine conicorum doctrina nulla ratione percipi possunt, demonstrationes Apollonii multas adhibuerim, quæ sine græco libro, quòd latinus corruptissimus sit, parum intelligentur; feci non inuitus, idq; mul-

torum amicorum, quibus honeste denegare non poteram, uoluntate, primum ut Apollonium ipsum quam planissime possem, conuerterem, atque in hac parte, quæ plurimum egere auxiliū uidebatur, ægræ propè ac laboranti mathematicæ disciplinæ succurrerem : deinde uero ut Pappi lemmata, atque Eutocii in Apollonium commentarios latinos facrem, in quibus, quod plurimis affecti uitiis erant, plus etiam laboris, atque operæ, quam in ipso Apollonio posui; quippe qui multis in locis demonstrationes integras, quarum uix uestigia apparebant, instaurare necesse habui. post autem cum uehementius iam rei inchoatæ amore, atque communis utilitatis studio, ut semper alijs inflammatus essem, eosdem etiam, ut omnia faciliora cognitu essent, propriis declarare commetariis uolui. quo factum est, ut doctrinæ infinitis quondam uetus statis, atque inscitiæ tenebris inuolutæ non minimum lucis atque splendoris, ut res ipsa cognoscere cupientibus indicabit, attulerim. Hæc igitur qualiaunque sint, omnia uno colligata uolumine in tuo nomine ad communem omnium utilitatem hoc tempore edo, atque diuulgo, G V I D E V B A L D E Dux præstantissime: quod cū facio, non solum officio meo seruio, ut in cuius ditione, atque imperio natus sum, eum omni cultu, atque obseruantia prosequar: sed in eō etiam exemplum doctissimorū hominum sequor, ut à quo plurimum ornamenti, atque subsidii litteræ acceperunt, eum potissimum omnibus litterarum monumentis exornent. Tu autem is es, cuius familiæ magnam partem ornamentorum quæ retinent, ipsa doctrinæ studia debeant. Nam F E D E R I C V S pro-
uus tuus, qui primus Ducalem honorem uestram in familiam intulit, cum plurimis rei militaris laudibus floruit, tum maximam inde sibi gloriam comparauit, quod vnicē litteras, litteratosq; semper dilexit. quod cum libri multi in eius nomine à doctis hominibus editi, tum bibliotheca, hebræorum, græcoruin, & latinorum libroru copia mirabiliter instruta testantur - cuius uestigia G V I D V S V B A L D V S filius imitatus, & ipse præter hæreditariam rei bellicæ laudem cum omnibus litteris fuit eruditus, tum eruditorum hominum ingenio mirifice semper est deleatus. quos eosdem F R A N C I S C V S M A R I A nepos eius, idemq; pa-
ter tuus, quaquam studio rei militaris, cuius gloria præter ceteros flo-
ruit, intentus, summo studio semper complexus est, ac mirifice coluit. Eorum omnium laudibus tu ita successisti, ut ad proprium decus, haud multum tibi sit ex paterna, domesticaq; gloria hauriendum. nam cum rem militarem ita tenes, ut in ea excellas; tum latinis, græcisq; litteris perinde doctus es, atque si totam in hoc studio ætatem consumperis. Ita-

que non solum insignibus rei bellicæ decoratus amplissimis es, cum Venetarum copiarum, & Pontificiarum Dux fueris, atque PHILIPPI Hispaniarum Regis hodie in Italia Generalis, atque almae urbis præfetus sis, sed etiam in hoc litterarum studio eas tibi laudes peperisti, quas nulla unquam posteritatis obliuio obscurabit. nam & bibliothecam autem optimis libris adauxisti, & litteris deditos homines complecti omni studio, ac fouere non cessas. Inter quos quoniam me quoque esse tua humanitas uoluit, ingratus propè, atque impius sim, nisi te, ut intimis animi mei sensibus colo, sic omnibus ingenii mei monumentis, quoad possum, honorem! . Vale.

Federicus Commandinus.

DE APOLLONIO EX PAPPO.



VCLIDIS libros quattuor conicorum cum Apollonius expleuisset, ac quattuor alios adiunxit; octo conicorum libros confecit. Aristaeus autem qui scribit ea, quæ ad hoc usque tempus tradita sunt, solidorum locorum libros quinque conicis cohærentes uocauit. & qui ante Apollonium fuerunt, trium conicarum linearum, unam quidem coni acutianguli, alteram rectanguli, tertiam uero obtusianguli coni sectionem appellarūt. Quoniam autem in unoquoque horum trium conorum differenter sectorum tres lineæ fiunt, dubitans, ut apparet, Apollonius cur nam qui ante se hanc tractationem expleurerant, unam quidem acutianguli coni sectionem uocauerunt, quæ potest & rectanguli, & obtusianguli coni esse; alteram rectanguli, quæ potest & in acutiangulo, & obtusiangulo cono reperiri; tertiam uero obtusianguli, quæ & in acutiangulo, & rectangulo cono inesse potest; mutatis nominibus, quæ quidem acutianguli coni sectio nominatur, ellipsim appellat; quæ rectanguli, parabolen, quæ uero obtusianguli, hyperbolēn; unicuique ab aliquo proprio accidente nomen imponens. spatium enim quoddam ad lineam quampiam comparatum in acutianguli coni sectione deficiens fit quadrato; in obtusianguli coni sectione quadrato excedens; in rectanguli uero coni sectione neque deficiens, neque excedens. Hoc autem illi accidit, quod non considerauit iuxta unum duntaxat casum plani conum secantis, & tres lineas gignentis, in unoquoque conorum aliam atque aliam fieri lineam, quam à coni proprietate nominarunt. Si enim secans planum ducatur uni lateri coni æquidistant, una tātum ex tribus lineis efficitur semper eadem, quam Aristaeus illius coni sectionem appellauit.

EX EUTOCIO, ET GEMINO.

APOLLONIUS geometra natus est Pergæ, quæ Pamphiliæ ciuitas est, tempore Ptolemæi Euergetæ, ut tradit Heracilius in Archimedis uita. qui etiam scribit Archimedem quidem primum conica theorematæ fuisse aggressum; Apollonium uero cum ea inuenisset ab Archimedē nondum edita, sicut propria sua edidisse. neque id uere, ut mea fert opinio. nam & Archimedes multis in locis uelut antiquioris conicorum institutionis mentionem facere uidetur:

& Apollonius ea scribit, non ut à se ipso inuenta. non enim dixisset, uberioris & uniuersalius hæc à se, quām ab aliis tractata fuisse . Sed quod scribit Geminus uerum est. Antiqui, inquit, conum diffinientes, rectanguli trianguli circumuolutionem manente uno corum, quæ circa rectum angulum sunt, latere ; & conos omnes rectos, & unam in singulis sectionē fieri arbitrati sunt : in rectangulo quidem cono vocatam parabolen ; in obtusiangulo hyperbolēn ; in acutiangulo autem ellipſim. atque ita non minatas apud ipsos sectiones passim inuenias . Quemadmodum igitur antiquis illis in unaquaque triangulorum specie contemplantibus duos rectos, primum in æquilatero, deinde in æquicruri, postea in scaleno, aetate posteriores uniuersale theorema demonstrarunt ciuiſmodi, Omnis trianguli interiores tres anguli duobus rectis sunt æquales: ita & in coni sectionibus; rectanguli quidem coni sectionem dictam, in rectāgulo tantum cono contemplati sunt ; sec̄to scilicet plano ad unum coni latus recto : obtusianguli autem coni sectionem in cono obtusiangulo factam demonstrarunt, & acutianguli sectionem in cono acutiangulo; similiter in omnibus conis ducentes plana ad unum eorum latus recta : quod & antiqua sectionum nomina indicant . Verum postea Apollonius Pergeus uniuersitate inspexit in omni cono tam recto, quām scaleno omnes sectiones inesse, iuxta plani ad conum differentem inclinationem . quam obrem illius temporis homines admirati mirificam conicorum theorematum demonstrationem magnum geometram ipsum appellarunt . Hæc quidem Geminus in sexto mathematicarum præceptionum libro scripta reliquit .

10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

P APP I ALEXANDRINI

LEM MATA IN PRIMVM LIBRVM
CONICORVM APOLLONII.

C VM COM MENTARIIS FEDERICI
COM MANDINI VRBINATIS.

LEMMA PRIMVM.

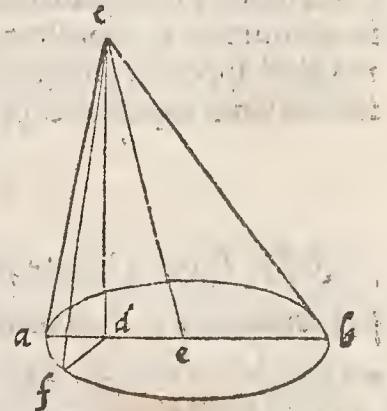


IT conus, cuius basis circulus ab, & uertex punctum e. Si igitur æquicurvis est conus; manifesto constat, lineas omnes, quæ ab ipso e ad ab circuli circumferentiam ducuntur, inter se se æquales esse. Si uero scalenus est; oporteat inuenire, quæ maxima sit, & quæ minima.

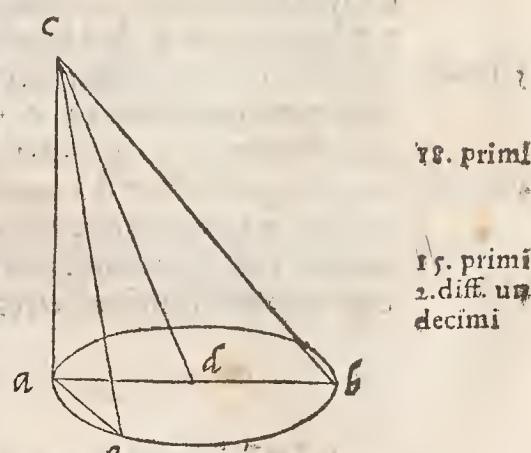
DVCATVR à punto c ad planum circuli ab linea perpendicularis. quæ primum cadat intra circulum; sitq; cd: & sumatur centrum eius, quod sit e: & iuncta d e producatur in utramque partem ad puncta a b: deinde a c, cb iungatur. Dico ipsam bc maximam esse, & ac minimam, linearum omnium, quæ à punto c ad circulum ab pertinent. Ducatur enim alia quædam linea cf, & fd iungatur. maior igitur est bd, quam df: communis autem cd: & anguli, qui ad d recti. ergo maior est bc, quam cf. eodem modo & cf maior ostendetur, quam ca. ex quibus apparet lineam cb omnium maximam, ac uero minimam esse.

Rursus à punto c perpendicularis ducta cadat in ipsum ab circuli circumferentiam; quæ sit ca: & cum circuli centro d copulata ad producatur in b: & bc iungatur. Dico bc maximam esse, & ac minimam. lineam igitur cb maiorem esse, quam ca perspicuum est. ducatur autem alia quædam linea ce; & iungatur ae. Itaque quoniam ab diameter est, necessario maior erit, quam ae; & continet ac cum ipsis ab, ae angulum rectum. ergo bc, quam ce maior erit; & similiter maior, quam ceteræ omnes. Eodem modo & ec maiori ostendetur, quam ca. Quare sequitur, ut bc maxima sit, ac uero minima linearum omnium, quæ ab ipso c ad circulum ab pertincent.

Iisdem positis cadat perpendicularis cd extra circulum: & ad e circuli centrum ducta de producatur: iunganturq; ac, bc. Dico bc maximam, & ac minimam esse omnium, quæ à punto c ad ab circulum perducuntur. constat namq; bc maiorem esse ipsa ca. sed & maior erit omnibus, quæ ab ipso c in circumferentiam circuli ab cadunt. ducatur enim alia quædam linea cf: & df iungatur. Cum igitur bd per centrum transeat, maior est, quam df. est autem cd perpendicularis ad lineas db, df, quoniam & ad ipsum planum. ergo maior erit bc, quam cf. & similiter maior, quam aliæ omnes. perspicuum est igitur ipsam cb maximam esse. At uero ac minimam hoc modo ostendemus. Quoniam enim minor est ad cd, quam df; atque est ad ipsas perpendicularis dc, minor erit ac, quam cf. & ita minor, quam aliæ:



7. tertii.
2. diff. 11.
47. primi



78. primi
15. primi
2. diff. un
decimi

8. tertii
2. diff. un
decimi

A

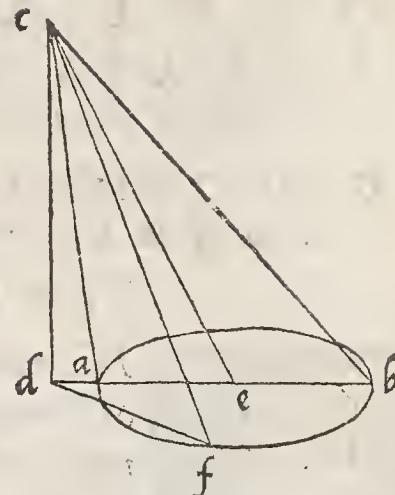
P A P P I L E M M A T A

linea igitur $a c$ minima est; & $b c$ maxima omnia, quæ à punto c ad $a b$ circuli circumferentiam perducuntur.

Difini-
tio pri-
ma Apol-
lonii.

Si ab aliquo punto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plane, in quo punctum, coniuncta recta linea in utrāq; partem producatur: &c.

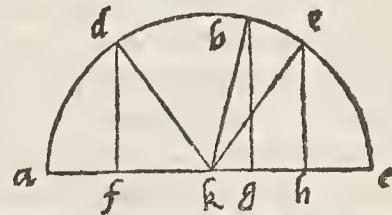
Conuenienter Apollonius addidit, in utrāque partem producatur: cum uniuscuiusque coni generationem ita dat. Si enim æquicurvis sit conus frustra produceretur, quod recta linea, quæ conuertitur circumferentiam circuli perpetuo contingit; quippe cum ab ea punctū manens semper æquali distet interuallo. Sed quoniam potest & scalenus esse conus, in quo, ut iam demonstratum est, & maximum, & minimum latus inuenitur, necessario illud apposuit; ut quæ minima est linea, usque adeo augeri intelligatur, quoad fiat maximæ æqualis: & propterea circumferentiam semper contingat.



L E M M A I I .

S I T linea $a b c$, & positione data $a c$; omnes autem, quæ ab ipsa $a b c$ ad $a c$ perpendicularares ducuntur, ita se habeant, ut quadratum uniuscuiusque ipsarum æquale sit rectangulo basis partibus, quæ ab ipsa secantur, contento. Dico $a b c$ circuli circumferentiam esse; diametrum autem ipsius lineam $a c$.

D U C A N T V R enim à punctis $d b e$ perpendicularares $d f, b g, e h$. ergo quadratum $d f$ æquale est rectangulo $a f c$: & quadratum $b g$ rectangulo $a g c$: ipsum uero $e h$ quadratum rectangulo $a h c$ æquale. scetur
y. secundi. $a c$ bifariam in k ; & $d k, k b, k e$ iungantur. Itaq;
47. primi. quoniam $a f c$ rectagulum unà cum quadrato $f k$ est æquale quadrato $a k$: & ipsi $a f c$ æquale est $d f$ quadratum: erit quadratum $d f$ unà cù ipso $f k$, hoc est quadratum $d k$ æquale quadrato $a k$. quare linea $a k$ ipsi $k d$ est æqualis. Similiter ostendemus, & unamquamque linearum $b k, e k, ipsi a k$, uel $k c$ æqualem esse. ergo $a b c$ circuli circumferentia est circa centrum k , hoc est circa diametrum $a c$.

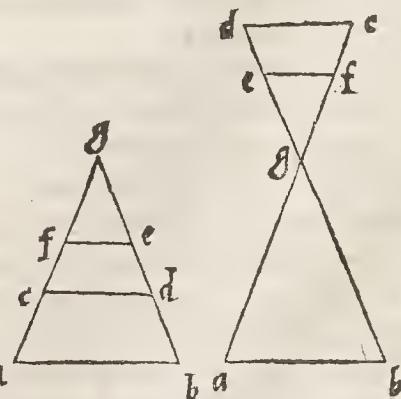


L E M M A I I I .

S I N T tres lineæ æquidistantes $a b, c d, e f$: & in ipsas ducantur duæ rectæ lineæ $a g f c, b g e d$. Dico ut rectangulum quod fit ex $a b$, & $e f$ ad quadratum $c d$, ita esse rectangulum $a g f$ ad quadratum $g c$.

lemm. in
22. deci-
mi.
4. sexti

Q V O N I A M enim ut linea $a b$ ad $f e$; hoc est ut rectangulum ex $a b$, & $f e$ ad $f e$ quadratum, ita linea $a g$ ad ipsam $g f$; hoc est rectangulum $a g f$ ad quadratum $g c$: erit ut rectangulum ex $a b$ & $f e$,



ad quadratum f e, ita rectangulum a g f ad quadratum g f. sed ut quadratum f e ad quadratum c d, sic quadratum f g ad quadratum g c. ex æquali igitur ut rectangulum ex a b & f e ad quadratum c d, sic rectangulum a g f ad g c quadratum. 4. & 22. ⁴_{xti}

LEMMA IIII.

SIT ut a b ad b c, ita a d ad d c: & secetur a c bifariam in puncto e. Dico rectangulum b e d quadrato e c æquale esse: itemq; rectangulum a d c æquale rectangulo b d e, & rectangulum a b c rectangulo e b d.

QVONIAM enim ut a b ad b c, ita est a d ad d c; erit componendo, sumptisq; A antecedentium dimidiis, & per conuersionem ratio nis, ut b e ad e c, ita c e ad e d. rectangulum igitur b e d æquale est c e quadrato. commune auferatur, quadratum scilicet e d. ergo quod relinquitur, rectangulum a d c rectangulo b d e est æquale. Rursus quoniam rectangulum b e d æquale est quadrato c e, utraque auferantur à quadrato b e. reliquum igitur rectangulum a b c rectangulo e b d æquale erit. quæ omnia demonstrare oportebat.

COMMENTARIVS.

ERIT componendo, sumptisq; antecedentium dimidiis. & per conuersionem A rationis.] Quoniam ut a b ad b c, ita a d ad d c; erit componendo ut a b, b c ad c b, ita a c ad c d; & antecedentium dimidia, ut e b ad b c, ita e c ad c d. est enim a e ipsius a c dimidia. quare per conuersionem rationis ut b e ad e c, ita c e ad e d.

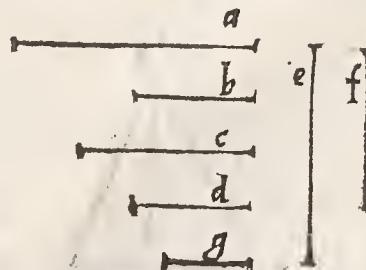
Commune auferatur, quadratum scilicet e d.] Est enim quadratum c e æquale rectangulo a d c una cum quadrato e d: & rectangulum b e d æquale rectangulo b d e una cum e d quadrato. quare sublatu communi; relinquitur rectangulum a d c rectangulo b d e æquale. B s. secundi 3

Rursus quoniam rectangulum b e d æquale est quadrato e c, utraque auferantur à quadrato b e.] Nam cum linea a c bifariam secetur in e, atque ipsi addatur linea c b; rectangulum a b c, & quadratum c e æqualia sunt quadrato b e. rursus quadrato b e æqualia sunt utraque rectangula e b d, b e d. si igitur ab ipso b e quadrato æqualia auferantur, uidelicet rectangulum b e d, & quadratum c e; relinquitur rectangulum a b c rectangulo e b d æquale esse. C 6. secundi 2

LEMMA V.

HABEAT a ad b proportionem compositā ex proportione c ad d, & ex proportione e ad f. Dico c ad d proportionem compositam habere ex proportione a ad b, & proportione f ad e.

Fiat enim proportio d ad g eadem, quæ est e ad f. & quoniam proportio a ad b composita est ex proportione c ad d, & proportione e ad f, hoc est d ad g: proportio autem composita ex proportione c ad d, & d ad g est eadem, quæ c ad g: erit ut a ad b, ita c ad g. Rursus quoniam c ad d proportionem habet compositam ex proportione c ad g, & proportione g ad d: sed proportio c ad g demonstrata est eadem, quæ a ad b: & conuertendo proportio g ad d eadem est, quæ f ad e: habebit c ad d proportionem compositam ex proportione a ad b, & proportione f ad e.



PAPPI LEMMATA

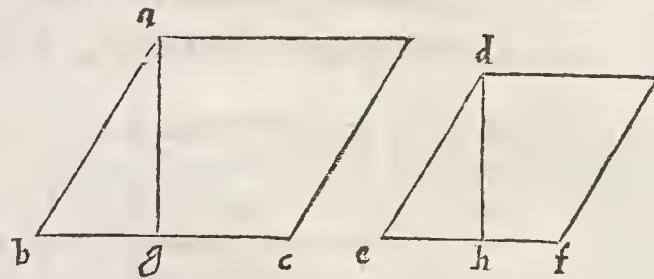
LEMMA VI.

SINT duo parallelogramma ac, df æquiangula, quorum angulus b sit æqualis angulo e. Dico ut rectangulum abc ad rectangulum def; ita esse parallelogrammum ac ad df parallelogrammum.

Si enim anguli be recti sint, illud perspicue constat: si minus, demittantur perpendiculares ag, dh. & quoniam angulus b æqualis est angulo e; & angulus ad g rectus æqualis recto ad h: erit triangulum abg triangulo deh æquiangulum. quare

4. sexti 1. ut ba ad ag, ita ed ad dh. sed ut ba ad ag, ita rectangulum abc ad rectangulum quod ag, bc continetur: & ut ed ad dh, ita def rectangulum ad rectangulum contentum dh, ef. quare permutando ut rectangulum abc ad rectangulum def, ita rectangulum, quod continetur ag, bc; hoc est parallelogrammum ac ad rectangulum contentum dh, ef; hoc est ad parallelogrammum df.

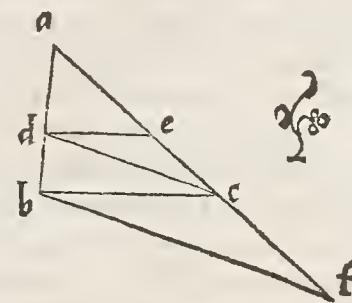
36. primi.



LEMMA VII.

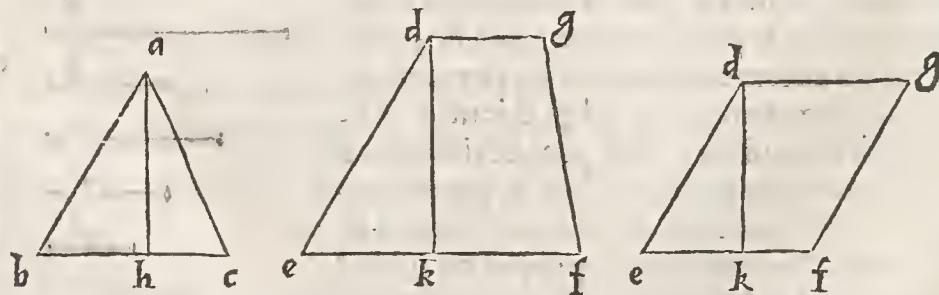
SIT triangulum abc: sitq; bc æquidistantes de, & quadratum, quod fit ex ca æquale sit rectangulo fae. Dico iam si iungantur dc, bf, linneam bf, ipsi dc æquidistantem esse.

14. sexti 4. HOC uero manifeste patet. quoniam enim ut fa, ad ac, ita est ca ad ae; & ut ca ad ae, ita ba ad ad: erit ut fa ad ac, ita ba ad ad. ergo dc, bf inter se se æquidistantes sunt.



LEMMA VIII.

SIT triangulum abc: trapezium uero defg, ita ut abc angulus angulo def sit æqualis. Dico ut rectangulum abc ad rectangulum, quod continetur utraque ipsarum dg, ef & de, sic esse triangulum abc ad trapezium defg.



4. sexti

DVCANTVR enim perpendicularares ah, dk. & quoniam angulus abc æqualis est angulo def; & qui est ad h rectus æqualis recto ad k; erit ut ba ad ah, ita ed ad dk. sed ut ba ad ah, ita rectangulum abc ad id, quod continetur ah, bc: & ut ed ad

ad

ad d k, ita rectangulum, quod continetur utraque d g, e f, & d e ad contentum utraque d g, e f, & d k. est autem triangulum a b c dimidium rectanguli contenti a h, b c: A & trapezium d e f g dimidium eius, quod utraque d g, e f, & d k continetur. ergo ut rectangulum a b c ad rectangulum contentum utraque d g, e f, & d e, ita est triangulum a b c ad d e f g trapezium. Quod si a b c triangulum sit, & d f parallelogrammū; eadem ratione fiet, ut a b c triangulum ad d f parallelogrammū, ita rectangulum a b c ad duplum rectanguli d e f.

B

Ex quibus constat, rectangulum a b c, siquidem d f parallelogrammū sit, C & equale esse duplo rectanguli d e f: si uero sit trapezium, & equale ei, quod utraque d g, e f & ipsa d e continetur.

C O M M E N T A R I V S .

E S T autem triangulum a b c dimidium rectanguli contenti a h, b c, & trapeziū A d e f g dimidium eius, quod utraque d g, e f, & d k continetur.] Iuncta enim d f erit triā gulūm e d f dimidium rectanguli contenti e f & d k: & triangulum d f g itidem dimidium eius, quod continetur d g & d k. ergo totum trapezium d e f g dimidium est rectanguli, quod utraque e f, d g, & ipsa d k continetur.

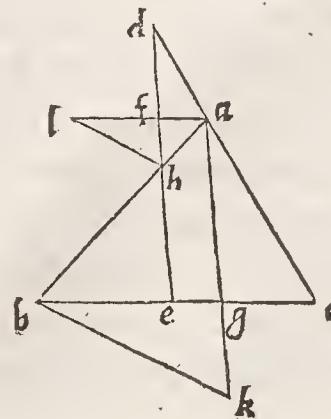
Ergo ut rectangulum a b c ad rectangulum contentum utraque d g, e f, & d e, ita B est triangulum a b c ad d e f g trapezium.] Ex antedictis enim colligitur ut rectangulum a b c ad rectangulum ex a b, & b c, ita esse rectangulum ex d g, e f, & d e ad rectangulum ex d g, e f, & d k. quare permutando ut rectangulum a b c ad rectangulum ex d g, e f, & d e, ita rectangulum ex a b & b c ad rectangulum ex d g, e f, & d k; & ita eorum dimidia, hoc est triangulum a b c ad trapezium d e f g.

Ex quibus constat rectangulum a b c, siquidem d f parallelogrammū sit &c.] C Sequitur hoc quando triangulum a b c parallelogrammo, vel trapezio d e f g sit & equale. quod etiam ab Eutocio demonstratur in commentariis in 49 primi libri Apollonij. quare uerisimile est in Pappi uerbis hoc loco nonnulla desiderari.

L E M M A I X .

Sit triangulum a b c, & producta c a ad d, ducatur ut contingit, recta linea d b e; cui quidem & equidistans ducatur a g: ipsi uero b c & equidistans a f. Dico ut quadratum a g ad rectangulum b g c, ita esse rectangulum d f h ad quadratum f a.

P O N A T V R rectangulo b g c & equale rectangulum a g k: & rectangulo d f h A & equale rectangulum a f l: & iungantur b k, h l. Quoniam igitur angulus ad c B & equalis est angulo b k g: & angulus d a l in circulo & equalis angulo f h l: erit & C angulus g k b angulo f h l & equalis. ergo ut b g ad g k, ita l f ad f h. est autem ut D ag ad g b, ita h e ad e b: & ut h e ad e b, ita h f ad f a. Ut igitur a g ad g b, ita h f ad f a. Sed ut b g ad g k, ita alia quæpiam lineal f ad antecep- dentem f h. quare ex & equali in perturbata ratione, ut a g ad g k, ita l f ad f a. ut uero a g ad g k, ita quadratum a g ad rectangulum a g k, hoc est ad rectan- gulum b g c: & ut l f ad f a, ita rectangulum l f a, hoc est d f h ad quadratum f a. ergo ut quadratum a g ad rectangulum b g c, sic rectangulum d f h ad f a quadratum. Sed licet illud idem etiam per compositionem proportionum demonstrare. Quo niam enim proportio a g ad g b est eadem, quæ h e ad e b; hoc est h f ad f a: proportio autem a g ad g c eadem, quæ d e ad e c; hoc est d f ad f a: erit pro- portio cōposita ex proportione a g ad g b, & ex pro-

lem. in 22.
decimi

P A P P I L E M M A T A

E portione a g ad g c, quæ quidem est quadrati a g ad rectangulum b g c, eadem, quæ componitur ex proportione h f ad f a: & ex proportione d f ad f a. hæc autem est proportio rectanguli d f h ad quadratum f a.

C O M M E N T A R I V S.

- A PONATVR rectangulo b g c æquale rectangulum a g k: & rectangulo d f h æquale rectangulum a f l.] Desiderantur fere omnia hæc in græco codice, quæ nos suppleuiimus; Illud uero ita intelligendum est, ut producatur a g ad K; & fiat rectangulum a g k rectangulo b g c æquale; & rursus producta a f ad l, fiat rectangulum a f l æquale rectangulo d f h.
- B Quoniam igitur angulus ad cæqualis est angulo b k g: & angulus d al in circulo angulo f h l.] Ex uigesima prima tertij elementorum: sunt enim puncta a b k c in circumferentia eiusdem circuli, cum rectangulum a g k æquale sit rectangulo b g c, ex conuersa trigesimæ quintæ eiusdem: & eadem ratione puncta a d l h cadent in circumferentia alterius circuli.
- C Erit & angulus g k b angulo f h l æqualis.] Namq; angulus ad c angulo d al est æqua*lis*, quod b c, fa æquidistantes sint.
- D Ergo ut b g ad g k, ita l f ad f h.] Sequitur enim ex iam dictis triangulum l f h triangulo b g k simile esse, quoniam angulus ad k angulo f h l est æqualis; ut demonstratum fuit; & angulus l f h æqualis angulo l a g, hoc est ipsi b g k. ergo & reliquo reliquo æqualis erit.
- E Hæc autem est proportio rectanguli d f h ad quadratum f a.] Ex quibus fit ut rectangulum d f h ad quadratum f a eandem habeat proportionem, quam quadratum a g ad rectangulum b g c. quod quidem oportebat demonstrare.

APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIBER I.

CVM COMMENTARIIS EUTOCII ASCALONITAE,
ET FEDERICI COMMANDINI.

APOLLONIVS EVDEMO S. D.



I ET corpore uales, & aliæ res tuæ ex animi tui sententia se habent, bène est; nos quidem satis belle habemus. Quo tempore tecum Pergami fui, animaduerti te cupidum intelligendi conica, quæ à nobis conscripta sunt. Itaque misi ad te primum librum emendatum; reliquos deinceps missurus, cum animo ero tranquillior; non enim arbitror te oblitum, quod à me accepisti, quid scilicet causæ fuerit, cur ego hæc scribere aggressus sim, rogatus à Naucrate Geometra, quo tempore Alexandriam ueniens apud nos fuit: & cur nos cum de illis, octo libris egissimus, maiorem statim in his diligentiam adhibuimus. Nam cum ipse Naucrates quamprimum esset nauigaturus, nos ea non emendauimus, sed quæcumque se se nobis obtulerunt conscripsimus; ut pote qui ea postremo essemus percursuri. Quamobrem nunc tempus nacti, ut quæque emendamus, ita edimus. Et quoniam accidit non nullos alios ex iis, qui nobiscum fuerant, habuisse primum, & secundum librum antequam emendaretur, noli mirari si in quædam incidas, quæ aliter se habeant. Ex octo autem libris, quatuor primi huius disciplinæ continent elementa: quorum primus quidem complectitur generationes trium coni sectionum, & earum quæ oppositæ dicuntur; itemq; principalia ipsarum accidentia, à nobis & uberior & universalius, quam ab aliis, qui de ea re scripserunt, elaborata. Secundus liber tractat ea, quæ attinent ad diametros, & ad axes sectionum, & ad illas lineas, quæ cum sectione non conueniunt, quæ à græcis ἀσύμπτωται appellantur: tum de aliis differit, quæ & generalem & necessariam utilitatem ad determinationes afferunt. quas autem uocem diametros, & quos axes ex hoc libro cognoscet. Tertius liber continet multa, & admirabilia theorematæ, quæ utilia erunt, & ad solidorum locorum compositiones, & ad determinationes quorum complura, & pulcherrima & noua sunt. Hæc nos perpendentes, animaduertimus non possumus esse ab Euclide rationem componendi loci ad tres, & quatuor li-

A P O L L O N I I P E R G A E I

neas ; verum ipsius tantummodo particulam quandam : atque hanc non satis feliciter . non enim fieri poterat , ut ea compositio recte perficeretur absque iis , quæ à nobis inuenta sunt . Quartus liber tradit , quod modis conorum sectiones inter se se , & circuli circumferentia occurrere possint ; & multa alia ad pleniorē doctrinā , quorum nihil ab iis , qui ante nos fuerunt , memoriæ proditum est . coni sectio , & circuli circumferentia , & oppositæ sectiones ad quot puncta oppositis sectionibus occurrant . Reliqui autem quatuor libri ad abundantiorem scientiam pertinet . Quintus enim de minimis , & maximis magna ex parte agit . Sextus de æqualibus , & similibus coni sectionibus . Septimus continet theorematā , quæ determinandi uim habent . Octauus problemata conica determinata . At uero omnibus his editis , licet unicuiq; , qui in ea legēdo inciderit , ex animi sui sentētia iudicare . Vale .

EVTOCII ASCALONITAE IN PRIMVM LIBRVM CONICORVM APOLLONII EX PROPRIA EDITIONE COMMENTARIVS.



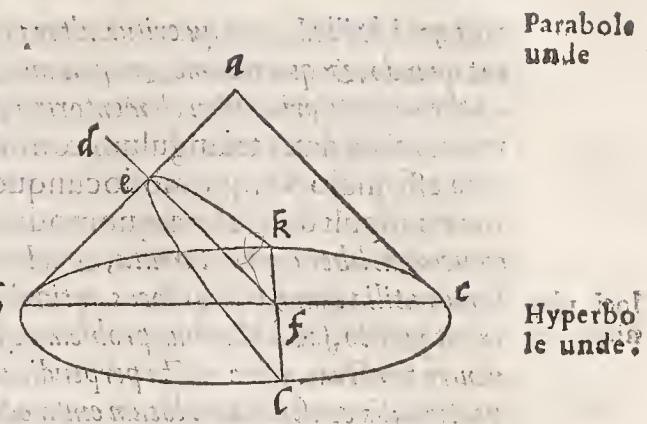
POLLONIVS géometra , Anthemi sodalis charissime , natus est Pergæ , quæ Tam philie ciuitas est , tempore Ptolemæi Euergetæ , ut tradit Heraclius in Archimedis vita . qui etiam scribit Archimedem quidem primum conica theorematā fuisse aggressum ; Apollonium uero cum ea inuenisset ab Archimedē nondum edita , sicut propria sua edidisse . neque id uere , ut mēa fert opinio . nam & Archimedes multis in locis uelut antiquioris conicorum institutionis mentionem facere uidetur : & Apollonius ea scribit , non ut à se ipso inuenta . non enim dixisset , ubi in & uniuersalius hæc à se , quam ab alijs tractata fuisse . Sed quod scribit Geminus uerum est . Antiqui , inquit , conum diffinientes , rectanguli trianguli circumuolutionem manente uno , eorum , quæ circa rectum angulum sunt , latere ; & co nos omnes rectos , & unam in singulis sectionem fieri arbitrati sunt : in rectangulo quidem cono uocatam parabolen ; in obtusiangulo hyperbolēn ; in acutiangulo autem ellipſim ; atq; ita non inatas apud ipsos sectiones passim inuenias . Quemadmodum igitur antiquis illis in unaquaq; triangulorum specie contéplantibus duos rectos , primū in æquilatero , deinde in æquicruri , postea in scaleno ; etate posteriores uniuersale theorema demonstrarunt eiusmodi . Omnis trianguli intérieores tres anguli duobus rectis sunt æquales : ita & in coni sectionibus ; rectanguli quidem coni sectionem dictam , in rectangulo tantum cono contemplati sunt ; secto scilicet plano ad unum coni latus recto : obtusianguli autem coni sectionem in cono obtusiangulo factam demonstrarunt , & acutianguli sectionem in cono acutiangulo ; similiter in omnibus conis ducentes plana ad unum eorum latus recta . quod & antiqua sectionum nomina indicant . Verum postea Apollonius Pergæus uniuersitate inspexit in omni cono tā recto , quām scaleno omnes sectiones iuesse , iuxta planū ad conum differentem inclinationem . quānobrem illius temporis homines admirati mirificam conicorum theorematum demonstrationem magnum geometram ipsum appellarunt . Hæc quidem Geminus scripta reliquit in sexto mathematicarum præceptionum libro . Quod autem dicit manifestum faciemus in jūbiectis figuris . sit enim per axem coni triangulum a b c : & à quo quis pūcto e ducatur ipsi a b ad angulos rectos linea d e f : & per d f immissum planum , rectum ad ipsam a b conum fecet . rectus est igitur uterque angulus a e d , a e f : rectangulōq; existente cono , & angulo b a c recto , ut in prima figura appetat , duobus rectis æquales erunt anguli b a c , a e f . quare æquidistans erit linea d e ipsi a c : & fiet in superficie coni sectio paralela , sic dicta & πορτα πανηλονινα ; hoc est ab eo , quod linea d f , quæ communis sectio est plani secantis , & trianguli per axem .

I CONICORVM LIBER I.

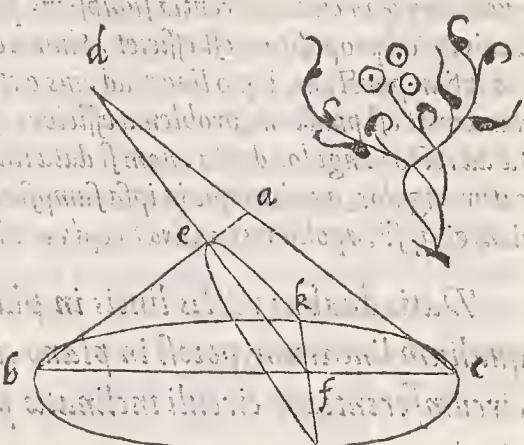
per axem, parallela sit ipsi a c lateri trianguli. sed si obtusiangulus sit conus, ut in secunda figura, obtuso uidelicet existente angulo b a c, & angulo a e f recto, anguli b a c, a e f duobus rectis maiores erunt, & non conuenient de f cum ipso a c latere ad partes, in quibus est f: sed ad eas, in quibus sunt a, & e; producta nimurum c a in d. faciet igitur secans planum in superficie coni sectionem hyperbolam dictam & tō tō vī pēpē
pēpē, hoc est ab eo, quod anguli b a c, a e f excedant duos rectos: uel quod d e f excedat uerticem coni: & cum ipsa c a extra conueniat. Quod si acutiangulus sit conus, hoc est acuto existente angulo b a c, erunt anguli b a c, a e f minores duobus rectis; & linea e f, a c producta conuenient tandem in aliqua parte: augerent namque, & in longius ducere conum possumus. erit igitur in superficie sectio, qua appellatur ellipsis, & tō tō vī pēpē
vī pēpē, hoc est obit, quod dicitur. Eti anguli à duobus rectis deficiant, uel quod ellipsis diminutus quidam circulus sit. Ad huc quidem modum antiqui ponentes secans planum per d e f ad rectos angulos ipsi a b lateri trianguli per axem coni, & insuper differentes conos, & propriam in unoquoque sectionem. At Apollonius ponens conum, & rectum & scalenum differenti ipsius plani occursu differentes efficit sectiones. Sit enim, ut in ijsdem figuris, secans planum k e l: communis au rem sectio ipsius plani, & coni basis; linea k l: communis rursus sectio eiusdem & trianguli a b c sit ipsa e f, qua & diameter appellatur sectionis: itaque in omnibus sectionibus ponit lineam k l ad rectos angulos esse ipsi basi trianguli a b c. Verum si e f aequidistans sit a c, parabolam fieri k e l sectionem in coni superficie: si uero conueniat cum lateri a c extra uerticem coni, ut in d, fieri ipsam K e l sectionem hyperbolam. quod si conueniat intra, fieri sectionem ellipsim, quam & vī pēpē vocat. Generaliter igitur parabola diameter aequidistans est uni lateri trianguli: hyperbolæ autem, & ellipsis diameter cum eo conuenit: hyperbolæ quidem ad partes uerticis coni, ellipsis uero ad partes basis. Scire præterea illud oportet, parabolam, & hyperbolam ex eorum numero esse, quæ in infinitū augentur: at ellipsem non item. tota enim in se ipsam uergit, sicuti circulus. Cum autem plures editiones sint, ut etiam ipse Apollonius in epistola scribit: optimum fore iudicau ex multis, quæ occurserunt, manifestiora colligere: in ipsius uerbis quidcm, ut legentibus ad hæc facilior pateret aditus: seorsum.

uero in commentarijs, ut par est, differentes demonstrationis modos explicare. Itaque in epistola dicit, primos quatuor libros huius disciplinæ elementa continere: quorum primus quidem complectitur generationes trium coni sectionum, & earum, quæ oppositæ dicuntur, itēmq; principalia ipsarum accidentia, hoc est quæcumque ipsis in prima generatione contingunt: habet enim & alia quædam consequentia. Secundus autem liber tractat ea, quæ attinent ad diametros, & ad axes sectionum, & ad illas lineas, quæ cum sectione non conueniunt, quæ à græcis ἀσύμμετροι appellantur: tum de alijs differit, quæ & generalem, & necessariam utilitatem afferunt ad determinaciones. determinatio autem duplex est, ut manifeste patet, altera quidem post expositionem, signifi-

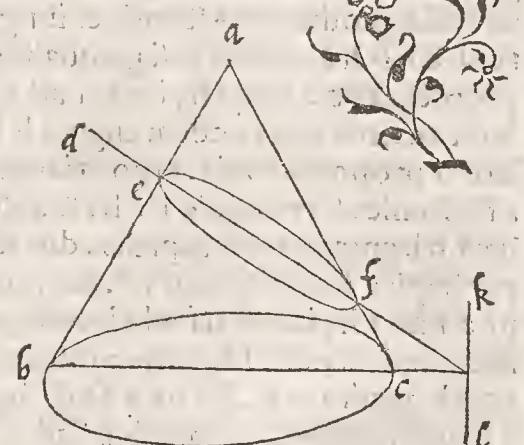
B



Parabole unde

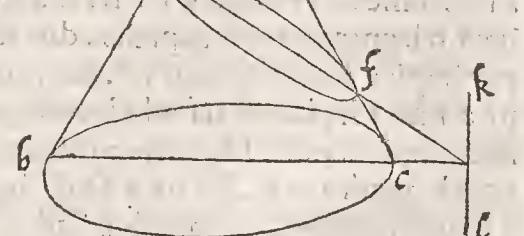


Ellipsis unde



Parabole quando fiat

Hyperbole.
Ellipsis.



Parabole & Hyperbole in infinitū augētū

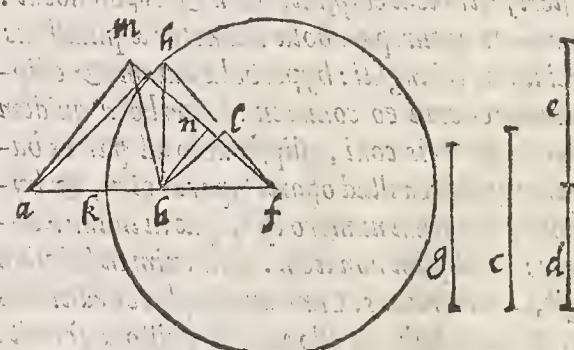
ασύμμετροι
Determinatio duplex

APOLLONII PROBLEMA

solumq; status
 eans quid sit illud, quod queritur: altera uero propositionem uniuersalem esse prohibens, quæ decla-
 rat quando, & qua ratione, & quot modis, id quod propositum est, fieri possit, ut in uigesimo secun-
 do theoremate primi libri elementorum Euclidis. Ex tribus rectis lineis, quæ æquales sint
 tribus alijs datis triangulum constituere: oportet autem duas eiusmodi lineas reli-
 qua esse maiores, quomodo cunque sumantur: quippe cum demonstratum sit, om-
 nis trianguli duo latera, quomodo cunque sumpta reliquo maiora esse. Tertius, inquit,
 concorum liber continet multa, & admirabiliæ theorematæ, quæ ad solidorum locorum composi-
 tiones utilia erunt. planos locos antiqui geometræ appellare consueuerunt, quando non ab uno du-
 taxat puncto, sed a pluribus problema efficitur. ut si quis proponat, Data recta linea terminata, in
 uenire punctum, à quo ducta perpendicularis ad datam lineam, inter ipsius lineæ partes mediae pro-
 portionalis constituatur. locum eiusmodi uocant geometræ, quoniam non unum dumtaxat est pun-
 ctum, quod problema efficit, sed locus totus, quem habet circumferentia circuli circa datam rectâ
 lineam, ueluti circa diametrum descripti. si enim in data recta linea semicirculus describatur;
 quodcunque in circumferentia sumperis punctum, & ab ipso perpendicularem ad diametrum du-
 xeris, quod propositum est efficiet. Similiter autem data recta linea, si quis proponat inuenire ex-
 tra ipsam punctum, à quo lineæ ad eius extrema ductæ inter se æquales sint: & in hoc non unum
 dumtaxat est punctum, problema efficiens, sed locus, quem continet linea, à punto medio linea da-
 ta ad rectos angulos ducta. nam si data linea bifariam sectetur, & ab eo punto linea ad rectos du-
 catur angulos, quodcunque in ipsa sumperis punctum faciet illud, quod proponebatur. Simile quid
 am & ipse Apollonius εν αναλυομένῳ τόπῳ scribit.

Datis duabus rectis lineis in plano, punctisq; datis, & data proportione inæ-
 qualium linearum, potest in plano circulus describi, ita ut lineæ à datis punctis ad
 circumferentiam circuli inclinatae proportionem habeant eandem datæ propor-
 tionem.

Sint data puncta a b; proportio autem data, quam habet c ad d: sitque c maior:
 & oporteat facere illud, quod propositum est. iungatur a b: & ad partes b produca-
 tur: & fiat ut d ad c, ita c ad aliam lineam, quæ maior erit, quam d: sit autem e d: rur-
 sus fiat ut e ad a b, ita d ad b f, & c ad g. patet igitur lineam c proportionalem esse in-
 ter d & e d: itemq; g proportionalem inter a f, f b: quare si ex centro f, & inter ual-
 lo g circulus k h describatur: circumferentia k h lineam a b secabit. Sumatur in circu-
 ferentia quodus punctum h: & iungan-



tur h a, h b, h f; erit h f ipsi g æqualis: & propterea ut a f ad f h, ita h f ad f b. Sunt autem circa eundem angulum h f b
 latera proportionalia. ergo triangulum a f h simile est triangulo h f b: & angu-
 lus f h b angulo h a b æqualis. ducatur per b ipsi a h æquidistans b l. & quoniā
 ut a f ad f h, ita est h f ad f b; erit pri-
 ma a f ad tertiam f b, ut quadratum a f
 ad f h quadratum. sed ut a f ad f b, ita
 a h ad b l. ergo ut quadratum a f ad qua-
 dratum f h, ita a h ad b l. Rursus quo-
 niā angulus b h f æqualis est angulo h a b: & angulus a h b angulo h b l æqualis, co-
 alterni enim sunt: & reliquias reliquo æqualis erit: & triangulum a h b simile trian-
 gulo b h l. quare latera, quæ circum æquales angulos, proportionalia sunt: uidelicet

4. sexti. ut a h ad h b, ita h b ad b l: & ut quadratum a h ad quadratum h b, ita a h ad b l. erat au-
 tem ut a h ad b l, ita quadratum a f ad quadratum f h. ut igitur quadratum a f ad qua-
 dratum f h, ita quadratum a h ad quadratum h b. & idcirco ut a f ad f h, ita a h ad
 B h b. Sed ut a f ad f h, ita c d, ad c, & c ad d. ergo ut c ad d, ita a h ad h b. Similiter ostendimus omnes alias lineas, quæ à punctis a b ad circumferentiam circuli inclinantur
 eandem proportionem habere, quam habet c ad d. itaque dico si à punctis a b du-
 cantur

cantur lineæ ad aliud, quod non sit in circumferentia circuli: ipsarum non eadem esse proportionem, quæ est c ad d, nam si esse potest, factum iam illud sit ad pūctum m, quod extra circumferentiam sumatur (eo enim intra sumpto idem absurdum sequitur) & iunctis m a, m b, m f, ut est c ad d, ita ponatur a m ad m b, ergo ut e d ad d, ita quadratum e d ad quadratum c; & quadratum a m ad quadratum m b, ut autem e d ad d, ita posita est a f ad f b, quare ut a f ad f b, ita quadratum a m ad quadratum m b: & ex iis quæ proxime dicta sunt, si à puncto b ducatur linea ipsi a m æquidistans; ut a f ad f b, ita demonstrabitur quadratum a f ad f m quadratum. Sed demonstratum est ut a f ad f b, ita quadratum a f ad quadratum f h, ergo linea f h ipsi f m est 9. quinti æqualis. quod fieri non potest.

Loci igitur plani eiusmodi sunt. solidi uero loci appellantur ex eo quod lineæ, per quas ipsum problemata efficiuntur, à solidorum sectione generationem habent, quales sunt coni sectiones, & complures aliae. Sunt etiam alij loci ad superficiem dicti, quibus ex eorum proprietate nomen impositum est. Inuenitur deinde Apollonius in Euclidem, non ut Pappus & alij non nulli arbitrantur, quod duas medias proportionales non inuenierit: siquidem Euclides recte inuenit unam mediæ proportionalem, non infeliciter, ut ipse inquit: duas uero proportionales medias neque omnino in elementis inuestigare aggressus est, & Apollonius de duabus medijs proportionalibus in tertio libro nihil inquirere uidetur. Sed uerisimile est Euclidem in alio libro de locis conscripsisse, qui ad manus nostras non peruerterit. Quæ uero deinceps subiungit dc quarto libro perspicua sunt. Quintus, inquit, liber de minimis & maximis magna ex parte agit. Quemadmodum enim in elementis didicimus, si ab aliquo puncto in circulum lineæ ducantur, earum quidem, quæ ad concavam ipsius circumferentiam pertinent, maximam esse quæ per centrum transit; earum uero, quæ ad conuexam, minimam esse, quæ inter dictum punctum, & diametrum interiicitur; ita & de coni sectionibus in quinto libro inquirit. Sexti, septimi, & octauij libri propositum manifeste ab ipso Apollonio explicatur. & hæc de epistola dicta sint.

FED. COMMANDINI IN PROBLEMA.

APOLLONII COMMENTARIUS.

Itemque g proportionalem inter a f, f b] Quoniam enim ut d ad b f, ita est c ad g; A erit permittendo ut d ad c, ita b f ad g: rursus quoniam ut e ad a b, ita d ad b f ex 12. quinti, e d ad a f erit, ut d ad b f. Sed ut d ad b f, ita c ad g: ergo e d ad a f, ut c ad g: & permittendo e d ad c, ut a f ad g: conuertendoq; c ad d e, ut g ad a f. erat autem d ad c, ut b f ad g: & ut d ad c, ita c ad d e. quare ut b f ad g, ita g ad a f: & propterea g media proportionalis est inter a f, f b, quod demonstrare oportebat.

Sed ut a f ad f h, ita e d ad c.] Proxime enim ostendimus e d ad c ita esse, ut a f ad B g, hoc est ad f b ipsi g æqualem.

Ergo ut e d ad d ita quadratum e d ad quadratum c, & quadratum a m ad quadratum m b.] Nam ut e d ad c, ita est c ad d: & ut c ad d, ita posita est a m ad m b. quare ut e d ad c, ita a m ad m b: & ideo ut quadratum e d ad quadratum c, ita quadratum a m ad quadratum m b. ut igitur e d ad d, ita est quadratum e d ad quadratum c, & quadratum a m ad quadratum m b.

Vt autem e d ad d, ita posita est a f ad f b.] Superius namque demonstratum est, ut D e d ad a f, ita esse d ad b f. quare & permittendo ut e d ad d, ita a f ad f b.

Et ex iis quæ proxime dicta sunt, si à puncto b ducatur linea ipsi a m æquidistantis: ut a f ad f b, ita demonstrabitur quadratum a f ad f m quadratum.] Duplicatur per b ad m f linea b n, quæ ipsi a m æquidistet. erit ob similitudinem triangulorum a m f, b n f, ut a f ad f b, ita a m ad b n. Itaque quoniam ut a f ad f b, sic est quadratum a m ad quadratum m b; & sic quadratum a f ad quadratum f b: erit quadratum a m ad quadratum m b, ut quadratum a f ad f b quadratum: & propterea linea a m ad m b, ut a f ad f b: conuertendoque m b ad a m, ut f b ad a f. erat autem a m ad b n, ut a f ad f b. quare ex æquali m b ad b n, ut b f ad f b. sed est a m ad m b, ut a f ad f b: & ut a f ad f b, ita b f ad f b. ergo ut a m ad m b, ita m b ad b n. Quoniam igitur circa æquales angulos a m b, m b n latera pro-

A P O L L O N I I P E R G A E I

6. sexti portionalia sunt: erit triangulum $a b m$ simile triangulo $m n b$: & angulus $b a m$ æqualis angulo $n m b$. sed triangulorum $a m f$, $m b f$ angulus, $f . m$ est æqualis angulo $f m b$: & angulus ad f utrique communis. ergo & reliquis reliquo æqualis, & triangulum triangulo simile erit. quare ut $a f$ ad $f m$, ita est $f m$ ad $f b$. ut igitur prima $a f$ ad $f b$ tertiam, ita quadratum $a f$ ad $f m$ quadratum.

D I F F I N I T I O N E S P R I M A E.

- A** 1 SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem planō, in quo punctum, coniuncta recta linea in utramque partē producatur: & manente puncto conuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri: superficiem à recta linea descriptam, constantemq; ex duabus superficiebus, ad uerticem inter se se aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit in infinitum producta, uoco conicam superficiem. 2 Verticem ipsius, manens punctum. 3 Axem, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur. 4 Conum autem uoco, figuram contētam circulo, & conica superficie, quæ inter uerticem, & circuli circumferentiam interiicitur. 5 Verticem coni, punctum, quod & superficie conicæ uertex est. 6 Axem, rectā lineam, quæ à uertice ad circuli centrum perducitur. 7 Basim, circulum ipsum. 8 Conorum rectos quidem uoco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus. 9 Scalenos uero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent. 10 Omnis curuæ lineæ, in uno plāno existentis diametrum uoco rectam lineam, quæ quidem ducta à linea curua; omnes lineas, quæ in ipsa ducuntur, cuidam lineæ æquidistantes bifariam diuidit. 11 Verticem lineæ terminum rectæ, qui est in ipsa linea. 12 Ordinatim ad diametrum applicari dicitur, unaquæque linearum æquidistantium. 13 Similiter & duarum curuarum linearum in uno plāno existentium, diametrum quidem transuersam uoco, rectam lineam, quæ omnes in utraque ipsarum ductas, lineæ cuidam æquidistantes bifariam diuidit. 14 Vertices linearum, diametri terminos, qui sunt in ipsis lineis: 15 Rectam uero diametrum uoco, quæ inter duas lineas posita, lineas omnes ductas, rectæ cuidam æquidistantes, & inter ipsas interiectas bifariam secat. 16 Ordinatim ad diametrum applicari dicitur unaquæque linearum æquidistantium. 17 Coniugatas diametros uoco curuæ lineæ & duarum curuarum, rectas lineas, quarum utraque diameter est, & lineas alteri æquidistantes bifariam diuidit. 18 Axem uero curuæ lineæ, & duarum curuarum, rectam lineam, quæ cum sit diameter curuæ lineæ, uel duarum curuarum, æquidistantes ad rectos secant angulos. 19 Axes coniugatos curuæ lineæ, & duarum curuarum, rectas lineas, quæ cum sint diametri coniugatae, ipsis æquidistantes ad rectos angulos secant.

EVTO

E V T O C I V S:

AGGRESSVS ad diffinitiones Apollonius tradit generationem conicæ superficiei, non diffinitionem, quæ, quid res sit, declarat: quamquam licebit utique ijs, qui uolent, & ex generatione ipsa diffinitionem colligere. At uero nos ijs, quæ ab Apollonio dicuntur, ex figuris lucem afferemus.

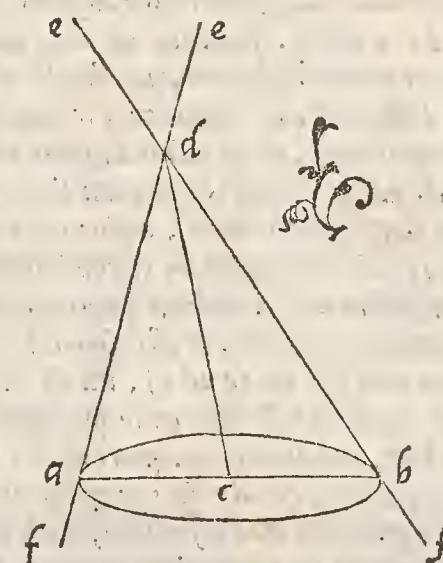
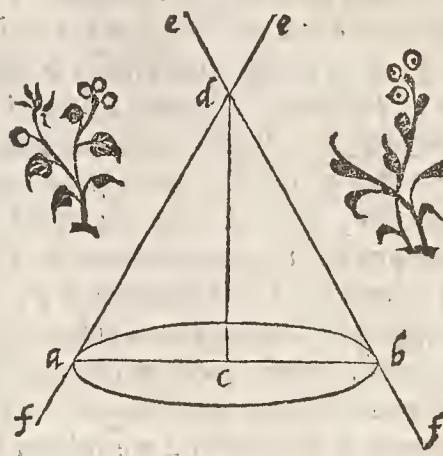
Si ab aliquo punto ad circumferentiam circuli: &c.

Sit circulus $a b$, cuius centrum c : & punctum aliquod sublime d : iunctaque $d b$ in infinitum ex utraque parte producatur ad puncta $e f$. Si igitur recta linea $d b$ feratur eo usque in circuli $a b$ circumferentia, quousque punctum b rursus in eum locum restituantur, a quo caput moueri: describet superficiem quandam, quæ quidem constat ex duabus superficiebus, ad d punctum se tangentibus. eam itoco conicam superficiem; quæ & augetur in infinitum, cum recta linea $d b$, ipsam describens in infinitum producitur. uerticem superficie dicit, punctum d : axem, rectam $d c$. conum uero appellat figuram contentam circulo $a b$, & ea superficie, quam $d b$ sola describit: coni uerticem punctum d : axem $d c$: & basim, $a b$ circulum. At si $d c$ ad circulum, fuerit perpendicularis, rectum uocat conum; sin minus, scalenum.

Describetur autem conus scalenus, quando à centro circuli linea erigatur, quæ non sit perpendicularis ad circuli planum: à puncto uero linea, quod est in sublimi ad circuli circumferentiam recta linea ducatur: & manente puncto circa ipsam conuertatur: comprehensa etenim figura conus erit scalenus. constat igitur lineam circumductam in conuersione quandoque maiorem; quandoque minorem, & quandoque aequaliter fieri, ad aliud, atque aliud circuli punctum. quod tamen nos hoc modo demonstrabimus.

Si à uertice coni scaleni ad basim rectæ lineæ ducantur; earum omnium una minima, & una maxima erit, duæ uero tantum ex utraque parte minime & maxime inter se aequales. At quæ propinquior est minima semper minor erit, quam quæ ab ipsa magis distat.

Sit conus scalenus, cuius basis $a b c$ circulus, uertex autem punctum d . & quoniam linea, quæ à uertice coni scaleni ad subiectum planum perpendicularis dicitur, uel in circumferentiam circuli $a b c$ cadit, uel extra, uel intra. cadat primum in ipsam circumferentiam, ut in prima figura apparet, quæ sit $d e$: sumptōq; circui; centro k , ab ipso e ad k ducatur linea $e k$, & producatur ad b . iungatur autem $b d$: & ex utraque parte puncti e sumantur due circumferentie aequales $f e$, $e g$: itēmq; ex utraque parte b sumantur aliae due aequales $a b$, $b c$: & iungantur $f e$, $d f$, $d g$, $a e$, $e c$, $a b$, $b c$, $d a$, $d c$. Quoniam igitur recta linea ef aequalis est ipsi eg : aequalis enim circumferentias subtendunt: communis autem, & ad rectos angulos $d e$: erit basis df 29. tertii basi $d g$ aequalis, rursus quoniam circumferentia $a b$ aequalis est ipsi $b e$ circumferentia, & est $b e$ diameter circuli: reliqua ef & $a e$ reliqua eg & $c e$ aequalis erit. quare & recta linea $a e$ ipsi $e c$. Sed $d e$ communis est utriusque, & ad rectos angulos. basis igitur $a d$ aequalis est basi $d c$. Similiter autem demonstrabuntur inter se aequales, quæcumque ab ipsa $d e$, uel $d b$ aequaliter distant. Rursus quoniam triangulum est edf , & angulus $d f$ rectus, linea df , maior erit, quam $d e$. 18. primi & quoniam recta linea $a e$ maior est, quam recta ef , quod & circumferentia ef a maior; quam



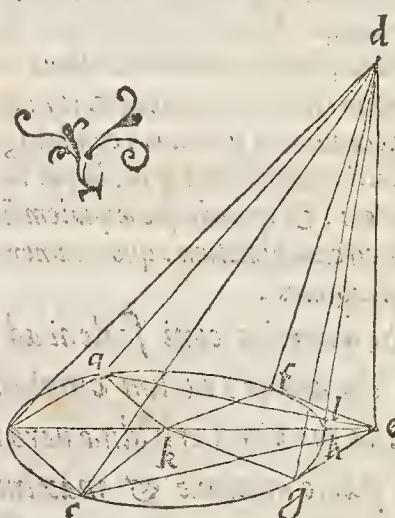
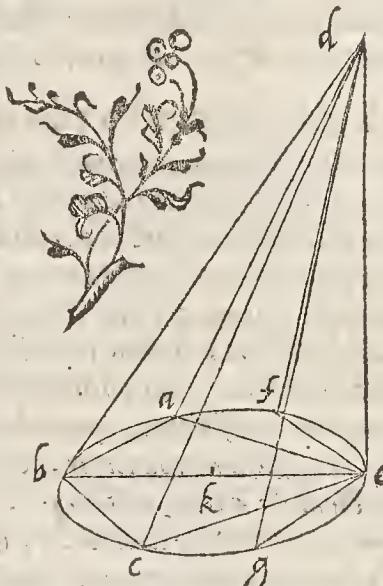
APOLLONII PERGAEI

47. primi ipsa est circumferentia communis uero ad rectos angulos de: basis d f minor erit, quam d a. eadem quoque ratione, & d a minor, quam d b. Quod cum ostensa sit d a minor, quam d f; itemq; d f minor, quam d a, & d a minor, quam d b:

sequitur ipsam d e minimam esse; d b uero maximam; & quae propinquior est ipsi d e semper minorem esse, quam quae ab ipsa magis distat. Sed cadat perpendicularis d e extra circulum a b c g f, ut in secunda figura: & rursus sumatur circuli centrum K: unctaque e h K producatur ad b: & iungantur d b, d b. Sumantur præterea duæ circumferentia ex utraque parte puncti h, quæ sint f h, h g: & ex utraque parte ipsius b aliae duæ sumantur a b, b c, a k, k c, d a, d c, itaq; quoniam æqualis est circumferentia b f ipsi h g: & angulus b k f angulo h k g æqualis erit. Sed recta linea f k, recta k g est æqualis, ex centro enim ad circumferentiam ducuntur: & communis k e, ergo basis f e æqualis basi g e. est autem communis, & ad rectos angulos d e. basis igitur d f basi d g est æqualis. Rursus quoni. in circumferentia b a æqualis est circumferentia b c: & angulus a k b ipsi c k b, &

27. tertii. 8. primi 13. primi. 3. tertii 36. tertii 14. sexti 8. tertii 14. quinti 20. primi 4. primi 27. tertii 4. primi

ipsi. 27. certii. 8. primi reliquias ex duobus rectis a k e reliquo c k e æqualis erit. lineæ autem a k, k c inter se æquales, ex centro enim sunt; & communis ipsa k e, ergo & a e basis æqualis basi c e. rursus cum sit d e communis, & ad rectos angulos, & d a basis erit basi d c æqualis. similiter & aliae omnes ad inuicem æquales demonstrabuntur, que ab ipsa d b, uel d h æqualter distiterint. & quoniam e h minor est, quam e f: communis uero, & ad rectos angulos e d, erit basis d h basi d f minor. Rursus quoniam linea, qua à punto e ducta contingit circulum, maior est omnibus, quæ ab eodem punto in conuexam circumferentiam cadunt: & rectangulum a e l æquale est quadrato ipsius e f, quando e f circumferentia contingit, ut ostensum est in tertio libro elementorum; erit ut a e ad e f, ita e f ad e l. est autem e f maior, quam e l, semper enim propinquior minima minor est ea, quæ plus distat. quare & a e maior quam e f. Sed communis, & ad rectos angulos est e d. basis igitur d f minor est basi d a. rursus cum sit a k æqualis ipsi k b, & communis k e: erunt duæ lineæ a k, k e, duabus e k, k b, hoc est toti e b æquales. Sed duæ a k, k e maiores sunt, quam e a. ergo & b e maior quam a e. communis autem d e, & ad rectos angulos, quare basis d a minor est basi d b. Itaq; cum d b minor sit, quam d f; & d f minor, quam d a; & d a, quam d b: minima erit d b; d b uero maxima: & ipsi d h propinquior semper minor erit, quam quæ magis distat.



Postremo cadat perpendicularis d e intra circulum a b c g f, ut in tertia figura: sumptoq; circuli centro k; & imeta e k producatur in utramque partem ad puncta b b. & iungantur d b, d b. sumantur autem ex utraque parte puncti h circumferentia æquales f h, h g. & ex utraque parte b sumantur a b, b c: denique iungantur e f, e g, f k, k g, d f, d g, k a, k c, e a, e c, d a, d c, a b, b c. Quoniam igitur b f circumferentia æqualis est circumferentia h g: & angulus h k f angulo h k g est æqualis: linea uero k f æqualis ipsi k g: & k e communis. ergo & f e basis basi g e æqualis erit. Sed est d e communis: & angulus f e d rectus æqualis recto g e d. quare & basis d f basi d g æqualis. rursus cum circumferentia a b æqualis sit circumferentia b c; angulus a k b angulo c k b æqualis erit. ergo & reliquias ex duobus rectis a k e reliquo c k e est autem linea a k æqualis k c: & communis k e. basis igitur a e basi c e æqualis. Sed cum d e communis sit: & angulus a e d æqualis angulo c e d; quod uterque rectus: erit & basis d a basi d e æqualis.

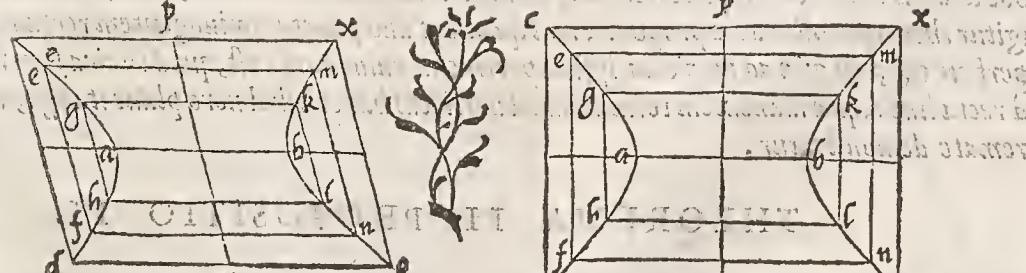
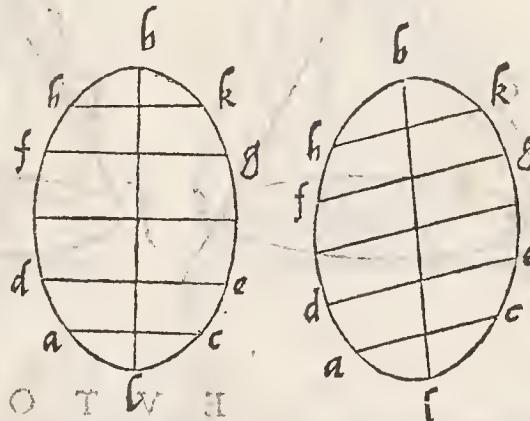
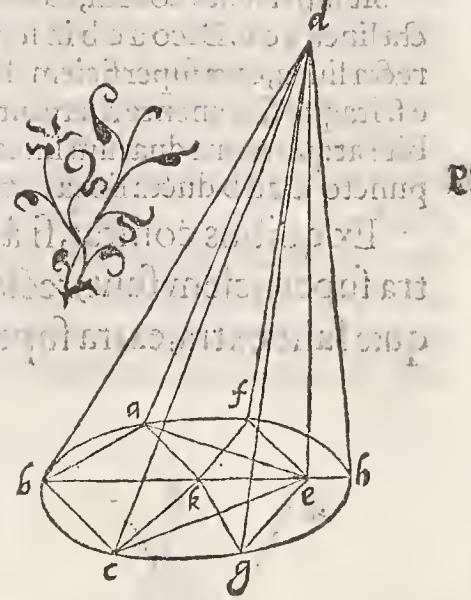
equalis. Eodem modo & omnes, que æqualiter distant ab ipsa d b; uel d h inter se æquales demonstrabuntur. Itaque quoniam in circuli a b c diametro sumitur punctum e, quod non est centrum circuli, erit e b maxima; & b uero minima: & semper ipsi e b propinquior minor ea, quæ distantior fuerit. quare e b minor, quam e f. at e d communis est, & ad rectos angulos, basis igitur d b minor basi d f rursus cum e f minor sit, quam e a, communisq; & ad rectos angulos e d: basis d f basi d a minor erit. & eadem ratione basis d a minor, quam d b ostendetur. Quoniam igitur minor est d b, quam d f: & d f quam d a; & d a quam d b: minima erit d b, & d b maxima: & propinquior ipsi d b semper minor ea, quæ magis distat.

Omnis curuæ lineæ in uno plano existentis diametrum uoco rectam lineam &c.

In uno plano dixit propter helicam cylindri & sphaerae: haec enim non sunt in uno plano. Quod autem dicit eiusmodi est. si curua linea a b c: & in ea æquidistantes a c, d e, f g, h k: à punto autem b ducatur b l recta linea, quæ ipsas æquidistantes bifariam secet. lineæ igitur a b c diametrum, inquit, uoco rectam lineam b l: & uerticem punctum b. ordinatum uero ad ipsam b l applicari dicitur unaquaque linearum a c, d e, f g, h k. Quod si b l æquidistantes bifariam, & ad rectos angulos secet, axis appellatur.

Similiter & duarum curuarum linearum, &c.

Si enim intellexerimus lineas a b, & in ipsis æquidistantes c d, e f, g h, k l, m n, x o: & diametrum a b ex ultraque parte productam, quæ bifariam æquidistantes diuidat: ipsam quidem a b uoco diametrnm transuersam: uertices linearum puncta a b: ordinatum uero ad a b diametrum applicari dicuntur c d, e f, g h, k l, m n, x o. At si bifariam, & ad rectos angulos diuidat, transuersus axis appellabitur. Si uero recta linea, ut p r ducta lineas c x, e m, g k, h l, f n, d o, ipsi a b æquidistantes bifariam secet: recta diameter dicitur. Ordinatum ad p r diametrum applicatur unaquaque linearum c x, e m, g k, h l, f n, d o. si bifariam, & ad rectos angulos secet, rectus axis dicitur. At uero si rectæ lineæ a b, p r ipsis æquidistantes bifariam secuerint, coniugata diametri. Quod si bifariam, & ad rectos angulos, coniugati axes uocabuntur.

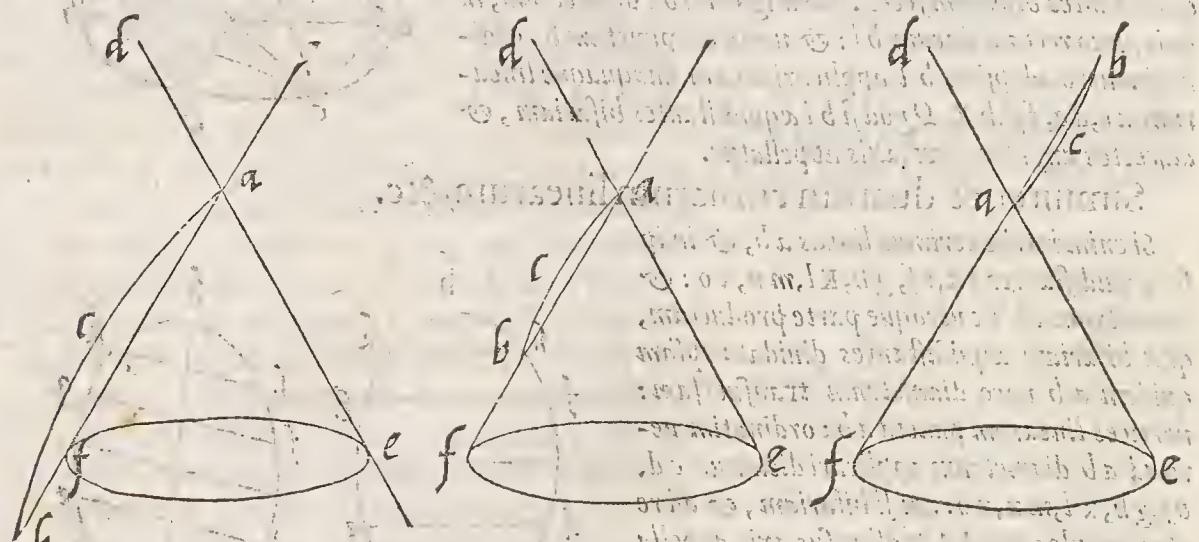


THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Rectæ lineæ, quæ à uertice superficie conicæ ad puncta, quæ in superficie sunt, ducuntur; in ipsa superficie erunt.

Sit superficies conica, cuius uertex a : & sumpto in ea aliquo puncto b , iungatur recta linea $a c b$. Dico $a c b$ in superficie esse. Si enim fieri potest, non sit in superficie: & recta linea, quæ superficiem describit, sit $d e$; circulus autem, in quo ipsa $d e$ fertur, sit $e f$. itaque si manente a feratur $d e$ in $e f$ circuli circumferentia, per b punctum transibit: atque erunt duarum linearum ijsdem termini, quod est absurdum. non igitur à punto a ad b ducta linea extra superficiem est. ergo in ipsa superficie erit.

Ex quibus constat, si à uertice ad aliquid punctum eorum, quæ intra superficiem sunt, recta linea ducatur, intra: & si ad aliquid eorum, quæ sunt extra, extra superficiem cadere.



E V T O C I . V . S .

De figuris differentibus uel cisisibus theorematum illud scire oportet, casum esse, quādo ea, quæ in propositione dantur, positione data sint. ipsorum enim differens transmutatio, eadem conclusione manente, casum facit. similiter autem & à constructione transposita fit casus. cum igitur theorematata plures casus habeant, una eadēmq; demonstratio omnibus congruit, & ijsdem elementis: præter quām in paucis quibusdam, ut deinceps explicabimus. Statim namque primum theorema tres habet casus, propterea quod punctum b interdum quidem in superficie inferiori sumitur, & hoc duobus modis, uel supra circulum, uel infra: interdum uero in ea, quæ est ad uerticem. primum igitur theorema ostendere proponit, non quælibet duo puncta coniungentem rectam lineam in superficie esse, nisi quæ ad uerticem ipsum pertineat. cuius causa est, quod conica superficies efficitur à recta linea, quæ manentem terminum ad uerticem habet. Illud uero planè ita esse, in secundo theoremate demonstratur.

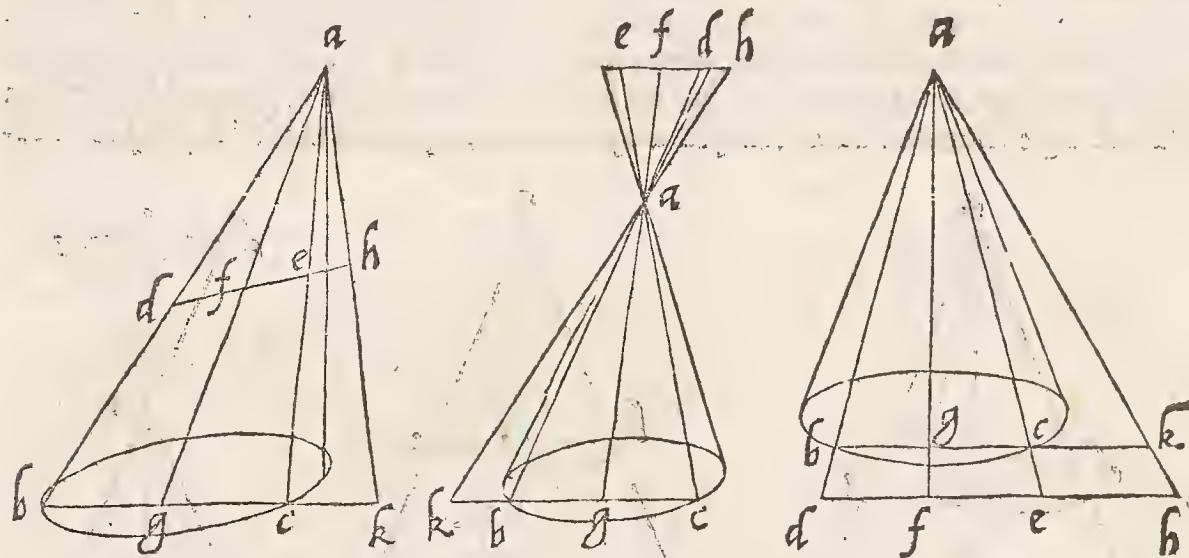
THEOREMA II; PROPOSITIO II.

Si in alterutra superficie, quæ sunt ad uerticem, duo puncta sumantur: & quæ puncta coniungit recta linea ad uerticem non pertineat, intra superficiem cadet: quæ uero est in directū ipsi, cadet extra.

Sit

Sit conica superficies, cuius uerTEX quidem a; circulus autem, in quo fertur linea su-
perficiem describens, sit b c: & in alterutra superficie, quæ sunt ad uerticem, sum-
ptis duobus punctis d e, linea d e ducatur, quæ ad punctum a non pertineat. Dico ip-
sam d e intra superficiem cadere: & quæ est in directum ipsi, cadere extra. iungantur
a d, a e, & producantur, cadent utique in circuli circumferentiam, cadant in puncta
b c: & iungatur b c: erit igitur b c intra circulum. quare & intra conicam superficiem.
sumatur in ipso d e quodvis punctum f: iunctaq; a f producatur, cadet in lineam b c:
nam triangulum b c a in uno plano existit. itaque cadat in g. quoniam igitur punctum
g est intra conicam superficiem: & ipsa a g; & punctum f intra conicam superficiem
erit. similiter autem demonstrabuntur & omnia alia puncta linea d e esse intra coni-
cam superficiem. ergo & ipsa d e intra candem cadet. producatur d e ad h. dico linea
e h extra conicam superficiem esse. si enim fieri potest, aliquod ipsius punctum h non
sit extra; & iuncta a h producatur, cadet in ipsam circuli circumferentiam, uel intra;
quod fieri non potest. cadit enim in lineam b c protractam, ut in k. quare e h extra
conicam superficiem erit. linea igitur d e cadet intra conicam superficiem: & quæ
est in directum ipsi, extra cadet.

i. huius
2. tertii
2. undeci-
mi.
cor. i. hu-
ius



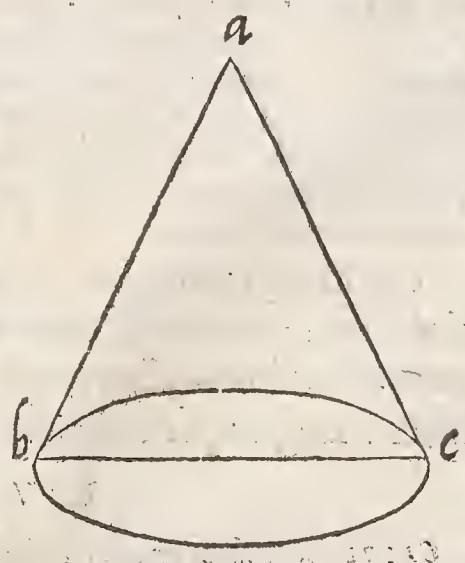
E V T O C I V S.

SECUNDVM theorema tres habet casus, propterea quod puncta d e sumuntur quandoque in su-
perficie secundum uerticem, quandoque in inferiori: & id dupliciter, uel intra circulum, uel extra.
Sciendum autem est in quibusdam exemplaribus totum hoc theorema per argumentationem, quæ de-
ducit ad id, quod fieri non potest, demonstrari.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si conus plano per uerticem secetur, se-
ctio triangulum erit.

Sit conus, cuius uerTEX a; basis autem circulus
b c: & per a secetur plano aliquo, quod sectiones
faciat in superficie a b, a c lineas; & in basi lineam
b c. Dico ab c triangulum esse. Quoniam enim a
puncto a ad b ducta linea communis sectio est pla-
ni secatis, & superficie conicæ, erit a b recta linea.
Eadem ratione & ipsa a c, est autem & b c recta.
quare triangulum est a b c. si igitur conus plano se-
cetur per uerticem, sectio triangulum erit.



C

A P O L L O N I I P E R G A E I

E V T O C I V S.

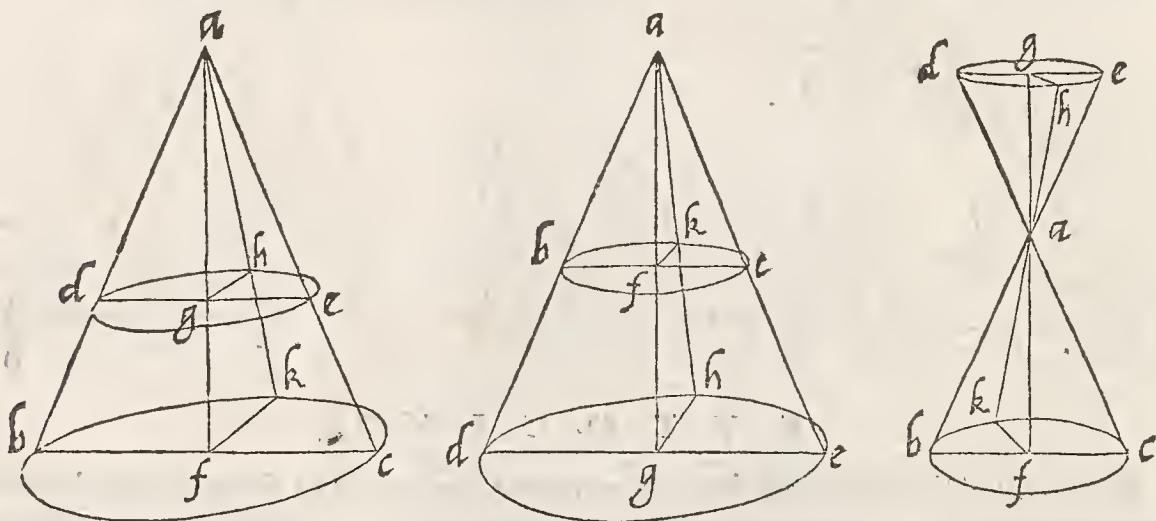
TERTIVM theorema casum non habet. oportet autem scire lineam ab rectam esse, cum sit cō munis sectio plani secantis & superficie conicæ, quæ à recta linea manentem terminum ad uerticē habente, describitur. neque enim omnis superficies secta plāno sectionem facit rectam lineam: neq; ipse conus, nisi planum secans per uerticem transeat.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si alterutra superficierum, quæ sunt ad uerticem plāno secetur, & qui distante circulo, per quem fertur recta linea superficiem describens: plānum, quod superficie concluditur, circulus erit, centrum in axe habens: figura uero contenta circulo, & ea parte superficie conicæ, quæ inter se cans plānum & uerticem interiicitur, conus erit.

SIT conica superficies, cuius uertex a: circulus autem, in quo fertur recta linea superficiem describens, b c: & secetur plāno ipsi circulo b c æquidistanti; quod sectio nem faciat in superficie lineam d e. Dico d e circulum esse, qui centrum in axe habet. Sumatur enim centrum circuli b c, quod sit f: & af iungatur. axis igitur est af: & occurrit plāno secanti: occurrat in g: & per af plānum ducatur. erit sectio triangulum a b c. itaque quoniam puncta d g e sunt & in plāno secante, & in ipso a b c plāno: recta linea erit d g e. sumatur autem in ipsa d e punctum aliquod h: & iuncta ah produca-

6. diff. hu
ius.
3. huius
3. undeci-
mi.



16. unde-
cim⁹. tur, quæ circumferentia b c occurrat in k: iunganturq; gh, fk. & quoniam duo plāna d e, b c æquidistantia à plāno a b c secantur; communes ipsorum sectiones æquidistan-
tes erunt. æquidistat igitur linea d e ipsi b c. & eadem ratione gh ipsi fk. quare ut fk à ad ag, ita fb ad dg; fc ad ge; & fk ad gh: suntq; tres lineæ b f, f k, f c æquales inter se se. ergo & ipsæ tres dg, gh, ge inter se se æquales erunt. similiter quoque ostendentur æquales quæcumque à punto g ad lineam d e ducuntur. circulus igitur est linea d e, centrum in axe habens.

Constat præterea figuram contentam circulo d e, & ea parte superficie conicæ, quæ inter dictum circulum, & punctum à interiicitur, conum esse: simulq; demonstratum est communem sectionem plāni secantis, & trianguli per axem diametrum esse ipsius circuli.

E V T O C I V S.

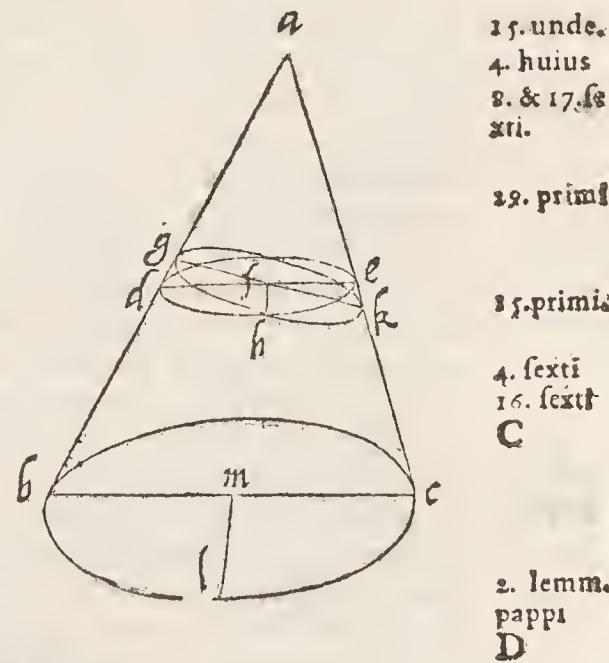
CASVS huius theorematis tres sunt, quemadmodum & præcedentis & secundi.

THEO-

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

SI conus scalenus plano per axem secetur ad rectos angulos ipsi basi; seceturq; altero piano ad triangulum per axem recto, quod ex uerticis parte triangulum abscindat simile ei, quod per axem, subcontrarie uero positum: sectio circulus erit. uocetur autem huiusmodi sectio subcontraria.

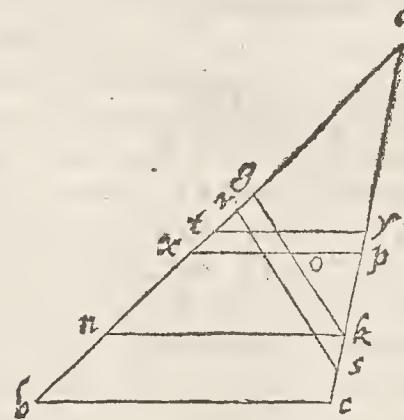
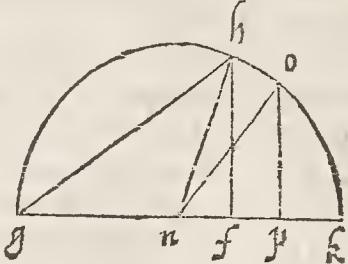
Sit conus scalenus, cuius uerTEX a punctum; basis circulus b c: & secetur piano A per axem, ad circulum b c recto, quod faciat sectionem triangulum a b c. secetur autem, & altero piano ad rectos angulos ipsi a b c, quod ex parte a triangulum abscindat a g k triangulo a b c simile, sub contrarie uero positum; ut uidelicet angulus a k g æqualis, sit a b c angulo: & faciat sectionem in superficie lineam g h k. Dico ipsam g h k circulum esse. Sumantur enim in lineis g h k, b c puncta quæpiam h l: à quibus ad planum, quod per triangulum a b c transit, perpendiculares ducantur, cadent hæ in communes planorum sectiones. cadant ut h f, l m. æquidistans est igitur h f ipsi l m. ducatur autem per f ipsi b c æquidistantis d f e. ergo planum, quod per f h, d e transit æquidistans est basi ipsius coni: & idcirco sectio d h e circulus erit, cuius diameter d e. æquale est igitur rectangulum d f e quadrato f h. Quòd cum æquidistet d e ipsi b c, angulus a d e æqualis est angulo a b c. & ponitur angulus a k g angulo a b c æqualis. ergo & a k g ipsi a d e æqualis erit. sunt autem & qui a d f anguli æquales, quòd sint ad uerticem. quare d f g triangulum simile est triangulo k f e. & ut e f ad f k, ita g f ad f d. rectangulum igitur e f d æquale est rectangulo k f g. Sed rectangulum e f d demonstratum est æquale quadrato f h. ergo & k f g eidem æquale erit. simili quoque ratione demonstrabuntur & omnes, quæ à linea g h k ad ipsam g k perpendiculares ducuntur, posse æquale ei, quod partibus ipsius g k continentur. sectio igitur circulus est, cuius diameter g k.



E V T O C I V S.

Quintum theorema casum non habet. exordiens autem Apollonius expositionem. Secetur, A inquit, conus per axem piano ad basim recto. Sed quoniam in cono scaleno iuxta unam. dumtaxat positionem triangulum per axem ad basim rectum est: hoc ita faciemus; sumentes namque basi centrum: ab eo erigimus lineam ad rectos angulos ipsi piano basis: pérq; eiusmodi lineam, & per axem planum ducentes, id, quod propositum fuerat, assequemur: ostensum etenim est in undecimo libro elementorum Euclidis, si recta linea piano alicui ad rectos angulos fuerit, & omnia, quæ per ipsum ducuntur, plana eidem ad rectos angulos esse. conum uero scalenum posuit, quoniam in æquicruri planum basi æquidistantis idem est, quod sub contrarie ductum. præterea secetur, inquit, & altero, piano ad rectos angulos ipsi triangulo per axem, quod abscindat ex uerticis parte triangulum simile ipsi a b c, subcontrarie uero positum. illud ita fiet. sit triangulum per axem a b c: sumaturq; in linea a b quodus punctum g: & ad a g rectam lineam, & ad punctum in ea g, constituantur angulus a g k ipsi a c b æqualis. ergo triangulum a g k, triangula a b c simile erit, quamquam sub contraria positum. itaque sumatur in linea g k quod libet punctum f, à quo erigatur f h ad rectos angulos ipsi trianguli a b c: & per lineas g k, h f planum ducatur. erit illud ad triangulum a b c rectum, quod per lineam f h transeat: & faciet id, quod faciendum proponebatur. In conclusione dicit, propter similitudinem triangulo-

rum d fg, e fk æquale esse rectangulum d fe rectangulo g fk. quod quidem & absq; trian-
 gularum similitudine demonstrari potest, hoc pacto: quoniam enim uterque angulorum a k g, a de
 21. tertii. æqualis est angulo, qui ad b, in eadem erunt portione circuli, puncta d g e k compræbendentis. &
 25. tertii. quoniam in circulo duæ rectæ lineæ d e, g k se secant in f, rectangulum d fe æquale est rectan-
 gulo g fk. Similiter demonstrabuntur & omnes lineæ ab ipsa g h k ductæ perpendiculares ad g k.
D rectam, posse æquale ei, quod partibus ipsius g k continetur. circulus igitur sectio est, cuius
 diameter g K. possimus autem hoc demonstrare per deductionem ad id, quod fieri non potest. Si
 enim circulus; qui circa g k describitur, non transit per h punctum; erit rectangulum k fg æqua-
 le quadrato lineæ maioris ipsa fb, uel minoris, quod non ponitur. sed & illud idem recta demon-
 stratione ostendemus. sit linea quædam g h k, cui subtendatur re-
 cta g k: sumantur autem & in linea duo quævis puncta h, o, à
 quibus ad ipsam g k perpendiculares ducantur h f, o p: sitq; qua-
 dratum fb æquale rectangulo g fk: & quadratum o p æquale
 ipsi g p k rectangulo. Dico lineam g h o k circulum esse. secetur
 enim g k recta bifariam in puncto n: & iungantur g h, h n, n o.
 Quoniam igitur recta linea g k secatur in partes æquales in n, &
 3. secundi in partes inæquales in f: rectangulum g fk una cum quadrato
 n f æquale erit quadrato n K. sed rectangulum g f K positum est
 47. primi. æquale quadrato h f. quare h f quadratum una cum ipso n f æquale est quadrato n K. æqualia au-
 tem sunt h f, fn quadrata ipsi quadrato n h, cum angulus ad f sit rectus. ergo quadratum n h
 quadrato n K æquale erit. similiter ostendemus quadratum n o æquale esse quadrato n K. linea
 9. tertii igitur g h K circulus est, & eius diameter g K. fieri autem
 potest, ut diametri d e, g K quandoque æquales sint, quan-
 doq; inæquales: nunquam tamen se bifariam secabunt. du-
 catur enim per K ipsi b c æquidistans n K. Quoniam igitur
 maior est b a quam a c; & ipsa n a, quam a K maior erit.
 eadem ratione & K a maior est, quam a g propter subcon-
 trariam sectionem. quare si à linea a n abscissa fuerit æqua-
 lis ipsi a K: inter puncta g n cadet, ut a x: & per x ducta
 æquidistans ipsi b c secabit g K. secetur ut x o p. itaque quo-
 niam æqualis est x a ipsi a K; & sicut x a ad a p, ita K a ad
 a g ob similitudinem triangulorum g K a, x p a: erit a g ipsi
 a p æqualis, & reliqua g x ipsi p K. & quoniam anguli ad
 puncta x, K inter se æquales sunt, uterq; enim ipsorum æqua-
 lis est angulo ad b: sunt autem & qui ad o æquales, quod secundum uerticem: erit triangulum
 x g o simile triangulo p o K. sed æqualis est g x ipsi p K. quare & x o ipsi o K, & g o ipsi o p, &
 tota g K toti x p est æqualis. ex quibus constat, si inter g x sumatur punctum r, & per r ducatur
 r s æquidistans g K; ipsam r s maiorem esse, quam g K: & propterea maiorem, quam x p. si uero
 inter puncta r x sumatur aliud punctum, ut t; & per ipsum ducatur t y æquidistans x p: minor
 erit t y, quam x p: & ob id minor, quam g K. præterea cum angulus x p K maior sit angulo a x p:
 æqualis autem o p K ipsi o g x: erit o g x angulus maior angulo g x o. ergo linea x o maior ipsa
 o g: & idcirco x o maior o p. Quod si quandoque contingat, ut altera ipsarum bifariam secetur,
 tunc alteram in partes inæquales secari necesse erit.



F E D. C O M M A N D I N V S.

A Et secetur piano per axem ad circulum b c recto.] Quomodo hoc faciendum sit, de-
 monstrat etiam Serenus in libro de sectione coni, propositione 14.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

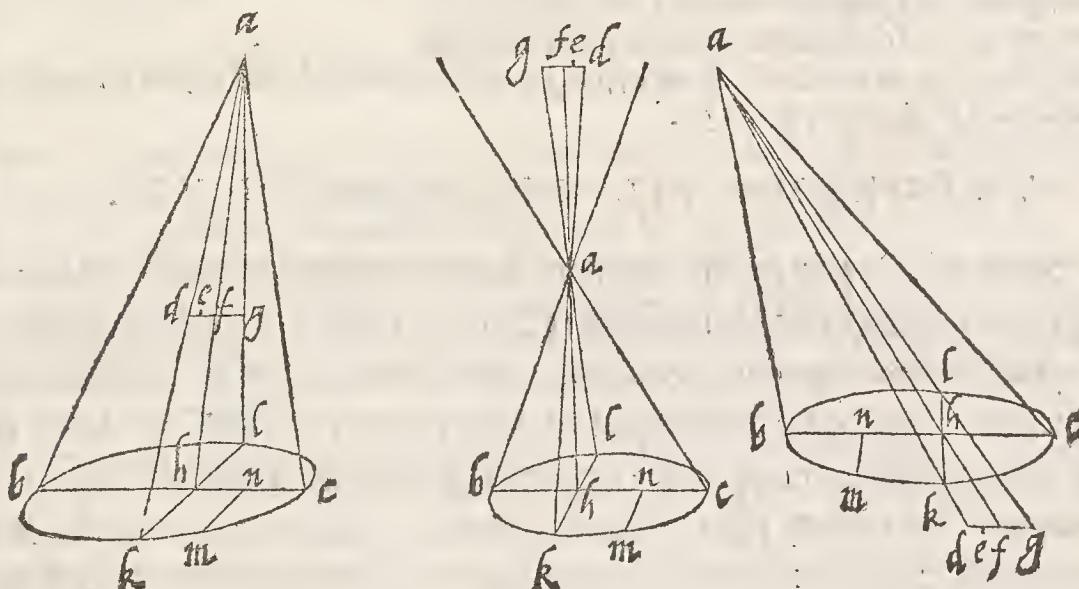
A Si conus piano per axem secetur: sumatur autem aliquod punctum
 in superficie coni, quod non sit in latere trianguli per axem: & ab ipso
 ducatur recta linea, æquidistans cuidam rectæ, qua perpendicularis est
 à cir-

à circumferentia circuli ad trianguli basim : triangulo per axem occurret , & ulterius producta usque ad alteram superficie partem , bifariam ab ipso triangulo secabitur .

Sit conus , cuius uertex a punctum : basis autem circulus b c : feceturq ; conus plano per axem , quod communem sectionem faciat triangulum a b c : & ab aliquo puncto eorum , quæ sunt in b c circumferentia , ut ab m ducatur m n perpendicularis ad ipsam b c rectam : sumatur quoque in superficie coni punctum d , per quod ipsi m n æquidistans ducatur d e . Dico lineam d e occurrere superficie trianguli a b c ; & ulterius productam in alteram partem coni , quousque ad eius superficiem pertineat , à trianguli a b c plano bifariam secari . iungatur a d , & producatur . occurret iam circumferentia circuli b c . occurrat in k , & à punto k ad b c rectam perpendicularis ducatur k h . æquidistans est igitur k h ipsi m n . quare & ipsi d e . ducatur ab a punto ad h linea a h . itaque quoniam in triangulo a h k , ipsi h k æquidistat d e , conueniet d e producta cum linea a h . est autem a h in plano trianguli a b c . ergo d e trianguli a b c plano occurret . occurrat in f : & producatur d e f in rectum , quousque ad superficiem coni pertineat in g . Dico d f ipsi f g æqualem esse . Quoniam enim puncta a g l sunt & in super-

1. huic

2. primi



ficie coni , & in plano per a h , a k , d g , k l ducto , quod quidem triangulum est , cum per uerticem conum fecet : erunt a g l in communi sectione superficie coni , & ipsius trianguli . ergo recta linea est , que per a g l puncta transit . At cum in triangulo a l k , ipsi k h l basi æquidistans ducta sit d g : & à punto a ducatur a f h : erit ut k h ad h l , ita d f ad f g . æqualis autem est k h ipsi h l , quod in circulo b c perpendicularis ad diametrum ducitur k l . ergo & d f ipsi f g æqualis erit .

3. huic

C

3. tertij

E V T O C I V S.

AANIMADVERTENDVM est , non frustra apponi in propositione , oportere rectam lineam ductam à punto superficie , æquidistantem esse eidam rectæ , que à circuli circumferentia perpendicularis est ad basim trianguli per axem . nisi enim hoc ita sit , fieri non potest , ut recta linea à triangulo bifariam secetur , quod quidem ex descripta figura manifeste appetat . Nam si linea m n , cui æquidistat d f g , ad ipsam b c non sit perpendicularis : neque k l bifariam secabitur . eadem enim ratione colligimus , ut k h ad h l , ita esse d f ad f g . ergo & d g in partes inaequales secabitur ad punctum f . potest autem illud idem , tum infra circulum , tum in superficie , quæ est ad uerticem , similiter demonstrari .

A P O L L O N I I P E R G A E I

F E D . C O M M A N D I N V S .

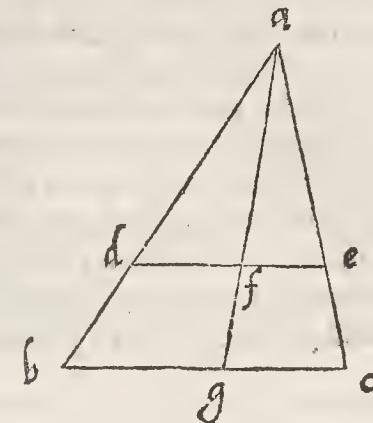
B Itaque quoniam in triangulo $a h k$, ipsi $h k$ æquidistat de, conueniet de producta cum linea $a h$.] Sequitur hoc ex secunda propositione perspectivæ Vitellionis. sunt enim $d e, h a$ in eodem plano, nam cum duas æquidistantes $k b, d e$ coniungat recta linea $k d$: erunt ex septima propositione undecimi elementorum tres lineæ $h k, k d, d e$ in eodem plano. Sed & in eodem plano sunt $k b, h a$ ex secunda propositione eiusdem libri. ergo $d e, h a$ in eodem plano sint necesse est.

C At cum in triangulo $a h k$ ipsi $k h l$ basi æquidistans dueta sit $d g$, & à punto a ducatur $a f h$; erit ut $k h$ ad $h l$, ita $d f$ ad $f g$.] Illud uero hoc lemmate demonstrabimus.

Sit triangulum $a b c$: & ducta de ipsi $b c$ æquidistantie, à punto a ad basim ducatur $a g$, quæ lineam de secet in f . Dico $d f$ ad $f e$ ita esse, ut $b g$ ad $g c$.

¶ primi Quoniam enim $b c, d e$ æquidistant inter se, erunt anguli $a b g, a d f$ æquales: itemq; æquales inter se anguli $a g b, a f d$. quare triangulum $a d f$ simile est triangulo $a b g$. eadem quoq; ratione triangulum $a f e$ ostendetur ipsi $a g c$ simile. ut igitur $b g$ ad $d f$, ita est $a g$ ad $a f$: & ut $a g$ ad $a f$, ita $g c$ ad $f e$. quare ut $b g$ ad $d f$, ita $g c$ ad $f e$. & permutoando ut $b g$ ad $g c$, ita $d f$ ad $f e$.

¶ sexti **¶ quinti**

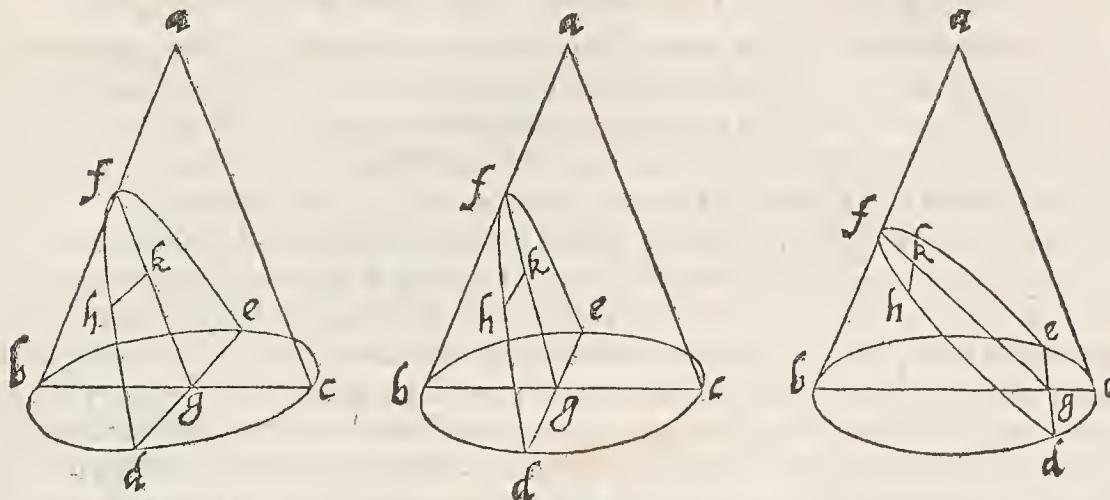


T H E O R E M A VII. P R O P O S I T I O VII.

Si conus plano per axem secetur: secetur autem & altero plano secante planum basis coni secundum rectam lineam, quæ sit perpendicularis, uel ad basim trianguli per axem, uel ad eam, quæ in directum ipsi constituitur: lineæ quæ à sectione in superficie coni à plato facta ducuntur æquidistantes ei, quæ est perpendicularis ad trianguli basim, in communem sectionem plani secantis, & trianguli per axem cadent: & ulterius productæ ad alteram sectionis partem, ab ea bifariam secabuntur. & siquidem rectus sit conus, linea, quæ est in basi, perpendicularis erit ad communem sectionem plani secantis, & trianguli per axem: si uero scalenus, non semper, nisi cum planum, quod per axem dicitur, ad basim coni rectum fuerit.

e. huius Sit conus, cuius uertex punctum a ; basis $b c$ circulus: & secetur plano per axem, quod sectionem faciat triangulum $a b c$. secetur autem, & altero plano secante planum, in quo est circulus $b c$ secundum $d e$ rectam lineam, uel perpendiculari ad $b c$, uel ad eam, quæ in directum ipsi constituitur: & faciat sectionem in superficie coni, lineam $d f e$: communis autem sectionis plani secantis, & trianguli $a b c$ sit $f g$: & sumatur in sectione $d f e$ punctum h , à quo linea $h k$ ipsi $d e$ æquidistans ducatur. Dico $h k$ lineæ $f g$ occurrere, & ulterius productam ad alteram partem sectionis $d f e$, à linea $f g$ bifariam secari. quoniam enim conus, cuius uertex a punctum, & basis circulus $b c$, plato per axem secatur, quod sectionem facit $a b c$ triangulum; sumitur autem in superficie punctum h , quod non est in latere trianguli $a b c$; estq; $d g$ ad $b c$ perpendicularis: ducta per h linea $h k$, ipsi $d g$ æquidistans, triangulo $a b c$ occurret; & ulterius producta ad alteram partem superficie à triangulo bifariam secabitur. & quoniam, quæ per h dicitur æquidistans ipsi $d e$, occurrit triangulo $a b c$; atque est in piano sectionis $d f e$: in communem sectionem plani secantis, & trianguli $a b c$ cadet. sed linea $f g$ est communis

nisi se^tio planorum. ergo per h ducta ipsi d æquidistans cadit in lineam f g; & ulterioris producta ad alteram sectionis partem ab ea bifariam secatur. itaque uel conus est rectus, uel triangulum a b c, quod per axem transit, rectum est ad b c circulum, uel



neutrum horum contingit. sit primum conus rectus: tunc & a b c triangulum ad circulum b c rectum erit. & quoniam planum a b c rectum est ad planum b c: & ad communem ipsorum sectionem, uidelicet ad lineam b c in ipso b c piano perpendicularis ducta est d e: erit d e & ad triangulum a b c perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quæ in triangulo a b c existentes ipsam contingunt. quare & ad lineam f g. sed non sit conus rectus. si igitur triangulum per axem rectum est ad circulum b c; similiter ostendamus lineam d e ad f g perpendiculararem esse. quod si triangulum per axem a b c non sit rectum ad circulum b c, non erit ipsa d e ad f g perpendicularis. sit enim, si fieri potest: est autem & perpendicularis ad b c. ergo d e ad utramque lineam b c, f g perpendicularis erit: & idcirco ad planū, quod per lineas b c, f g ducitur. sed planum per b c, f g, est a b c triangulum. linea igitur d e ad triangulum a b c est perpendicularis. quare & omnia, quæ per ipsam transeunt, plana ad a b c triangulum recta sunt. planum vero, in quo est circulus b c per lineam d e transit. ergo b c circulus rectus est ad triangulum a b c: ac propterea triangulum a b c ad b c circulum rectum erit. quod non poterat. non igitur d e ad ipsam f g est perpendicularis.

4. & 3. diff.
vndecimā

4. undeci
mī.
18. undeci
mī

10. diffini
huius

Ex quibus constat lineam f g diametrum esse sectionis d f e, cum lineas omnes, quæ in ipsa ducuntur, uni cuiquam æquidistantes bifariam secet. constat præterea fieri posse; ut lineæ æquidistantes à diametro f g bifariam quidem, non autem ad rectos angulos secentur.

E V T O C I V S.

SEPTIMVM. theorema quatuor casus habet; uel enim f g non occurrit lineæ a c, uel tribus modis occurrit, aut extra circulum, aut intra, aut in ipso c puncto.

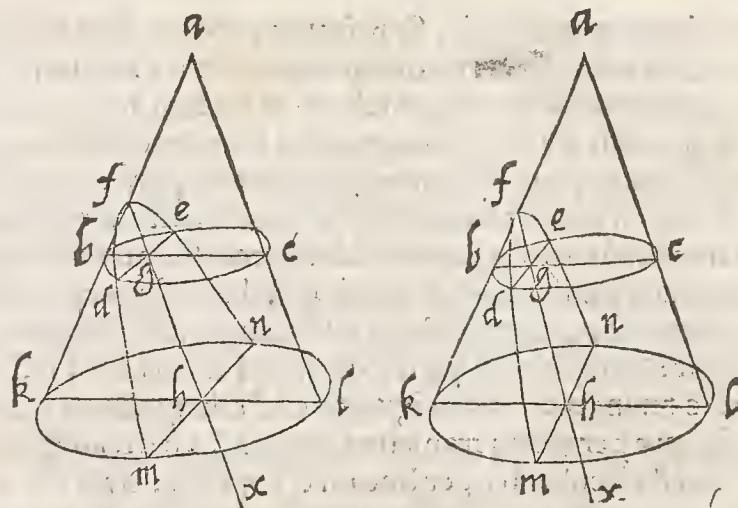
THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si conus plano fecetur per axem: & fecetur altero piano secante basim coni secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis; diameter autem sectionis factæ in superficie; uel æqui

APOLLONII PERGAEI

distet uni laterum trianguli, uel cum ipso extra coni uerticē conueniat : & producantur in infinitum tum superficies coni, tum planum secans : sectio quoque ipsa in infinitum augebitur : & ex diametro sectionis ad uerticem cuilibet lineæ datæ æqualem abscindet linea, quæ quidem à coni sectione ei, quæ est in basi, æquidistans ducta fuerit.

SIT conus, cuius uerterex a punctum ; basis circulus b c : & secetur plano per axē, quod sectionem faciat, triangulum a b c : secetur etiam altero plano secante b c circumulum secundum rectam lineam d e perpendicularē ad ipsam b c : & faciat sectionem in superficie, lineam d f : diameter autem sectionis d f est f g, quæ uel ipsi a c æquidistet, uel producta extra punctum a cum ipsa conueniat. Dico sectionem d f e augeri in infinitum, si & coni superficies, & secans planum in infinitum producantur. His enim productis, simul producentur & lineæ a b, a c, f g. & quoniam f g uel æquidistans est ipsi a c, uel producta extra punctum a, cum ipsa conuenit ; lineæ f g, a c ad partes g c productæ nunquam conuenient inter se. producantur ergo : sumaturq; in linea f g quodlibet punctum h ; & per h ducatur k l i p s i b c æquidistans : ipsi uero d e æquidistans ducatur m h n. quare planum, quod per k l, m n transit, æquidistans est plano per b c, d e : & idcirco circulus est k l m n planum. Sunt autem puncta d e m n & in plano secante, & in superficie coni. ergo & in ipsa communi sectione erunt : sectio igitur d f e aucta est usque ad puncta m n. ex quibus appetet si tum coni superficies, tum secans planum producantur ad k l m n circumulum, & sectionem ipsam d f e usque ad m n puncta augeri. eadem ratione demonstrabitur sectione m d f e n augeri in infinitum, si & superficies coni, & planum secans in infinitum producantur. perspicuum igitur est cuilibet datæ lineæ æqualem absindere lineam quan dam ex ipsa f h ad partes f. si enim datæ lineæ æqualem ponamus f x ; & per x ipsi d e æquidistantem ducamus ; conueniet ea cum sectione, quemadmodum & quæ per h demonstrata est cum eadem ad puncta m n conuenire. quare poterit linea quædam duci æquidistans ipsi d e, quæ cum sectione conueniat, & ex ipsa f g ad partes f lineæ datæ æqualem lineam absindat.

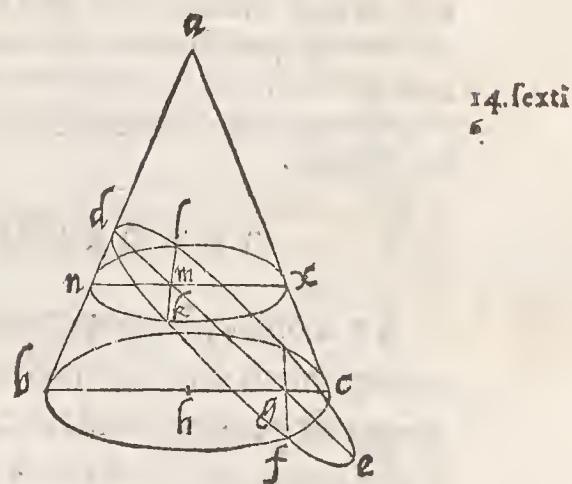
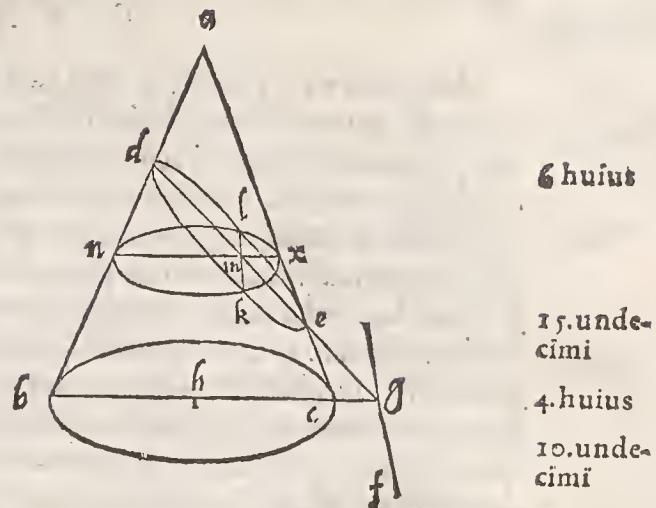


THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si conus plano secetur conueniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque basi æquidistet, neque subcontrarie ponatur : sectio circulus non erit.

SIT conus, cuius uerterex a punctum, basis circulus b c : & secetur plano aliquo, neque basi æquidistante, neque subcontrarie posito, quod sectionem faciat in superficie lineam d k e. Dico d k e non esse circulum. Sit enim, si fieri potest : occurratq; planum secans ipsi basi ; ita ut communis planorum sectio sit recta linea f g : centrum autem circuli b c sit h ; & ab h ad f g perpendicularis ducatur h g : deinde per h g, & axem producatur planum, quod in conica superficie sectiones faciat b a, a c rectas lineas. Quoniam

niā igitur puncta d e g sunt & in plano, quod per d k e transit, & in eo, quod per a b c, necesse fari in cōmuni ipsorum sectione erunt. quare recta linea est d e g. sumatur in linea d k e punctum aliquod k: & per k lineam f g æquidistantem ducatur k m l: erit k m ipsi in l æqualis. quare d e diameter est circuli d k e l. ducatur deinde per m linea n m x ipsi b c æquidistantē: est autem & k l æquidistantē f g. ergo planum quod per n x, k m ducitur, æquidistantē est plano per b c, f g, hoc est ipsi basi: proptereaq; sectio n k x l circulus erit. & quoniam f g perpendicularis est ad b c g, sequitur & k m ad n x perpendicularē esse. quare rectangle n m x æquale est quadrato k m. sed & rectangle d m e æquale est k m quadrate, cum linea d k e l circulus ponatur, cuius diameter d e. rectangle igitur n m x æquale est rectangle d m e: & idcirco ut n m ad m d, ita e m ad m x. quare d m n triangulum simile est triangulo x m e: & angulus d n m æqualis m e x angulo. Sed d n m angulus angulo a b c est æqualis; æquidistant enim n x ipsi b c. ergo & angulus a b c æqualis erit angulo m e x. Subcontraria igitur sectio est; quod non ponebatur. ex quibus manifeste constat lineam d k e circulum non esse.

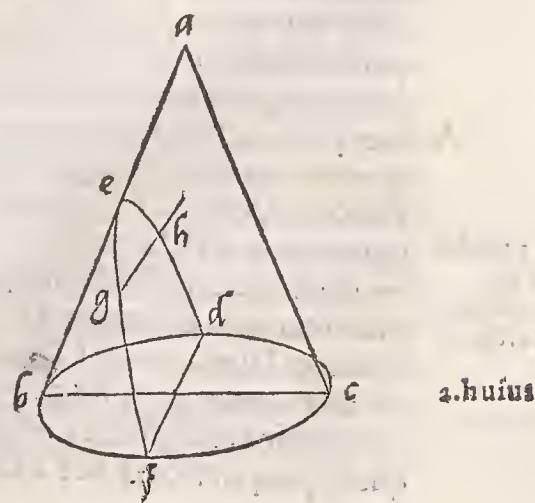


THEOREMA X. PROPOSITIO X.

S I in coni sectione duo puncta sumantur, recta linea, quæ eiusmodi puncta coniungit, intra sectionem cadet; & quæ in directum ipsi constituitur, cadet extra.

S I T conus, cuius uertex punctum a; basis b c circulus: secetur autem & faciat sectionem triangulum a b c: secetur autem & altero plano, quod in superficie coni sectionem faciat d e f lineam. & in ipsa d e f duo puncta sumantur, quæ sint g h. Dico rectam lineam, quæ g h puncta coniungit, intra sectionem d e f cadere: & quæ in directum ipsi constituitur, extra. Quoniam enim conus, cuius uertex a punctum, & basis circulus b c, piano secatur per axem, & insuperficie ipsius puncta quæpiam sumuntur g h, quæ non sunt in latere trianguli per axem: linea, quæ à punto g, ad h ducitur, non pertinebit ad a. ergo recta linea coniungens puncta g h intra conum, hoc est intra coni sectionem d e f cadet: & quæ in directum ipsi constituitur, cadet extra.

D



EVTOCIUS

ANIMADVERTENDVM est decem hæc theorematia aptissime cohærentia inter se se, & conti-
nuata esse. Primum enim ostendit rectas lineas, quæ in superficie coni ad uerticem pertinent, in ca-
dem permanere. Secundum contra ostendit. Tertium explicat coni sectionem, quæ per uerticem effi-
citur. Quartum sectionem basi æquidistantem. Quintum uero subcontrariam. Sextum est tanquam
lemma ad septimum, in quo ostenditur oportere comunem sectionem plani secantis, & circuli, qui
est basis coni, ad eius diametrum perpendicularē esse: atque hoc ita habente, lineas omnes, quæ ip-
si æquidistantes ducuntur, à triangulo bifariam secari. Septimum tres alias sectiones, earumq; dia-
metrum ostendit: & lineas, quæ ad ipsam diametrum ordinatim applicantur ei, quæ in basi æquidi-
stantes esse. In octavo demonstrat, quod nos in principio diximus, uidelicet parabolē, & hyperbo-
lē ex eorum numero esse, quæ in infinitum augentur. In nono ellipsem, quæ in se ipsam uergit tan-
quam circulus, quod planum secans cum utroque latere trianguli conueniat, circum non esse: sub-
contraria etenim, & æquidistans sectio circulum facit. Sed & illud scire oportet, diameter sectionis
in parabola quidem unum dumtaxat trianguli latus secare, & ipsam basim: in hyperbola se-
care, & latus, & lineam, quæ reliquo lateri ad partes uerticis productō in rectum constituitur: in el-
lipsi uero, & utrumque latus, & basim secare. Posset fortasse quispiam arbitrari decimum theore-
ma idem esse, quod secundum: sed non ita res habet. illic enim in omni superficie duo quævis pun-
tū asserit; hic in ea tantum linea, quæ à secante plano efficitur. At in tribus, quæ deinceps sequun-
tur, theorematibus unamquaque sectionem diligentius expendit: & principes earum proprie-
ties declarat.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

S I conus plano per axem secetur: secetur autem & altero piano se-
cante basim coni secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per-
axem sit perpendicularis: & sit diameter sectionis uni laterum triangu-
li per axem æquidistans: recta linea, quæ à sectione coni ducitur æqui-
distans communi sectioni plani secantis, & basis coni, usque ad sectionis
diametrum; poterit spatium æquale contento linea, quæ ex diametro
abscissa inter ipsam & uerticē sectionis interiicitur, & alia quadam, quæ
ad lineam inter coni angulum, & uerticem, sectionis interiectam, eam
proportionem habeat, quam quadratum basis trianguli per axem, ad id
quod reliquis duobus trianguli lateribus continetur. dicatur autem hu-
iusmodi sectio parbole.

SIT conus, cuius uerterex punctum a; basis b c circulus: seceturq; piano per axem,
quod sectionem faciat triangulum a b c: & secetur altero piano secante basim coni se-
cundum rectam lineam d e, quæ ad b c sit perpendicularis; & faciat sectionem in su-
perficie coni d f e lineam: diameter autem sectionis f g æquidistans sit uni laterum
trianguli per axem, uidelicet ipsi a c; atque à punto f linea f g ad rectos angulos du-
catur f h: & fiat ut quadratum b c ad rectangulum b a c, ita linea h f ad f a. sumatur
præterea in sectione quodlibet punctum k: & per k ducatur k l ipsi d e æquidistans.
Dico quadratum k l rectangulo h f l æquale esse. Ducatur enim per l ipsi b c æquidi-
stans m n: & est k l æquidistans ipsi d e. ergo planum, quod transit per k l m n piano per
b c d e, hoc est ipsi basi coni æquidistat. ideoq; planum per k l m n circulus est, cuius
diameter m n. est autem k l ad m n perpendicularis, quod & d e ad b c. rectangulum
igitur m l n æquale est k l quadrato. itaque quoniam linea h f ad f a est ut quadratum
b c ad rectangulum b a c: quadratum autem b c ad b a rectangulum compositam
proportionem habet ex proportione, quam b c ad c a, & ex c a, quam c b habet ad b a.
quare proportio h f ad f a componitur ex proportione b c ad c a, & c b ad b a. Ut au-
tem

15. unde-
cimi
4. huius
10. unde-

etiam 2

tem b cad ca, ita m n ad n a, hoc est m l ad l f: & ut c b ad b a, ita n m ad m a, hoc est l m ad m f, & reliqua n l ad f a. proportio igitur h f ad f a componitur ex proportione m l ad l f, & n l ad f a. sed proportio composita ex proportione m l ad l f, & n l ad f a est ea, quam habet m l in rectangulum ad rectangulum l f a. ergo ut h f ad f a, ita rectangulum m l n ad l f a rectangulum. ut autem h f ad f a, sumpta f l communi altitudine, ita h f l rectangulum ad rectangulum l f a. Ut igitur rectangulum m l n ad ipsum l f a, ita rectangulum h f l ad l f a: & idcirco æquale est rectangulum m l n rectangulo h f l. sed rectangulum m l n æquale est quadrato k l. ergo quadratum k l rectangulo h f l æquale erit. Vocetur autem huiusmodi sectio parabole; & linea h f, iuxta quam possunt, quæ ad f g diametrum ordinatim applicantur: quæ quidem etiam recta appellabitur.

E V T O C I V S.

E T fiat ut quadratum b c ad rectangulum b a c, ita linea h f ad lineam f a.] A
Manifestum est, quod dicitur, præterquam quòd aliqua adhuc declaratione indiget. Sit rectangulo b a c æquale rectangulum o p r: quadrato autem b c æquale id, quod ad lineam p r adiacens, latitudinem habet p s: & fiat ut o p ad p s, ita a f ad f b. ergo factum iam erit, quod quærebamus. Quoniam enim ut o p ad p s, ita a f ad f b; erit & conuertendo h f ad f a, ut s p ad p o: ut autem s p ad p o, ita rectangulum s r ad ipsum r o, hoc est b c quadratum ad rectangulum b a c. Hoc autem & ad duo quæ sequuntur theorematum utile erit.

Quadratum autem b c ad b a c rectangulum compositam proportionem habet &c.] Ostensum enim est in sexto libro elementorum Euclidis, theoremate uigesimotertio, æquiangula parallelogramma inter se proportionem habere ex lateribus compositam. Sed quoniam interpretes inductione magis, quam necessaria argumtatione utuntur; uisum est nobis illud ipsum inuestigare: quod tametsi scripsimus in commentarijs, in quartum theorema secundi libri Archimedis de sphera & cylindro, & in primum magnæ constructionis Ptolemai, nihilominus tamen & hoc loco non in eppe repetetur; propterea quòd fortasse non omnes, qui hæc legent, in illos libros inciderunt: tum etiam, quòd uniuersa ferè conicorum tractatio eum argumentandi modum usurpat. Proportio ex proportionibus componi dicitur, quando proportionum quantitates inter se multiplicatæ aliquam producunt. Per quantitatem intelligendo numerum, à quo proportio ipsa denominatur. in multiplicibus quidem quantitas erit numerus integer; in reliquis vero habitudinibus necesse est quantitatem numerum esse, & partem, seu partes, nisi forte quissimam uelit etiam αριτούς, uidelicet quæ exprimi non possunt, habitudines esse, quales sunt magnitudinum irrationalium. Itaque in omnibus habitudinibus ipsa quantitas multiplicata in consequentem terminum producit antecedentem. Sit igitur proportio a ad b: & sumpto termino quolibet intermedio c, sit proportionis a c quantitas d: proportionis autem c b quantitas sit e: & d multiplicans e producat f. Dico f proportionis a b quantitatem esse: hoc est si f multiplicet b produci ipsum a. itaque multiplicet f ipsum b, & producat g. Quoniam igitur d ipsum quidem e multiplicans producit f; multiplicans autem c ipsum a producit: erit f ad a, ut e ad c. Rursus cum b multiplicans e faciat

19. quinti

23. sexti

2. sexti

9. quinti

A

1. sexti

B

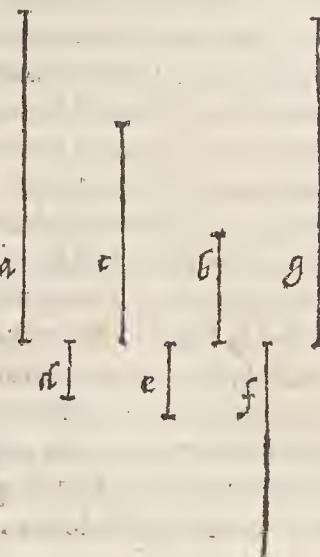


D 2

17. septem
mi.

A P O L L O N I I P E R G A E I

¶. quint. & multiplicans f faciat g; erit ut e ad f, ita c ad g: & permittando ut e ad c, ita f ad g. sed ut e ad c, ita erat f ad a, ergo g ipsi a est aequalis: & idcirco f multiplicans b producit a, proportionis igitur ab, f quantitas necessario erit: Non perturbentur autem quā in hac inciderint, quod illud ex arithmeticis demonstretur: antiqui enim huiusmodi demonstrationibus saepe uti consueverunt; que tamen mathematicae potius sunt, quam arithmeticæ propter analogias. adde quod quæ situm arithmeticum est; nam proportiones, proportionum quantitates, & multiplicationes primo numeris, secundo loco per numeros & magnitudinibus insunt, ex illius sententia, qui ita scripsit, ταῦτα γὰρ τὰ μαθηματικὰ δοκοῦντι εἴμεν αὐθελφά. hoc est, haec enim mathematicæ disciplinae germanæ esse uidentur.



THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

Sit conus plano per axem secetur; secetur autem & altero piano secante basim coni secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis; & sectionis diameter producta cum uno latere trianguli per axem, extra uerticem coni conueniat: recta linea, quæ à sectione ducitur æquidistans communi sectioni plani secantis, & basis coni usque ad sectionis diametrum, poterit spatium adiacens lineæ, ad quam ea, quæ in directum constituitur diametro sectionis, subtenditurq; angulo extra triangulum, eandem proportionem habet; quam quadratum lineæ, quæ diametro æquidistans à uertice sectionis usque ad basim trianguli ducitur, ad rectangulum basis partibus, quæ ab ea fiunt, contentum: latitudinem habens lineam, quæ ex diametro absinditur, inter ipsam & uerticem sectionis interiectam; excedensq; figura simili, & similiter posita ei, quæ continetur linea angulo extra triangulum subtensa, & ea, iuxta quam possunt quæ ad diametrum applicantur. uocetur autem huiusmodi sectio hyperbole.

Sit conus, cuius uertex a punctum, basis circulus b c: & secetur piano per axem, quod sectionem faciat triangulum a b c: secetur autem & altero piano secante basim coni, secundum rectam lineam d e ad b c basim trianguli a b c perpendiculariter faciatq; sectionem in superficie coni lineam d f e: & sectionis diameter f g producta cum ipso a c latere trianguli a b c extra coni uerticem conueniat in punto h: deinde per a ducatur linea a k diametro æquidistans, quæ secet b c: & ab f ducatur f l ad rectos angulos ipsi f g; fiatq; ut quadratum k a ad rectangulum b k c, ita h f linea ad lineam f l. Sumatur autem in sectione quo clibet punctum m; & per m ducatur m n æquidistans d e; & per n ipsi f l æquidistans ducatur n o x. postremo iuncta h l, & ad x producta, per lx ipsi f n æquidistantes ducantur l o, x p. Dico lineam m n posse spatium

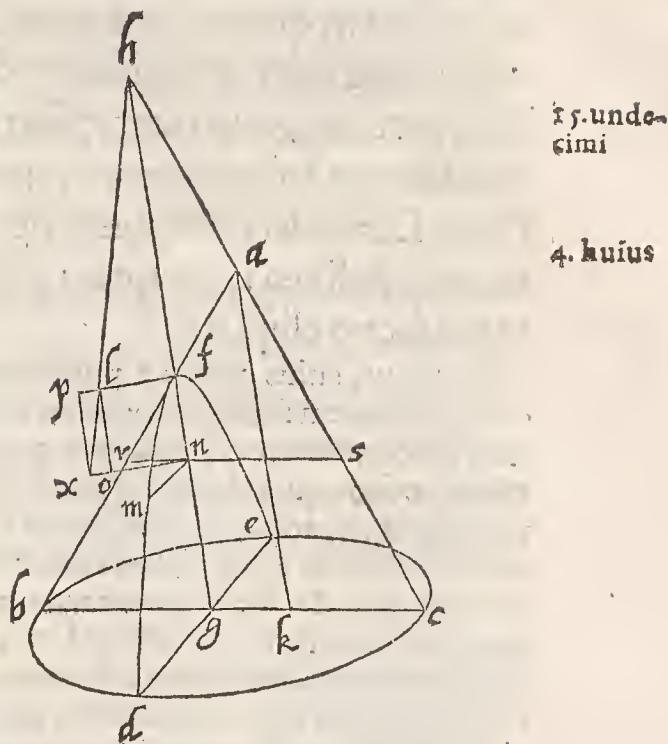
spatium fx, quod quidem adiacet linea fl; latitudinem habens fn, exceditq; figura lx simili ei, quæ h fl continetur. Duçatur enim per n linea r ns æquidistans bc: est autem & mn ipsi de æquidistans. ergo planum, quod transit per mn rs æquidistat piano per bc de, hoc est basi coni. Si igitur planum per mn rs producatur, sectio circulus erit, cuius diameter rn: atque est ad ipsam perpendicularis mn, ergo rectangulum rn s æquale est mn quadrato. itaque quoniam ut ak quadratum ad rectangulum bkc, ita est hf ad fl: proportio autem quadrati ak ad rectangulum bkc componitur ex proportione, quam habet ak ad kc, & ex ea, quam ak habet ad kb: & proportio hf ad fl composita erit ex proportione, ak ad kc, & proportione ak ad kb. sed ut ak ad kc, ita hg ad gc, hoc est hn ad ns: & ut ak ad kb, ita fg ad gb, hoc est fn ad nr. proportio igitur hf ad fl componitur ex proportione hn ad ns, & fn, ad nr. at proportione composita ex proportione hn ad ns, & fn ad nr; est ea, quam hn f rectangulum habet ad rectangulum snr. ergo ut rectangulum hn f ad snr, ita hf ad fl, hoc est hn ad nx. ut autem hn ad nx, sumpta fn communi altitudine, ita hn f rectangulum ad rectangulum fn x. quare ut rectangulum hn f ad rectangulum snr, ita rectangulum hn f ad ipsum fn x: rectangulum igitur snr æquale est rectangulo xnf. Sed quadratum mn ostensum est æquale rectangulo snr. ergo quadratum mn rectangulo xnf æquale erit: rectangulum autem xnf est parallelogrammum xf. linea igitur mn potest spatium xf, quod lineæ fl adiacet; latitudinem habens fn, excedensq; figura lx simili ei, quæ h fl continetur. dicatur autem huiusmodi sectio hyperbole: & linea lf, iuxta quam possunt, quæ ad fg ordinatim applicantur. quæ quidem etiam recta appellabitur, transuerla uero hf.

F E D . C O M M A N D I N V S.

Linea igitur mn potest spacium xf, quod lineæ fl adiacet, latitudinem habens fn, excedensq; figura lx simili ei, quæ h fl continetur] *Græca uerba sic habent, ἵπρα μν δύναται τὸ ξ, ὅπαρχεται πάρχεται πλάτος τὸν λ, πλάτος τὸν χοντὸν ζ, τὸν περβάλλοντὸν ξ, ὅμοιωδύντι τὸν πότων θλ.* ex quibus satis perspicue apparere potest, unde dicta sit sectio hyperbole.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

Si conus plano per axem secetur, & secetur altero piano conueniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque basi coni æquidistet, neque subcontrarie ponatur: planum autem, in quo est basis coni, & secans planum conuenient secundum rectam lineam, quæ sit perpendicularis uel ad basim trianguli per axem, uel ad eam, quæ in directum ipsi constituitur: recta linea, quæ à sectione coni ducitur æquidistans communi sectioni planorum usque ad diametrum sectionis potest.

15. undē
cimi

4. huius

23. sexti

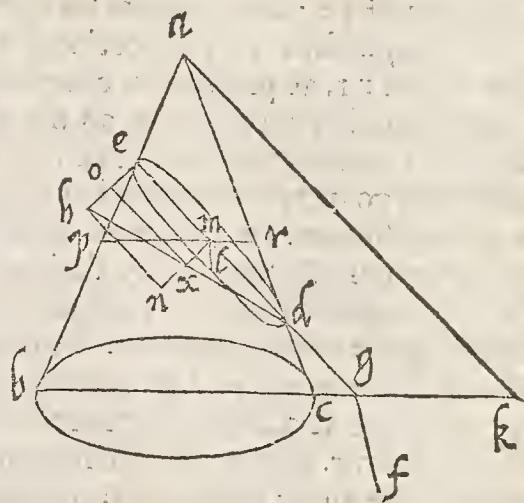
1. sexti

2. quinti

A P O L L O N I I P E R G A E I

rit spatium adiacens linea α , ad quam sectionis diameter eam proportionem habeat, quam quadratum linea α diametro æquidistantis à uertice coni usque ad trianguli basim ductæ, habet ad rectangulum contentum basis partibus, quæ inter ipsam & rectas trianguli lineas interiiciuntur; latitudinem habens lineam, quæ ex diametro ab ipsa absinditur ad uerticem sectionis, deficiensq; figura simili, & similiter posita ei, quæ diametro, & linea iuxta quam possunt, continetur. dicatur autem huiusmodi sectio ellipsis.

Sit conus, cuius uerterex a punctum; basis circulas b c: & secetur plano per axem, quod sectionem faciat triangulum a b c: secetur autem & altero plano, conueniente cum utroque latere trianguli per axem, neque basi coni æquidstante, neque subcontrarie posito, quod faciat sectionem in superficie coni lineam d e: & communis sectio plani secantis, atque eius, in quo est basis coni, sit fg perpendicularis ad b c: diameter autem sectionis e d: & ab e ducatur e h ad e d perpendicularis: perq: a ducta a k ipsi e d æquidstante, fiat ut quadratum a k ad rectangulum b k c, ita d e ad e h: sumatur præterea in sectione punctum l: & per l ipsi fg æquidistans ducatur l m. Dico l m posse spatium, quod linea α e h adiacet, latitudinem habens e m, deficiensq; figura simili ei, quæ d e h continetur. iungatur enim d h: perq: m ducatur m x n æquidistans e h: & per h x puncta ipsi e m æquidistantes ducantur h n, x o: postremo per m ducatur p m r æquidistans b c. itaque quoniam p r æquidistat b c; & l m ipsi f g; erit planum ductum per l m p r æquidistans piano per fg b c ducto, hoc est basi coni. si igitur planum per l m p r producatur, fiet sectio circulus, cuius diameter p r. & est l m ad ipsam perpendicularis. ergo rectangulum p m r æquale est l m quadrato. Quod cum sit, ut quadratum a k ad rectangulum b k c, ita d e ad e h; & proportio quadrati a k ad rectangulum b k c componatur ex proportione, quam habet a k ad k b, & ex ea, quam a k habet ad k c: ut autem a k ad k b, ita e g ad g b, hoc est e m ad m p: & ut a k ad k c, ita d g ad g c, hoc est d m ad m r: erit proportio de ad e h composita ex proportione e m ad m p, & ex proportione d m ad m r. sed proportio composita ex proportione e m ad m p, & d m ad m r est ea, quam e m d rectangulum habet ad rectangulum p m r. Quare ut rectangulum e m d ad ipsum p m r, ita d e ad e h; uidelicet d m ad m x. ut autem d m ad m x, sumpta m e communi altitudine, ita rectangulum d m e ad rectangulum x m e. ergo ut d m e rectangulum ad rectangulum p m r, ita erit d m e rectangulum ad ipsum x m e. æquale igitur est rectangulum p m r rectangulo x m e. sed rectangulum p m r demonstratum est æquale quadrato l m. quare & ipsum x m e quadrato l m æquale erit. linea igitur l m potest spatium m o, quod quidem linea α e h adiacet, latitudinem habens e m, deficiensq; figura o n, simili ei, quæ d e h continetur. Vocetur autem huiusmodi sectio ellipsis: & linea e h, iuxta quam possunt, quæ ad diametrum d e ordinatim applicantur; quæ quidem & recta uocabitur; e d uero transuersa.



E V T O C I V S.

SCIRE oportet hoc theorema tres habere descriptiones, ut sapientius dictum est in ellipsi: uel enim de conuenit cum latere ac supra c punctum, uel in ipso c, uel infra cum eo productio conuenit.

FED.

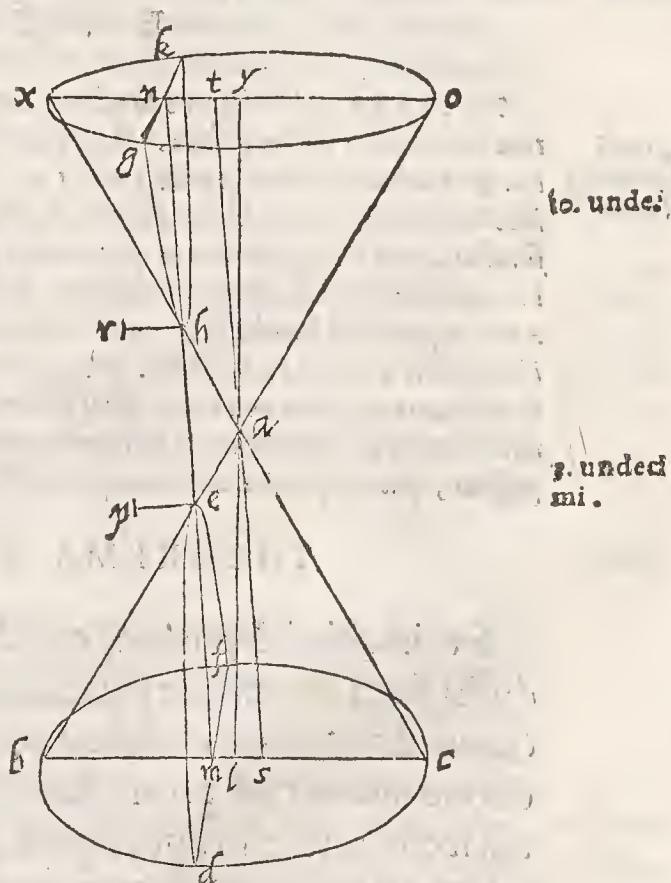
F E D . C O M M A N D I N V S .

LINEA igitur l m potest spaciū in o, quod quidem lineæ ch adiacet, latitudinem habens c m, deficiensq; figura o n, simili ei, quæ de h continetur] Græca uerba sunt hæc.
ι λα μ αρα διναται τα μο, ο παρακειται παρα την θε πλατος ιχον την ε μ, ελεπτον ειδει τω ο ν
εμπισσοντι τω υπο δε θ. ex quibus manifeste constat, cur ea sectio ellipsis appellata sit.

T H E O R E M A X I V I I I . P R O P O S I T I O X I V I I .

Si superficies, quæ ad uerticem sunt, plāno non per uerticem secēntur; erit in utraque superficerum sectio, quæ uocatur hyperbole: & duarum sectionum eadem erit diameter: lineæ uero, iuxta quas possunt applicatæ ad diametrum, æquidistantes ei, quæ est in basi coni, inter se æquales erunt: & figuræ transuersum latus utrisque commune; quod scilicet inter sectionum uertices interiicitur. uocentur autem huiusmodi sectiones oppositæ.

Sint ad uerticem superficies, quarum uertex a punctum: & secantur plāno non per uerticem, quod sectiones faciat in superficie lineas d e f, g h k. Dico utramque sectionum d e f, g h k hyperbolēn esse. sit enī circulus b d c f, in quo fertur recta linea superficie describens; ducaturq; in superficie, quæ est ad uerticem, planum ipsi æquidistans x g o k: & communes sectiones ipsarum sectionum d e f, g h k, & circulorum sint f d g k, quæ & æquidistantes erunt: axis autem conicæ superficie fit recta linea l a y: circulorum centra l y: & ab l ad lineam f d perpendicularis ducta producatur ad b c puncta: perq; b c, & axem planum ducatur, quod sectiones faciat in circulis qui dem rectas lineas x o, b c æquidistantes; in superficie uero ipsas b a o, c a x: erit x o ad g k perpendicularis: quoniam & b c perpendicularis est ad f d; & utraque est æquidistans. Quòd cum planum per axem ductum sectionibus occurrat ad puncta m n, quæ sunt intra lineas, planè constat ipsum etiā lineas secare in h e. ergo puncta m e h n erunt & in plāno per axem, & in eo, in quo sunt lineæ ipsæ; & propterea m e h n recta linea erit. constat etiam puncta x h a c in eadem recta esse, itemq; b e a o; quòd sint in superficie conica, & in plāno per axem. Ducantur ergo à punctis h e ipsi h e ad rectos angulos lineæ h r, e p: perq; a lineæ m e h n æquidistans ducatur s a t; & fiat ut quadratum a s ad rectangulum b s c, sic h e ad e p: & ut quadratum a t ad rectangulum o t x, sic e h ad h r. itaq; quoniam conus, cuius uertex a, basis b c circulus, secatur plāno per axem, quod sectionem facit triangulum a b c: secatur autem & altero plāno, secante basim coni secundum rectam lineam d m f, ad b c perpendiculararem, quod sectionem facit in superficie d e f lineam: diameterq; m e producta acm uno latere trianguli per axem extra coni uerticem conuenit: & per punctum a diametro sectionis e m æquidistans ducitur a s: ab e uero ducitur e p, ad rectos angulos ipsi e m: atque est ut quadratum a s ad



12. huius

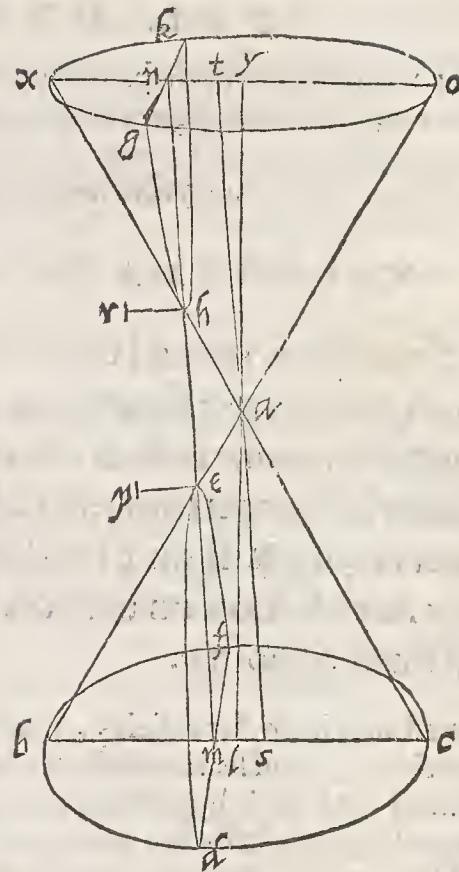
4. sexti.

23.

11. quin-
ti.

etiam ut quadratum at ad rectangulum bsc.

rectangulum bsc, ita he ad ep: erit ipsa
d e f f e c t i o h y p e r b o l e : & e p r e c t a l i n e a ,
iuxta quam possunt, quæ ad e m o r d i n a-
t i m a p p l i c a n t u r ? t r a n s f u e r s u m u e r o f i g u r æ
l a t u s h e . E a d e r a t i o n e & g h k h y p e r-
b o l e e r i t , c u i u s d i a m e t e r h n : r e c t a l i n e a
h r , iuxta quam possunt ordinatim ad h n
a p p l i c a t æ : & h e t r a n s f u e r s u m f i g u r æ l a t u s .
D i c o p r æ t e r e a h r i p s i e p æ q u a l e m e s s e .
Q u o n i a m e n i m æ q u i d i s t a n t e s s u n t b c , x o ,
u t a s a d s c , i t a e r i t a t a d t x : & u t a s a d
s b , i t a a t a d t o . s e d p r o p o r t i o a s a d s c
u n a c u m p r o p o r t i o n e a s a d s b , e s t e a
q u a m h a b e t a s q u a d r a t u m a d r e c t a n g u-
l u m b s c : & p r o p o r t i o a t a d t x u n a c u m
p r o p o r t i o n e a t a d t o , e s t q u a m h a b e t
q u a d r a t u m a t a d r e c t a n g u l u m x t o . e r g o
u t q u a d r a t u m a s a d r e c t a n g u l u m b s c , i t a
q u a d r a t u m a t a d r e c t a n g u l u m x t o . u t
a u t e m q u a d r a t u m a s a d b s c r e c t a n g u-
l u m , i t a h e a d e p : & u t q u a d r a t u m a t a d
r e c t a n g u l u m x t o , i t a h e a d h r . e r g o u t
h e a d e p , i t a e h a d h r . æ q u a l i s i g i t u r e s t
e p i p s i h r .



E V T O C I V S.

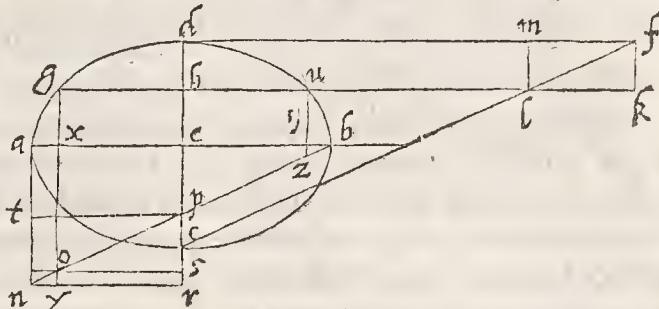
P O T E R A T etiam hoc modo ostendi; ut quadratum a s ad rectangulum b s c, ita esse quadra-
4. sexti t u m a t a d x t o r e c t a n g u l u m . Q u o n i a m e n i m æ q u i d i s t a n t b c , x o ; e r i t u t c s a d s a , i t a x t a d
l e m . i n 21 t a . & e a d e m r a t i o n e u t a s a d s b , i t a a t a d t b . e r g o e x æ q u a l i , u t c s a d s b , i t a x t a d t o . &
d e c i m u i d e o u t q u a d r a t u m c s a d r e c t a n g u l u m c s b , i t a q u a d r a t u m x t a d r e c t a n g u l u m x t o . s e d p r o p t e r
s i m i l i t u d i n e m t r i a n g u l o r u m u t q u a d r a t u m a s a d q u a d r a t u m s c , i t a q u a d r a t u m a t a d q u a d r a t u m
t x . q u a r e e x æ q u a l i u t a s q u a d r a t u m a d r e c t a n g u l u m b s c , i t a q u a d r a t u m a t a d r e c t a n g u l u m
x t o . a t q u e e s t u t q u a d r a t u m a s a d r e c t a n g u l u m b s c , i t a h e a d e p : & u t q u a d r a t u m a t a d r e-
c t a n g u l u m x t o , i t a e h a d h r . u t e r g o h e a d c p , i t a e h a d h r . æ q u a l i s i g i t u r e p i p s i h r .
H o c t h o r e m a c a s u m n o n h a b e t . p r o p o s i t u m a u t e m i d e m e s t , q u o d e t i a m i n t r i b u s s u p e r i o r i b u s ; s i-
m i l i t e r e n i m & o p p o s i t a r u m s e c t i o n u m p r i n c i p a l e m d i a m e t r u m i n q u i r i t ; & l i n e a s , u x t a q u a s
p o s s u n t , q u a e a d i p s a m o r d i n a t i m a p p l i c a n t u r .

T H E O R E M A X V . P R O P O S I T I O X V .

S i i n e l l i p s i à p u n c t o , q u o d d i a m e t r u m b i f a r i a m diuidit o r d i n a t i m
d u c t a l i n e a e x u t r a q u e p a r t e a d s e c t i o n e m p r o d u c a t u r ; & f i a t u t p r o d u-
c t a a d d i a m e t r u m , i t a d i a m e t r u m a d a l i a m l i n e a m : r e c t a l i n e a , q u a e à s e-
c t i o n e d u c i t u r a d p r o d u c t a m , d i a m e t r o æ q u i d i s t a n s , p o t e r i t s p a t i u m
a d i a c e n s t e r t i a e p r o p o r t i o n a l i , l a t i t u d i n e m h a b e n s l i n e a m , q u a e i n t e r
i p s a m , & s e c t i o n e m i n t e r i i c i t u r , d e f i c i e n s q ; f i g u r a s i m i l i e i , q u a e c o n-
t i n e t u r l i n e a , a d q u a m d u c i n t u r ; & e a iuxta q u a m p o s s u n t . Q u o d s i
u l t e r i u s p r o d u c a t u r a d a l t e r a m p a r t e m s e c t i o n i s , b i f a r i a m s e c a b i t u r a b
e a , a d q u a m a p p l i c a t a f u e r i t .

S i e l l i p s i s , c u i u s d i a m e t r u m a b , s e c e t u r q ; a b b i f a r i a m i n c p u n c t o ; & p e r c o r d i-
n a t i m

natim applicata ex utraque parte ad sectionem producatur, quæ sit d c e: à puncto autem d ipsi d e ad rectos angulos ducatur d f: fiatq; ut d e ad a b, ita a b ad d f: & sumpto quolibet punto g in sectione, per g ducatur g h ipsi ab æquidistans: & iungatur e f. deinde per h ipsi d f æquidistans ducatur h l: & per f l ducantur ipsi h d æquidistantes f k, l m. Dico lineam g h posse spatiū d l, quod quidem adiacet linea d f, latitudinem habens d h; deficiensq; figura l f simili ei, quæ e d f continetur. sit enim linea a n, iuxta quam possunt ordinatim applicatae ad a b: iungaturq; b n; & per g quidem ipsi d e æquidistans ducatur g x: per x c ipsi a n æquidistantes x o, c p: per n o p uero ducantur n y r, o s, t p, æquidistantes ipsi a b. æquale 13. huius igitur est d c quadratum rectangulo a p: & quadratum g x rectangulo a o. itaque quoniam ut b a ad a n, ita est b c ad c p; & p t ad t n: æqualis autem b c ipsi c a, hoc est ipsi p t: & c p ipsi t n, & b p ipsi p n æqualis erit. ergo a p rectangulum æquale rectangulo t r: & rectangulum x t ipsi t y. quod cum rectangulum o t rectangulo o r æquale sit, commune autem n o. erit rectangulum t y ipsi n s æquale; sed t y est æqua le t x, & commune t s. totum igitur rectangulum n p; hoc est p a æquale erit rectangulo a o unà cum p o rectangulo. quare p a rectangulum superat rectangulum a o ipso o p. est autem p a rectangulum æquale c d quadrato: rectangulumq; a o æquale quadrato x g: & o p ei, quod lineis o s p continetur. ergo c d quadratum superat quadratum x g ipso o s p rectangulo. & quoniam linea d e secatur in partes æquales in c punto, & in partes inæquales in h, rectangulum e h d unà cum quadrato c h, hoc est x g æquale erit c d quadrato. ex quo sequitur quadratum c d superare x g quadratum, rectangulo e h d. Superabat autem, ut monstratum est, & rectangulo o s p. rectangulum igitur e h d rectangulo o s p est æquale. Præterea cum sit ut d e ad a b, ita a b ad d f: erit ut d e ad d f, ita d e quadratum ad quadratum a b: hoc est quadratum c d ad quadratum c b. atque est quadrato c d æquale p c a rectangulum, hoc est p c b. Ut ergo e d ad d f, hoc est ut e h ad h l, hoc est ut e h d rectangulum ad rectangulum d h l, ita rectangulum p c b ad c b quadratum: hoc est rectangulum p s o ad quadratum o s. sed rectangulum e h d æquale est ipsi p s o. rectangulum igitur d h l quadrato o s, hoc est quadrato g h est æquale: & id circa linea g h potest spatium d l, quod adiacet linea d f, latitudinem habens d h, deficiensq; figura f l simili ei, quæ e d f continetur. Dico in super g h productam ad alteram partem sectionis ab ipsa d e bifariam secari. producatur enim, occurratq; sectioni in punto u: & per u ipsi g x æquidistans ducatur u q: & per q ducatur q z æquidistans a n. Quoniam igitur g x ipsi u q est æqualis, erit g x quadratum æquale quadrato u q. quadratum autem g x æquale est a x o rectangulo: & quadratum u q æquale rectangulo a q z. ergo ut o x ad z q, ita q a ad a x. & est ut o x ad z q, ita x b ad b q. ut ergo q a ad a x, ita x b ad b q: & diuidendo ut q x ad x a, ita x q ad q b. æqualis igitur est a x ipsi q b. est autem a c æqualis c b. quare & reliqua x c reliqua c q: & id circa g h ipsi h u est æqualis. linea igitur g h producta ad alteram partem sectionis ab ipsa d h bifariam secabitur.



13. huius

14. quinti

43. primi

5. secundi

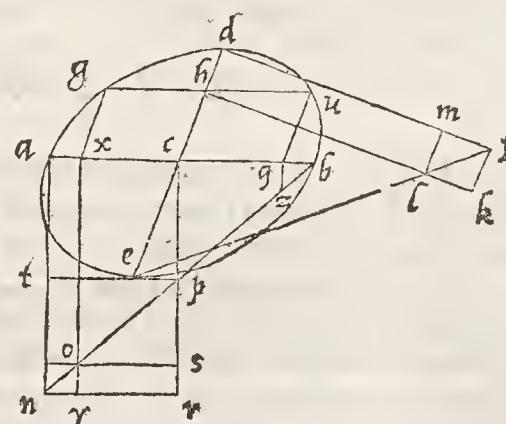
cor. 20. se xti

15. quinti.
13. huius

4. & 1. se xti.

4. sexti

9. quinti.

13. huius
14. sexti.4
9. quinti.

A P O L L O N I I P E R G A E I

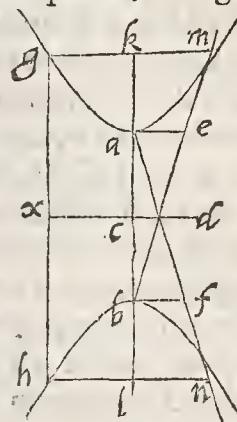
T H E O R E M A X V I . P R O P O S I T I O X V I .

S I per punctum, quod transuersum latus oppositarum sectionum bifariam diuidit, recta linea quædam ordinatim applicetur; ipsarum diameter erit, priori diametro coniugata.

34. primi
13. huius

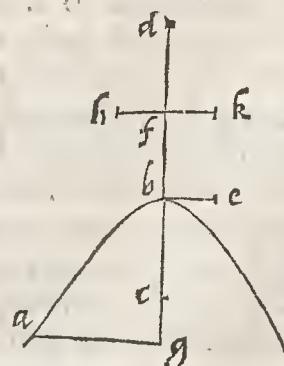
14. huius.
7. quinti

A Sint oppositæ sectiones, quarum diameter a b: seceturq; a b bifariam in c puncto: & per c ordinatim applicetur c d. Dico c d diametrum esse coniugatum ipsi a b. sint enim, iuxta quas possunt ordinatim applicatae a e, b f: & iunctæ a f, b e producantur: sumpto autem in altera sectione quoquis punto g, ducatur per g ipsi a b æquidistans g h, & à punctis g h ordinatim applicentur g k, h l: deinde à punctis k l ipsi a e, b f æquidistantes ducantur k m, l n. Quoniam igitur æqualis est g k ipsi h l, erit g k quadratum quadrato h l. æquale. Sed quadratum g k æquale est rectangulo a k m; & quadratum h l rectangulo b l n. ergo a k m rectangulum rectangulo b l n æquale erit. & cum æquales sint a e, b f: erit ut a e ad a b, ita b f ad b a. ut autem a e ad a b, sic m k ad k b: & ut f b ad b a, sic n l ad l a. quare ut m k ad k b, sic n l ad l a. sed ut m k ad k b sumpta k a communi altitudine, ita rectangulum m k a ad rectangulum b k a: & ut n l ad l a sumpta communi altitudine b l, ita n l b rectangulum ad rectangulum a l b. ergo ut rectangulum m k a ad rectangulum b k a, ita rectangulum n l b ad ipsum a l b: & permutando ut m k a rectangulum ad rectangulum n l b, ita b k a rectangu-

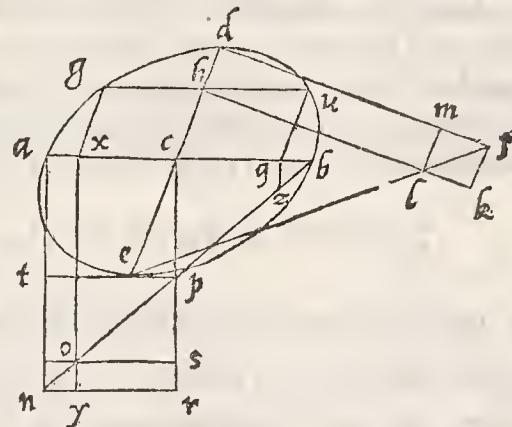
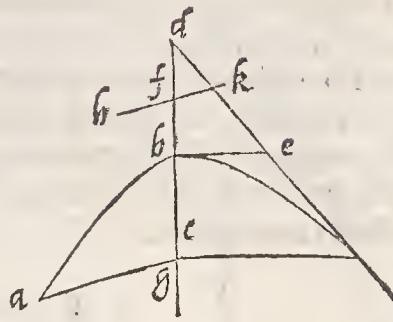


E V T O C . I V S.

A Q V A R E & b k a rectangulum rectangulo a l b: & propterea linea a k linea l b æqualis erit.] Quoniam enim rectangulum b k à ipsi a l b rectangulo est æquale; erit ut k b ad a l, ita l b ad a k: permutoandoq; ut k b ad b l, ita l a ad a k: & componendo ut k l ad l b, ita l k ad k a. æqualis igitur est a k ipsi b l. Animaduertendum autem est in quinto decimo, & sexto decimo theoremate Apollonio propositum fuisse, ut secundas & coniugatas, quas uocant, diametros inquireret; tum ellipsis; tum hyperbole, seu oppositarum sectionum: parabolæ enim eiusmodi diametrum non habet. Sed & illud notatione dignum est, diametros ellipsis intra recipi; hyperbolæ uero, & oppositarum sectionum diametros describi extra. Oportet autem lineas, iuxta quas possunt ordinatim applicatae, seu recta latera (græci ὄρθιας πλευρας dicunt) & lineas; quæ ipsis æquidistant, ad rectos angulos aptare: ordinatim uero applicatas, & secundas diametros non omnino. maxime tamen deberent in acuto angulo applicari, ut longe aliae, & diuersæ ab eis, quæ recto lateri æquidistant, deprehenderentur. Post sextum decimum theorema definitiones tradit eius, quæ secunda diameter appellatur hiperbole & ellipsis. quibus quidem nos ex figuris lucem afferre conabimur. Sit hiperbole a b, cuius diameter g c b d: linea uero, iuxta quam possunt, quæ ad ipsam b c applicantur, sit b e. patet igitur b c in infinitum augeri propter sectionem, ut ostensum est in octavo theoremate. Sed ipsa b d, quæ subtendit angulo extra triangulum per axem, terminata est. Itaque si bifariam secta b d in f: & à puncto a ordinatim applicata a g, per f linea a g æquidistantem duxerimus h f k, ita ut sit h f ipsi f k. æqualis, & quadratum h k æquale rectangulo d b e: erit h k secunda diameter: hoc enim fieri posse perspicuum est, quippe cum h k extra



extra sectionem cadens in infinitum produci possit; atque à linea infinita cuilibet datæ lineæ æqualis facile abscindatur. punctum autem f vocat centrum, & lineam fb, & alias quæ simuliter à punto f ad sectionem ducuntur, ex centro appellat. atque hæc in hyperbola, & oppositis sectionibus. constat ergo utramque diametrum terminatam esse: primam quidem per se ex generatione sectionis, secundam uero quod media proportionalis sit inter lineas terminatas, uidelicet inter primam diametrum, & eam iuxta quam possunt, quæ ad diametrum ordinatim applicantur. Sed in ellipsi id, quod dictum est, non dum apparet. Itaque cum ipsa in se ipsam uergat instar circuli; & omnes diametros intra recipiat, atque terminet; omnino in ellipsi, quæ media est proportionalis inter figuræ latera, duobusq; per centrum sectionis, & à diametro bifariam diuisa, ab ipsa sectione terminatur. quod ex ijs, quæ dicta sunt in quinto decimo theoremate ostendere possumus. quoniam enim ut demonstratum est, quæ ad lineam de applicantur æquidistantes ipsi ab, possunt spacia tertiae proportionali earum adiacentia, uidelicet lineæ fd: erit ut de ad ab, ita ab ad df. quare ab media proportionalis est inter ed, df. & uicirco, quæ applicantur ad ab, ipsi de æquidistantes, poterunt spacia adiacentia tertiae proportionales ipsarum de, ab, hoc est lineæ an. ergo de secunda diameter media est proportionalis inter ba, an figuræ latera. Oportet autem hoc scire etiam ob commodam figurarum descriptionem. nam cum inæquales sint ab, de diametri, in circulo enim tantum sunt æquales: constat lineam, quæ minori earum ad rectos angulos dicitur, ut hoc in loco df, tanquam tertia proportionalis ipsarum de, ab, utrisque maiorem esse. eam uero, quæ ad angulos rectos dicitur minori, ut an, tanquam tertia proportionalis ipsarum ab, de, utrisque esse minorem; ita ut quatuor continue proportionales sint: ut enim an ad de, sic est de ad ab, & ab ad df.



DIFFINITIONES SECUNDÆ.

1 Punctum, quod hyperbolæ, & ellipsis diametrum bifariam diuidit, centrum sectionis dicatur. 2 Et quæ à centro ad sectionem perditur, uocetur ex centro sectionis. 3 Similiter & punctum quod transuersum latus oppositarum sectionum bifariam diuidit, centrum uocetur. 4 Quæ autem à centro dicitur æquidistans ei, quæ ordinatim applicata est, medianamq; proportionem habet inter latera figuræ, & bifariam secatur à centro, secunda diameter appelletur.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

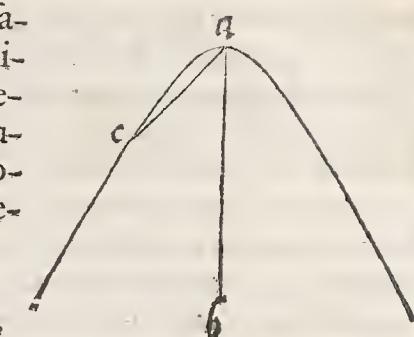
Si in coni sectione à uertice ipsius ducatur recta linea æquidistans ei, quæ ordinatim applicata est; extra sectionem cadet.

Sit coni sectio, cuius diameter ab. Dico lineam, quæ à uertice, hoc est ab a puncto dicitur æquidistans ei, quæ ordinatim applicata est; extra sectionem cadere. Si enim fieri potest, cadat intra, ut ac. Quoniam igitur in coni sectione sumptum est quodlibet punctum c; linea quæ ab ipso c intra sectionem dicitur, ordinatim appli-

APOLLONII PERGAEI

7. huius

catae æquidistans, diametro occurrit, atque ab ipsa bifariam secatur. quare ac producta bifariam secabitur à linea ab, quod est absurdum; quoniam producta extra sectionem cadit. non igitur recta linea, quæ à punto a ducitur ordinatim applicata æquidistans, cadet intra sectionem. ergo extra cadet: & propterea sectionem ipsam necessario continget.



E V T O C I V S.

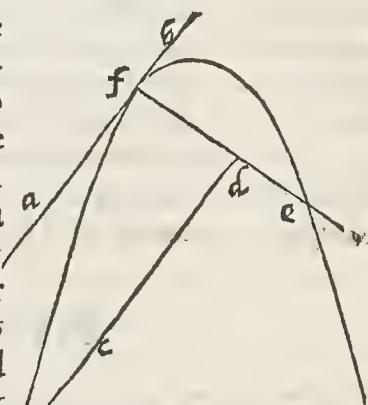
EVLIDES in quinto decimo theoremate tertij libri elementorum ostendit lineam, quæ ab extremitate diametri ad rectos angulos ducitur, cadere extra; atque circulum ipsum contingere. Apollonius autem hoc loco uniuersale quoddam demonstrat, quod tum tribus coni sectionibus, tum circulo conuenire potest. hoc enim differt circulus à coni sectionibus, quod in circulo ordinatim applicatae perpendiculares sunt ad diametrum; neque enim aliae linea ipsiæ æquidistantes à diametro circuli bifariam diuiduntur: at in tribus sectionibus non omnino perpendiculares ducuntur, præterquam ad solos axes.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si recta linea coni sectioni occurrens, productaq; in utramque partem extra sectionem cadat: sumatur autem aliquod punctum intra sectionem, & per ipsum ei, quæ sectioni occurrit æquidistans ducatur: ducata linea & producta ex utraque parte sectioni occurret.

2 primi
libri ui-
tellionis.

Sit coni sectio, atque ipsi occurrens recta linea ab, quæ producta in utramque partem extra sectionem cadat: sumpto autem intra sectionem punto aliquo c; per c ipsi ab æquidistans ducatur cd. Dico cd productam ex utraque parte sectioni occurrere. Sumatur enim aliquod punctum in sectione, quod sit e: & iungatur ef. quoniam igitur linea ab lineæ cd æquidistat: ipsiq; ab occurrit recta linea ef; & cd producta ipsi ef occurret. & siquidem cadet inter ef puncta, perspicuum est ipsam sectioni occurtere; si uero extra e, sectioni prius occurret. ergo cd producta, ut ad partes de occurrit sectioni. similiter demonstrabitur, & ad partes af eidem occurtere. linea igitur cd producta ex utraque parte sectioni occuret.



E V T O C I V S.

*I*N aliquibus exemplaribus hoc theorema in parabola, & hyperbola tantummodo propositum ostendit. Sed tamen præstat propositionem uniuersaliorem esse: quamquam de ellipsi, ut minime dubium, ab illis prætermisum uideri potest; linea enim cd intra sectionem terminatam existens, si producatur ex utraq; parte, necessario ipsam secabit. Sciendum autem est, eandem congruere demonstrationem, etiam si linea afb secet ipsam sectionem.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

In omni sectione coni recta linea, quæ à diametro ducitur ordinatim applicata æquidistans, cum sectione conueniet.

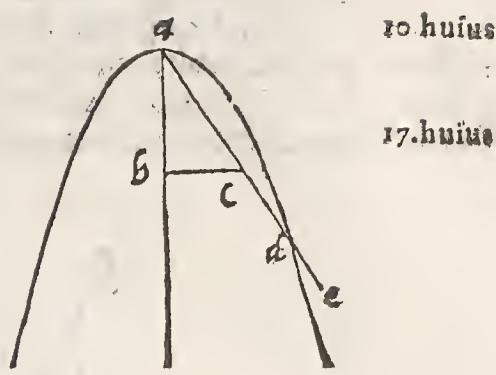
Sit coni sectio, cuius diameter ab: sumaturq; aliquod punctum b in diametro; & per b ducatur bc æquidistans ei, quæ ordinatim applicata fuerit. Dico bc productam

Etiam cum sectione conuenire. sumatur enim quodlibet pūctum in sectione d. est autem & punctum a in sectione. ergo à puncto a ad d ducta linea intra sectionem cadet. Quoniam igitur quæ ab a ducta est ordinatim applicata æquidistans, cadit extra sectionem: & cum ipsa conuenit a d: itemq; b c æquidistat ei; quæ ordinatim applicata est: sequitur ut b c etiam cum a d conueniat. & si quidem conuenit inter puncta a d; perspicuum est cum sectione quoque conuenire: si uero extra d, ut ad punctum e, prius conueniet cum sectione. ergo recta linea, quæ à puncto b dicitur ordinatim applicata æquidistans, cum sectione conueniet.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XX.

Si in parabola duæ rectæ lineæ à sectione ad diametrum ordinatim applicentur, ut eorum quadrata inter se, ita erunt & lineæ, quæ ab ipsis ex diametro ad uerticem absconduntur.

SIT parabole, cuius diameter a b: & in ipsa sumantur puncta quæpiam c d; à quibus ad a b ordinatim applicentur c e, d f. Dico lineam f a ad ipsam a e ita esse, ut quadratum lineæ d f ad quadratum c e. sit enim linea a g, iuxta quā possunt ordinatim applicatae. erit quadratum d f rectangulo f a g æquale: & quadratum c e æquale rectâgulo e a g. quare ut quadratum d f ad quadratum c e, ita rectangulum f a g ad rectangulum e a g. ut autem rectangulum f a g ad quadratum d f ad quadratum c e, ita erit f a ad a e.



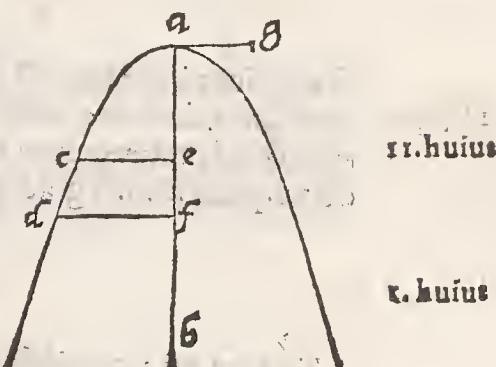
E V T O C I V S.

AB hoc theoremate incipiens Apollonius deinceps in omnibus accidentia, quæ ipsi parabolæ in sunt, & non alij cuiquam magna ex parte ostendit: deinde hyperbolæ, ellipsi, & circulo eadem inesse demonstrat. Quoniam autem uon inutile uisum est ijs, qui mechanica tradunt, ob instrumentorum penuriam, sæpe numero per continuata puncta coni sectiones in plano describere: ex hoc theoremate suppeditatur modus sumendi ea puncta continuata, per quæ parabole regulæ adminiculo designantur. si enim exponamus rectam lineam, ut a b: & in ea sumamus puncta continuata e f: à quibus ad rectos angulos ipsi a b lineas e c, f d ducamus, sumpto in linea e c quolibet puncto c; longius quidem ab e si latiorem parabolam facere libuerit; si uero angustiorem propius: & fiat it a e ad a f, ita quadratum e c ad quadratum f d: puncta c d in sectione erunt. similiter autem sumentur & alia puncta, per quæ parabole ipsa describetur.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXI.

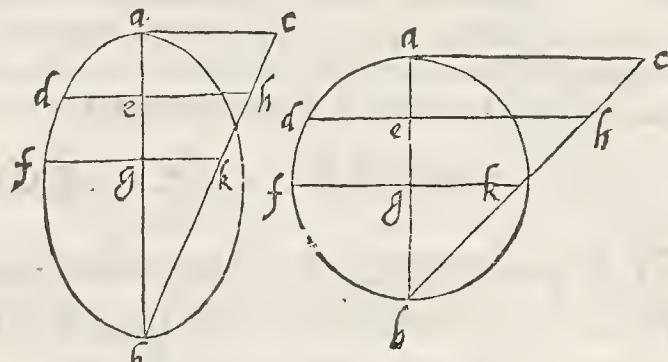
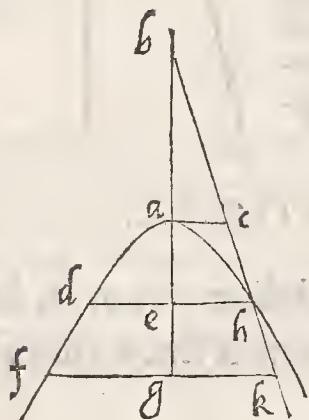
Si in hyperbola, uel ellipsi, uel circuli circumferentia, rectæ lineæ ordinatim ad diametrum applicentur: erunt quadrata earum ad spacia contenta lineis; quæ inter ipsas, & uertices transuersi lateris figuræ intericiuntur, ut figuræ rectum latus ad transuersum: inter se se uero, ut spacia, quæ interiectis, ut diximus lineis, continentur.

SIT hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b: linea autem, iuxta quam possunt applicatae a c: & ad diametrum applicentur ordinatim d e, f g. Dico ut quadratum f g ad rectangulum a g b, ita esse lineam a c ad a b: ut uero



APOLLONII PERGAEI

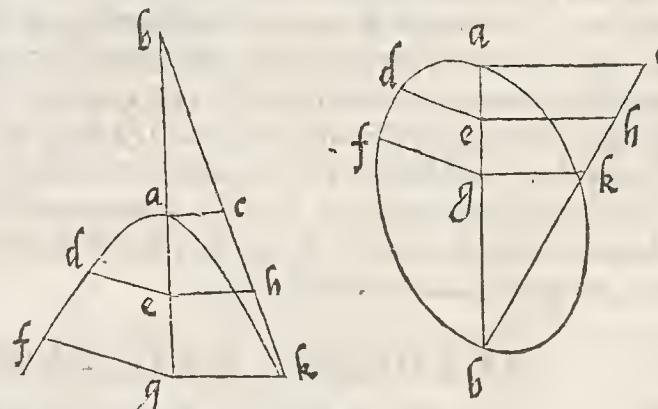
quadratum $f g$ ad quadratum $d e$, ita rectangulum $a g b$ ad rectangulum $a e b$. iungatur enim $b c$ figuram determinans: & per $e g$ puncta ipsi $a c$ æquidistantes ducantur $eh, g k$. quadratum igitur fg æquale est rectangulo $k g a$: & quadratum $d e$ rectangulo $h e a$. Quoniam autem ut $k g$ ad $g b$, ita est $c a$ ad $a b$: & ut $k g$ ad $g b$, sumpta $a g$ communi altitudine, ita rectangulum $k g a$ ad rectangulum $b g a$: erit ut $c a$ ad $a b$, ita re-



Etangulum $k g a$, hoc est quadratum fg ad rectangulum $b g a$. Eadem ratione demonstrabitur etiam ut quadratum $d e$ ad rectangulum $b e a$; ita $c a$ ad $a b$. ergo ut quadratum fg ad rectangulum $b g a$, ita quadratum $d e$ ad $b e a$ rectangulum: & permutando ut quadratum fg ad quadratum $d e$, ita rectangulum $b g a$ ad rectangulum $b e a$.

E V T O C I V S.

THEOREMA manifestè exponitur, & casum non habet. oportet autem scire lineam, iuxta quam possunt, uidelicet rectum figura latius in circulo, quidem diametro æquale esse. quoniam enim $c a$ ad $a b$ est, ut quadratum $d e$ ad rectangulum $a e b$: quadratum autem $d e$ rectangulo $a e b$ in circulo dum taxat est æquale: sequitur ut & $c a$ æqualis sit ipsi $a b$. sed illud quoque attendendum est, lineas quæ in circuli circumferentia ordinatim applicantur, ad diametrum perpendicularares esse, atque in eadem recta linea, in qua sunt æquidistantes ipsi $a c$. Per hoc autem theorema, eo modo quo dictum est in parabolæ, hyperbolæ & ellipsim regulæ adminiculo describemus. exponatur enim recta linea $a b$, & in infinitum producatur ad g : à punto autem a ad rectos angulos ipsi $a b$ ducatur $a c$: iunctaq; $b c$, & produeta, sumantur in linea $a g$ puncta quædam e & g : à quibus ipsi $a c$ æquidistantes ducantur $e h, g k$: & fiat $a g k$ rectangulum, æquale quadrato $f g$: & rectangulum $a e h$ æquale ipsi $d e$ quadrato. transbit iam hyperbole per puncta $a d f$. Similiter eadem & in ipsa ellipsi construemus.

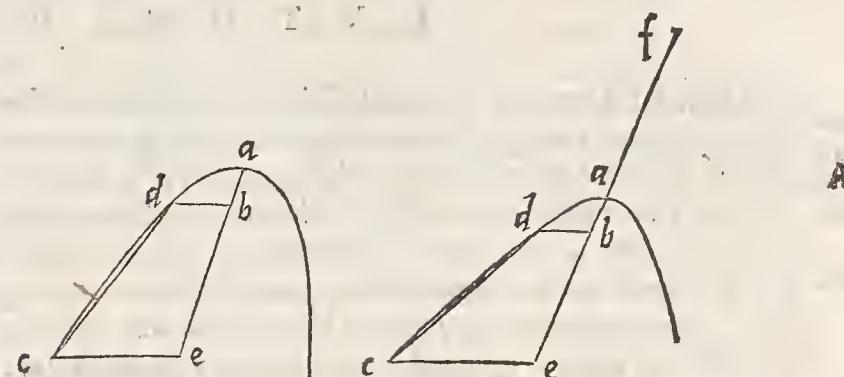
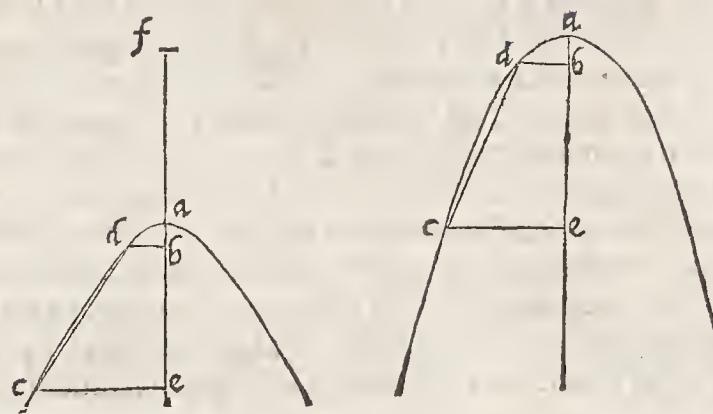


THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXII.

Si parabolæ, vel hyperbolæ recta linea in duobus punctis fecet, non conueniens cum diametro sectionis intra sectionem; producta cum eadem diametro extra sectionem conueniet.

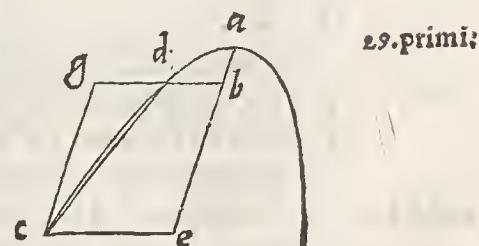
Sit

SIT parabole, uel hyperbole, cuius diameter $a b$; & secet quæpiam recta linea sectionem in duobus punctis $c d$. Dico lineam $c d$ productam conuenire cum ipsa $a b$ extra sectionem. applicentur enim à punctis $c d$ ordinatim linea e , $d b$: & sit primum sectio parabole. Quoniam igitur in parabola, ut quadrum $c e$ ad quadratum $d b$: ita est $e a$ ad $a b$: maior autem $e a$, quam $a b$: erit quadratum $c e$ quadrato $d b$ maius. quare & linea $c e$ maior ipsa $d b$. & sunt inter se se æquidistantes. ergo $c d$ producta cum diametro $a b$ extra sectionem conueniet. sed sit sectio hyperbole. itaque quoniam in hyperbole ut quadratum $c e$ ad quadratum $d b$, ita est rectangle $f e a$ ad rectangle $f b a$; quadratum $c e$ maius erit quadrato $d b$. & sunt æquidistantes. linea igitur $c d$ producta cum diametro sectionis extra sectionem conueniet.



F E D. C O M M A N D I N V S.

E T sunt inter se se æquidistantes. ergo $c d$ producta cum diametro $a b$ extra sectionem conueniet.] Ducatur à punto c linea $c g$ diametro $e b$ æquidistans; & producta $b d$; ipsi $c g$ occurrat in g . Quoniam igitur $c e$, $d b$ inter se se æquidistant; itemq; $e b$, $c g$: erit ipsum $e g$ parallelogramnum: & anguli $b e c$, $e c g$ æquales duobus rectis. quare $b e c$, $e c d$ anguli duobus rectis sunt minores. linea igitur $c d$ cum ipsa $e a$ ex parte a conueniet. quod cum non conueniat intra sectionem, extra conuenire ne cessarium est.

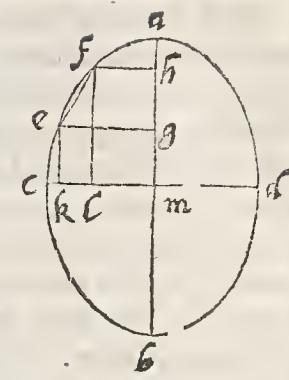


THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

S I ellipsem recta linea secet inter duas diametros, producta cum utraque earum extra sectionem conueniet.

SIT ellipsis, cuius diametri $a b$, $c d$: & secet quædam recta linea sectionem, uidelicet ipsa $e f$, inter duos diametros $a b$, $c d$ interiecta. Dico $e f$ productam conuenire cū utraque earum extra sectionem. applicentur enim à punctis $e f$ ordinatim ad diametrum $a b$.

21. huius trum quidem a b linea e g, f h; ad c d uero e k, f l. est igitur ut quadratum e g ad quadratum f h, ita rectangulum b g a ad rectangulum b h a: ut autem quadratum f l ad quadratum e k, ita rectangulum d l c ad rectangulum d k c: atque est rectangulum b g a maius rectangulo b h a; etenim g proprius accedit ad punctum, quod diametrum a b bifariam secat: & rectangulum d l c maius est rectangulo d k c. quadratum igitur e g maius est quadrato f h: & quadratum f l maius quadrato e k: idcirco; linea e g maior, quam ipsa f h: & f l maior, quam e k. æquidistat autem e g ipsis f h, itemq; f l ipsis e k. ergo e f producta cu utraque diametro a b, c d extra sectionem conueniet.



E V T O C I V S.

ATTENDENDVM est in propositione Apolloniū duas diametros dicere. non simpliciter quas-
cunque, sed quæ coniugatae diametri appellantur; quarum utraque ordinatum applicatae æquidistās
ducitur, medianaq; proportionem habet inter latera figure alterius diametri: & idcirco alteri æqui-
distantes lineas bifariam diuidit: ut in theoremate est demonstratum. nisi enim ita sit contingat li-
neam inter duas diametros inter medium alteri ipsarum æquidistare: quod non ponitur. quoniam au-
tem g proprius accedit ad punctum m, quod a b bifariam secat, quam ipsum h: rectangulum quidem
b g a una cum quadrato g m æquale est quadrato a m: rectangulum uero b h a una cum quadrato
b m eidem est æquale: & quadratum b m maius quadrato g m: erit rectangulum b g a rectangulo
b h a maius.

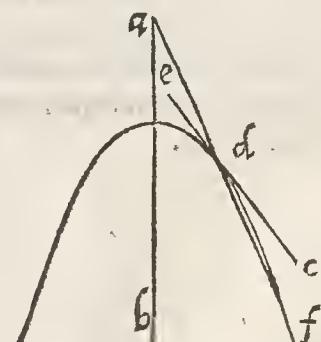
F E D. C O M M A N D I N V S.

HOC idem etiam in ipso circulo euenit, sumptis duabus diametris coniugatis: quod eodem pror-
sus modo demonstrabitur.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

S I parabolæ uel hyperbolæ recta linea in uno puncto ocurrans, &
producta ex utraque parte extra sectionem cadat; cum diametro con-
ueniet.

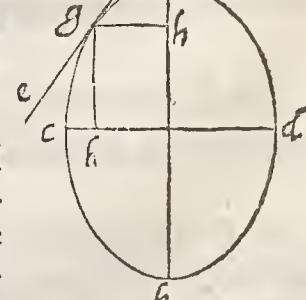
Sit parabole uel hyperbole, cui^o diameter a b: occurratq;
ipsi recta linea c d e in punto d: & producta ex utraq; par-
te extra sectionem cadat. Dico lineam c d e cum diametro
a b conuenire. Sumatur enim aliquod punctum f in sectio-
ne; & iungatur d f. ergo d f producta conueniet cum dia-
metro sectionis. conueniat in a punto. est autem c d e
inter sectionem & lineam f d a. linea igitur c d e producta
cum diametro extra sectionem conueniet.



THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

S I ellipsi recta linea occurrens inter duas dia-
metros, & producta ex utraque parte cadat extra sectio-
nem; cum utrisque diametris conueniet.

SIT ellipsis, cuius diametri a b, c d: & ipsi occurrat recta li-
nea e f inter duas diametros in punto g: & producta ex utra-
que parte extra sectionem cadat. Dico e f cum utrisque dia-
metris a b, c d conuenire. applicentur enim à punto g ad dia-
metros a b, c d linea g h, g k. itaque quoniam g k æquidistat ipsis



ab:

$a b$: conuenit autem quædam linea $g f$ cum $g k$, & cum ipsa $a b$ conueniet. Eodem modo & $f e$ cum diametro $c d$ conuenire demonstrabitur.

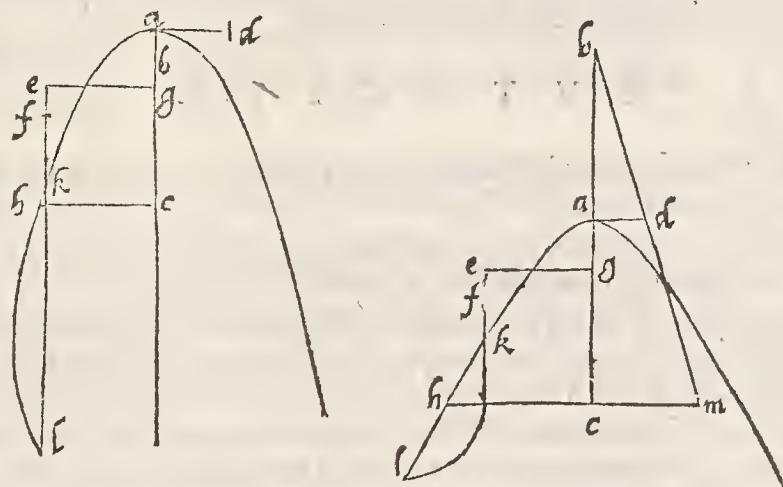
ex 2. pri-
mi libri
Vitellio
dis.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVI.

Si in parabola, uel hyperbola recta linea ducatur diametro sectionis æquidistans ; in uno tantum puncto cum sectione conueniet.

SIT primum parabole, cuius diameter $a b c$: rectum autem latus $a d$: & ipsi $a b$ æquidistans ducatur $e f$. Dico $e f$ productam cum sectione conuenire. Sumatur enim in ipsa $e f$ aliquod punctum e ; à quo ducatur $e g$ ordinatim applicata æquidistans ; & quadrato $e g$ maius sit rectagulum $d a c$: à punto autem c ordinatim applicetur $c h$. ergo quadratum $h c$ æquale est rectangulo $d a c$: atque est rectangulum $d a c$ maius quadrato $e g$. quadratum igitur $h c$ quadrato $e g$ maius erit; & idcirco linea $h c$ maior linea $e g$: & sunt æquidistantes inter se se. ergo $e f$ producta secabit $h c$: proptereaq; conueniet cum sectione. conueniat in k . Dico in uno tantum punto k conuenire. si enim fieri potest, conueniat etiam in l . Quoniam igitur parabolen recta linea secat in

11. huius



duobus punctis, si producatur conueniet cum diametro sectionis; quod est absurdū. 11. huius positum enim est ipsi æquidistare. ergo $e f$ in uno tantum punto cum sectione conueniet. Sit deinde sectio hyperbole: transuersum uero figuræ latus $a b$: & $a d$ rectum: iungaturq; $b d$, & producatur. iisdem igitur, quæ supra, dispositis, ducatur à punto c ipsi $a d$ æquidistans $c m$. & quoniam rectangulum $m c a$ maius est rectangulo $d a c$: ipsiq; $m c a$ æquale est quadratum $c h$: & $d a c$ rectangulum maius quadrato $g e$: erit & quadratum $c h$ quadrato $g e$ maius: & ideo linea ch maior linea $g e$. ex quibus eadem, quæ supra diximus, necessario sequuntur. 12. huius

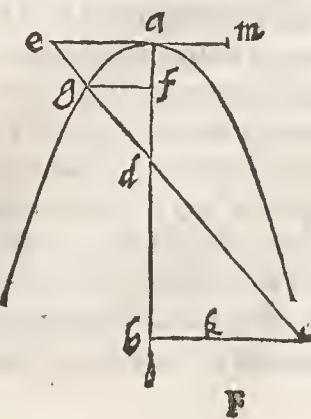
THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVII.

Si parabolæ diametrum secet recta linea; producta in utramque partem cum sectione conueniet.

SIT parabole, cuius diameter $a b$: & ipsam $a b$ secet quæpiam recta linea $c d$ intra sectionem. Dico $c d$ productam in utramque partem cum sectione conuenire: ducatur enim à punto a ordinatim applicata æquidistans $a e$. ergo $a e$ extra sectionem cadet. itaque uel $c d$ ipsi $a e$ æquidistat, uel non. & si quidem æquidistat, ordinatim applicata est. quare producta in utramque partem conueniet cum sectione. Quod si non æquidistat, producatur, & conueniat cum $a e$ in e punto. constat igitur ipsam cum sectione conuenire ad partes e . si enim conuenit cum

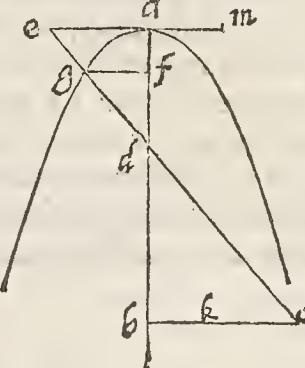
17. huius

19. huius



A P O L L O N I I P E R G A E I

a e, multo prius sectioni occurrit. Dico rursus eandem, & ad alteras partes productam conuenire cum sectione. sit enim m a linea, iuxta quam possunt: & $g f$ ordinatim applicetur: quadratum autem $a d$ æquale sit rectangulo $b a f$: & ordinatim applicata $b k$ conueniat cum $d e$ in c puncto. Quoniam igitur rectangulum $f a b$ æquale est quadrato $a d$; erit ut $b a$ ad $a d$, ita $d a$ ad $a f$: quare & reliqua $b d$ ad reliquam $d f$, ut $b a$ ad $a d$. & propterea ut quadratum $b d$ ad quadratum $d f$, ita quadratum $b a$ ad quadratum $a d$. Rursus quoniam quadratum $a d$ æquale est rectangulo $b a f$, ut $b a$ ad $a f$, sic erit quadratum $b a$ ad quadratum $a d$; hoc est quadratum $b d$ ad quadratum $d f$. ut autem quadratum $b d$ ad quadratum $d f$, sic quadratum $b c$ ad quadratum $f g$: & ut $b a$ ad $a f$, sic rectangulum $b a m$ ad rectangulum $f a m$. ut igitur quadratum $b c$ ad quadratum $f g$, ita rectangulum $b a m$ ad ipsum $f a m$. & permutando ut quadratum $b c$ ad rectangulum $b a m$, ita quadratum $f g$ ad rectangulum $f a m$. at quadratum $f g$ æquale est $f a m$ rectangulo, propter sectionem. ergo & quadratum $b c$ rectangulo $b a m$ æquale erit. est autem $a m$ rectum figuræ latus: & $b c$ ordinatim applicata. sectione igitur transit per c punctum: & linea $c d$ in c cum sectione necessario conuenit.

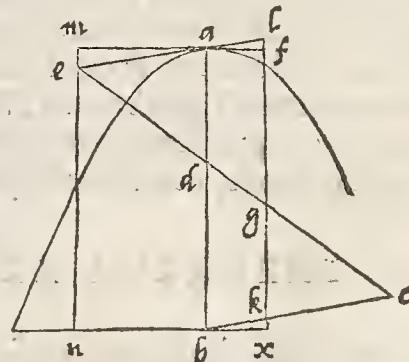


E V T O C I V S.

IN aliquibus exemplaribus uigesimi septimi theoremati talis legitur demonstratio.

Sit parabole, cuius diameter $a b$: & hanc fecerit recta linea quædam $g d$ intra sectionem. Dico $g d$ productam ad utrasque partes cum sectione conuenire. ducatur enim per a punctum, ordinatim applicata æquidistans, quæ sit $a e$. ergo $a e$ cadet extra sectionem. uel igitur $g d$ ipsi $a e$ æquidistat, uel non: & siquidem æquidistet, ordinatim applicata est: ideoq; si producatur ad utrasque partes, bifariam secta à diametro conueniet cum sectione: si uero non æquidistet, sed producta conneniat cum $a e$ in e punto; perspicuum est ipsam cum sectione conuenire ad partes e . nam si cum $a e$ conuenit multo prius sectioni occurrat necesse est. Dico etiam ad alteras partes productam cum sectione conuenire. sit enim m a linea, iuxta quam possunt: & in rectum ipsi producatur $a f$. ergo $m a$ ad $a b$ est perpendicularis.

A fiat ut quadratum $a e$ ad triangulum $a e d$, sic linea $m a$ ad $a f$: & per puncta $m f$, ipsi $a b$ æquidistantes ducantur $fg k, mn$. cum igitur quadrilaterum sit $l a d g$; & positione data $l a$, ducatur $ck b$. ipsi $l a$ æquidistans, quæ absindat $c k g$ triangulum quadrilatero $l a d g$ æquale: & per b ipsi $f a m$ æquidistans ducatur $x b n$. Itaque quoniam ut quadratum $a e$ ad triangulum $a e d$, ita est linea $m a$ ad $a f$: & ut quadratum $a e$ ad $a e d$ triangulum, ita quadratum $c b$ ad triangulum $d c b$; etenim $a e, cb$ inter se se æquidistant: & ipsas coniungunt $c e, a b$: ut autem $m a$ ad $a f$, ita $a m n b$ parallelogramum ad parallelogrammum $a f x b$: erit ut quadratum $c b$ ad triangulum $c d b$, ita $a m n b$ parallelogramum ad parallelogrammum $a f x b$: & permutando ut quadratum $c b$ ad parallelogrammum $a m n b$, ita $c d b$ triangulum ad parallelogrammum $a f x b$. parallelogrammum autem $a f x b$ triangulo $c d b$ est æquale. quoniam enim $c g k$ triangulum æquale est quadrilatero $a l d g$: & quadrilaterum $g d b k$ utriusque commune: erit $l a b k$ parallelogrammum æquale triangulo $c d b$. Sed $l a b k$ parallelogrammum æquale est parallelogrammo $f a b x$; quod sit in eadem basi $a b$, & in eisdem parallelis $a b, l x$. ergo $c d b$ triangulum parallelogrammo $x f a b$ æquale erit. quare & quadratum $c b$ æquale parallelogrammo $a m n b$: parallelogrammum autem $m a b n$ rectangulo $m a b$ æquale; quod $m a$ ad $a b$ sit perpendicularis. ergo rectangulum $m a b$ est æquale quadrato



drato c b. atque est m a rectum figuræ latus; ab diâmeter; & cb ordinatim applicata, cum ipsi ae æquidistet. ex quibus sequitur punctum c esse in sectione. ergo dg c in c cum sectione conuenit. quod demonstrandum proponebatur.

EIVSDEM COMMENTARIVS IN PROPOSITVM THEOREMA.

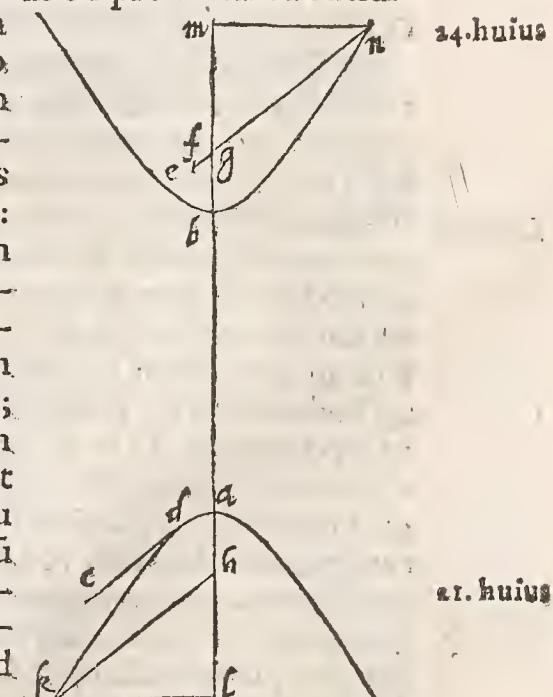
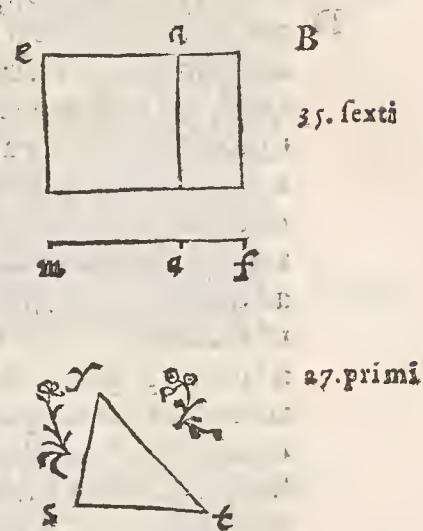
FIAT ut quadratum a e ad triangulum a e d, sic linea m a ad a f.] Demonstratum A est hoc in commentariis in undecimum theorema. si enim describentes quadratum lineæ a e ipsius lateri apposuerimus spatum triangulo a e d æquale; factum iam erit quod quærebamus.

Cum igitur quadrilaterum sit l a d g, & positione data l a, duatur c k b ipsi l a æquidistans, quæ absindat c k g triangulum quadrilatero l a d g æquale.] Hoc ita faciemus. si enim, ut in elementis dividimus, dato rectilineo, uidelicet quadrilatero l a d g æquale, & triangulo dato a e d simile constituerimus triangulum s t y, ita ut latus s y lateri a d respondeat; & fecerimus g k ipsi s y æqualem, & t y æqualem g c; iuncta linea c k factum erit, quod queritur. Quoniam enim angulus ad y æqualis est angulo ad d, hoc est ei, qui ad g; erit triangulum c g k æquale, ac simile triangulo s t y: & angulus c angulo e æqualis; qui quidem alterni sunt. linea igitur c k æquidistat ipsi a e. constat autem lineam m a tangere sectionem, quando a b sit axis; alivquin ipsam secat; & omnino ad diametrum perpendicularis ducitur.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXVIII.

Si recta linea unam oppositarum sectionum contingat: sumatur autem punctum intra alteram sectionem: & per ipsum linea contingenti æquidistans ducatur: producta ad utrasque partes cum sectione conueniet.

SINT oppositæ sectiones, quarum diameter a b: & sectionem, in qua est a contingat quædam recta linea c d: sumatur autem aliquod punctum e intra alteram sectionem: & per e ducatur e f ipsi c d æquidistans. Dico lineam e f productam ad utrasque partes cum sectione conuenire. Quoniam enim ostenditur est lineam c d productam conuenire cum diametro a b: atque est e f ipsi æquidistans: linea e f producta cum diametro conueniet. conueniat autem in g: & ipsi g b æqualis ponatur a h. deinde per h ducatur h k æquidistans e f: & ipsa k l ordinatim applicata, ponatur g m æqualis h: ducaturq; m n ordinatim applicata æquidistans: & g m in directum producatur. Itaque quoniam k l ipsi m n æquidistat; & k h ipsi g n: & est l m una, eademq; recta linea: triangulum k h l simile est triangulo g m n. est autem l h æqualis g m. quare & k l ipsi m n æqualis erit. ideoq; quadratum k l æquale quadrato m n. Rursus quoniam l h æqualis est g m: & a h ipsi b g: communis autem a b: erit b l æqualis a m: & propterea rectangulum b l a rectangulo a m b æquale. ut igitur rectangulum b l a ad quadratum k l, ita rectangulum a m b ad quadratum m n. Sed ut rectangulum b l a ad k l quadratum; ita transuersum figuræ latus ad latus rectum. quare ut rectangulum a m b ad quadratum m n, ita erit latus transuersum ad rectum. ex quibus colligitur, punctum n in sectione esse. ergo linea e f producta in punto n cum sectione conueniet. similiter ostendemus, si ex altera parte producatur, cum sectione conuenire.



A P O L L O N I I P E R G A E I

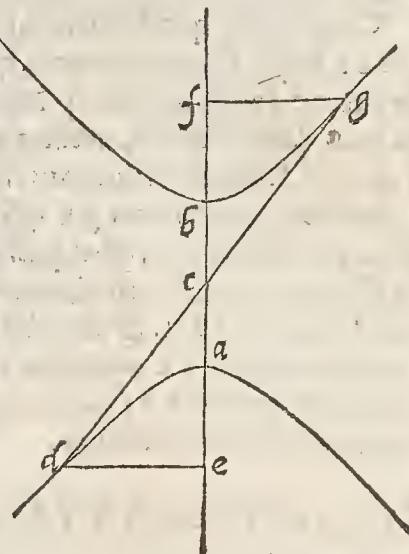
E V T O C I V S.

Quod si cd hyperbolam secet, eadem nihilominus sequentur, quemadmodum in decima ostendit
uo theoremate.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXIX.

Si in oppositis sectionibus recta linea per cētrum ducta occurrat uni
sectioni, ulterius producta alteram quoque secabit.

D Sint sectiones oppositæ, quarum diameter a b: centrū autem c: & linea c d sectionem a d secet. Dico ipsam c d alteram quoque secare, ordinatim enim applicetur d e: ipsiq; a e ponatur æqualis b f: & fg ordinatim ducatur. Quoniam igitur e a, b f æquales sunt; & a b utrisque cō munis; rectangulum b e a rectangulo a f b est æquale. & quoniam ut rectangulum b e a ad quadratum d e, ita est transuersum latus ad rectum. Ut autem rectangulū a f b ad quadratum fg, ita latus transuersum ad rectum. ergo ut rectangulum b e a ad quadratum d e, sic rectangulum a f b ad fg quadratum. Sed æquale est rectangulum b e a rectangulo a f b. quadratū igitur d e quadrato fg est æquale. Quod cum linea e c æqualis sit cf; & de ipsi fg; sitq; recta linea e f; & e d ipsi fg æquidistans: etit & d g recta linea. ergo c d sectionem quoque alteram secabit.



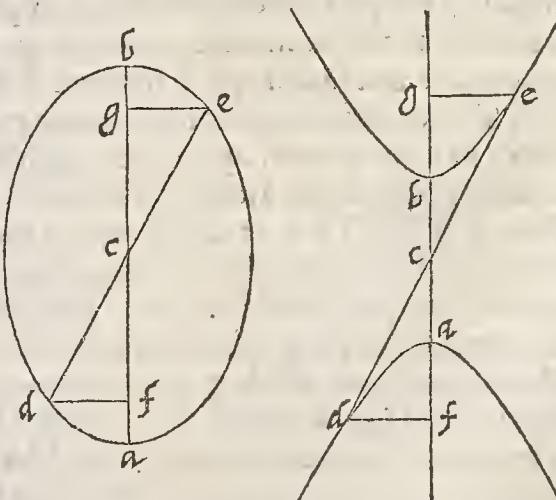
F E D. C O M M A N D I N V S.

ERIT & d g recta linea.] Sequitur enim ex iam dictis triangulum c d e triangulo c g f simile esse: angulumq; d c e angulo g c f æqualem. sed cum e f recta linea sit, anguli g c f, g c e duobus rectis sunt æquales: itemq; anguli d c e, d c f. ergo & reliqui g c e, d c f inter se æquales erunt: & 13. primi. idcirco g c f, f c d æquales duobus rectis. quare d g recta linea sit necesse est.

14. primi. THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

Si in ellipsi, uel oppositis sectionibus recta linea ducatur, ad utrasque centri partes sectioni occurrens; ad centrum bifariam secabitur.

SIT ellipsis, uel oppositæ sectiones, quarum diameter a b, centrum c: & per c ducatur recta linea d c e. Dico c d ipsi c e æqualem esse. ordinatim enim applicetur d f, e g. & quoniam ut rectangulum b f a ad quadratum f d, ita est transuersum latus ad rectum: & ut rectangulum a g b ad quadratum g e, ita latus transuersum ad rectum: erit ut rectangulum b f a ad quadratum f d, ita rectangulū a g b ad quadratum g e: & permutoando ut rectangulum b f a ad quadratum a g b, ita d f quadratum ad quadratum g e. ut autem quadratum d f ad quadratum g e, ita quadratum f c ad ipsum c g quadratum. ergo permutoando ut recta linea b f a ad quadratum f c, ita rectangulum a g b ad quadratum c g. ut igitur in ellipsis componendo, in oppositis uero conuertendo, & per cōuerzionem rationis, quadratum a c ad quadratum c f, sic quadratum b c ad quadratum c g: & permutoando quadratum autem a c æquale est quadrato c b. ergo & quadratum f c quadrato c g æquale erit. idcircoq; linea f c linea c g æqualis. & cum d f, g e inter se æquidistant, necesse est lineam d c ipsi c e æqualem esse.



EVTO

E V T O C I V S.

Vt igitur in ellipsi componendo, in oppositis uero conuertendo, & per conuersio-
nem rationis.] In ellipsi quidem ita dicemus. Quoniam ut rectangulum $a f b$ ad quadratum
 $d f$, ita est rectangulum $a g b$ ad quadratum $g e$. Vt autem quadratum $d f$ ad quadratum $f c$, ita
quadratum $e g$ ad quadratum $g c$: erit ex æquali, ut rectangulum $a f b$ ad quadratum $f c$, ita re-
ctangulum $a g b$ ad quadratum $g c$. & componendo ut rectangulum $a f b$ una cum quadrato $f c$ ad
quadratum $f c$, hoc est quadratum $a c$ ad quadratum $c f$ (etenim recta linea $a b$ secatur in partes
æquales ad punctum c , & in partes inæquales ad f) ita rectangulum $a g b$ una cum quadrato $g c$
ad quadratum $g c$; hoc est propter eandem causam, quadratum $b c$ ad $c g$ quadratum. & permu-
tando ut quadratum $a c$ ad quadratum $c b$, ita $f c$ quadratum ad quadratum $c g$. At uero in op-
positis hoc modo. Quoniam ex æquali est ut rectangulum $b f a$ ad quadratum $f c$, ita rectangulum
 $a g b$ ad $c g$ quadratum: erit conuertendo ut quadratum $f c$ ad rectangulum $b f a$, ita quadratum
 $c g$ ad rectangulum $a g b$: & per conuersionem rationis, ut quadratum $f c$ ad quadratum $c a$, ita
quadratum $g c$ ad $c b$ quadratum. nam cum linea $a b$ bifariam secetur in c , atque ei adjiciatur $f a$,
erit rectangulum $b f a$ una cum quadrato $a c$ æquale quadrato $c f$. quare $c f$ quadratum exuperat
rectangulum $b f a$, ipso $a c$ quadrato. pulchre igitur dictum est sequi illud per conuersionem rationis.

5. secundi.

6. secundi.

F E D . C O M M A N D I N V S.

E t cum $d f, g e$ inter se æquidistent, necesse est lineam de ipsi $c e$ æqualem esse.] B
Quoniam enim æquidistant $d f, g e$, sequitur angulum $c f d$ æqualem esse angulo $c g e$: & propte-
rea triangulum $c d f$ triangulo $c e g$ simile. ergo ut $f c$ ad $c d$, ita $g c$ ad $c e$: & permittendo ut $f c$
ad $c g$, ita $d c$ ad $c e$. æquales autem sunt $f c, c g$, ut demonstratum est. ergo & $d c, c e$ æquales erunt.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

S i in transuerso figuræ latere hyperboles sumatur aliquod pun-
ctum, non minorem abscindens ad uerticem sectionis, quām sit dimi-
dia transuersi lateris figuræ; & ab ipso recta linea sectioni occurrat: si
producatur intra sectionem, ad sequentes ipsius partes cadet.

Sit hyperbole, cuius diameter $a b$: & in ipsa sumatur punctum aliquod c , non mi-
norem abscindens lineam $c b$, quām sit ipsius $a b$ dimidia: & occurrat sectioni quā-
dam recta linea $c d$. Dico $c d$ productam intra sectionem cadere. Si enī fieri po-
test, cadat extra sectionem, ut $c d e$: & à quovis punto e ordinatim applicetur $e g$;
itemq; ipsa $d h$. Sit autem primum linea $a c$ æqualis $c b$. itaque quadratum $e g$ ad
quadratum $d h$ maiorem proportionem habet, quam
quadratum $f g$ ad quadratum $d h$: ut autem quadratum
 $e g$ ad $d h$ quadratum, sic quadratum $g c$ ad quadratum
 ch ; propterea quod $e g$ ipsi $d h$ sit æquidistans: & ut
quadratum $f g$ ad quadratum $d h$, sic rectangulum $a g b$
ad rectangulum $a h b$, propter sectionem. quadratum
igitur $g c$ ad quadratum ch proportionem maiorem
habet; quām rectangulum $a g b$ ad rectangulum $a h b$:
& permittendo quadratum $g c$ ad rectangulum $a g b$ ha-
bet maiorem proportionem, quam quadratum ch ad
rectangulum $a h b$. ergo diuidendo quadratum $c b$ ad re-
ctangulum $a g b$ maiorem habet proportionem, quam
quadratum $c b$ ad rectangulum $a h b$, quod fieri non po-
test. non igitur linea $c d e$ cadet extra sectionem. quare
intra cadet; & id circa quae ab aliquo punto linea $a c$ ad
sectionem ducitur, multo magis cadet intra, quoniam & intra lineam $c d$ cadet.

8. quinti.

4. & 22. Se-
xti.

21. huius.

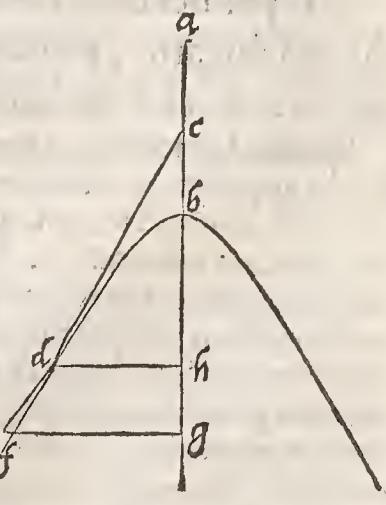
27. quin-
ti elemé-
torum a-
pud Cam-
panum.

29. eiusdē

A

B

C



A ERGO diuidendo quadratum cb ad rectangulum agb maiorem habet; quam quadratum cb ad rectangulum ahb .] Quoniam enim recta linea ab bifariam secatur in c : & ipsi adjicitur linea bg , rectangulum agb una cum quadrato cb aquale est quadrato cg . ergo cg quadratum superat rectangulum agb quadrato cb : & propter eandem causam quadratum cb superat rectangulum ahb , ipso cb quadrato. recte igitur Apollonius dixit, diuidendo illud conclidi.

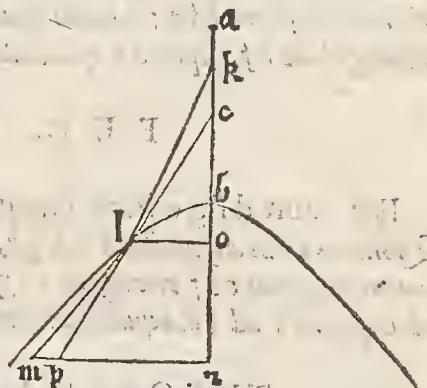
F E D. C O M M A N D I N V S.

B Quod fieri non potest.] Quadratum enim cb ad rectangulum ahb maiorem proportionem habet, quam ad rectangulum agb , quippe cum rectangulum agb ipso ahb maius sit.

Et idcirco quæ ab aliquo puncto linea ac ad sectionem ducitur, multo magis ca-

C det intra.] Sumatur enim in linea ac punctum k , à quo du-
cta kl ad sectionem producatur in m . Dico lineam klm
multo magis intra sectionem cadere. Si enim fieri potest, ca-
dat extra ordinatimq; applicentur mn , lo : & iuncta cl pro-
ducatur, ut secet mn in p . cadet clp intra sectionem, ex ijs
quæ proxime demonstrata sunt. Itaque quoniam linea mn ,
 lo æquidistant, erunt triangula lko , mkn similia: & similia
inter se lco , cpn . Sed trianguli lko angulus kl maior est
angulo cl trianguli lco . ergo & angulus kmn angulo
 cpn maior erit, interior exteriore, quod fieri non potest. At
si ponatur lm cadere quidem intra sectionem, sed extra lineam
 lp , vel in ipsam, nihilominus absurdum sequetur. constat ergo
lineam klm multo magis, quam clp intra sectionem cade-
re. quod quidem demonstrandum proponebatur.

16. & 32.
primi ele-
mentorū



C O R O L L A R I V M.

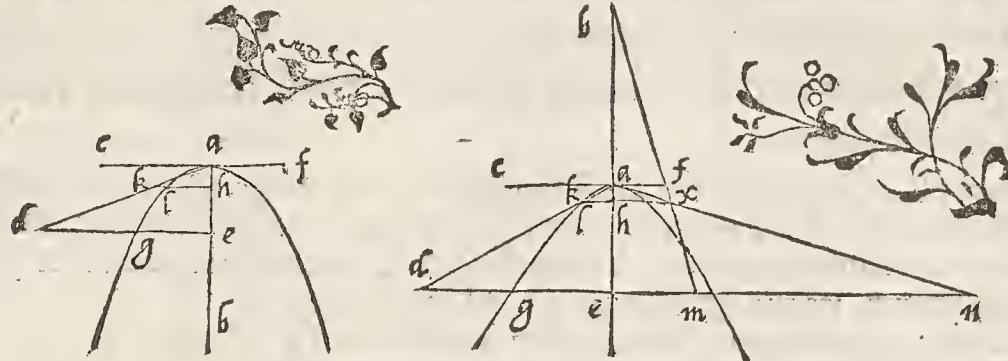
Ex iam demonstratis sequitur lineam, quæ hyperbolam contingit, si produ-
catur secare diametrum inter uerticem & centrum sectionis.

T H E O R E M A X X I I . P R O P O S I T I O X X I I .

SI per uerticem sectionis coni recta linea ordinatim applicata æqui-
distans ducatur, sectionem contingit: & in locum, qui inter coni se-
ctionem & rectam lineam interiicitur, altera recta linea non cadet.

Sit coni sectio prius parabole, cuius diameter ab ; & à punto a ducatur ac ordi-
natim applicata æquidistans. cadet linea ac extra sectionem, quod supra demonstra-
tum est. Dico in locum, qui inter linea ac & sectionem interiicitur, alteram re-
ctam lineam non cadere. Si enim fieri potest, cadat, ut ad : sumaturq; in ipsa quod-
uis punctum d : & ordinatim applicetur de . Sit autem linea af , iuxta quam possunt,
qua à sectione ordinatim ducuntur. & quoniam quadratum de ad quadratum ea
maiorem proportionem habet, quam quadratum ge ad ea quadratum: estq; qua-
dratum ge æquale rectangulo fae . quadratum igitur de ad quadratum ea maio-
rem proportionem habet, quam rectangulum fae ad quadratum ea ; hoc est quam
 fa ad ae . Itaque fiat ut quadratum de ad quadratum ea , sic fa ad ah : & per h du-
catur hlk æquidistans ed . Quoniam igitur est, ut quadratum de ad quadratum
 ea , sic linea fa ad ipsam ah , hoc est rectangulum fae ad quadratum ah : & ut qua-
dratum

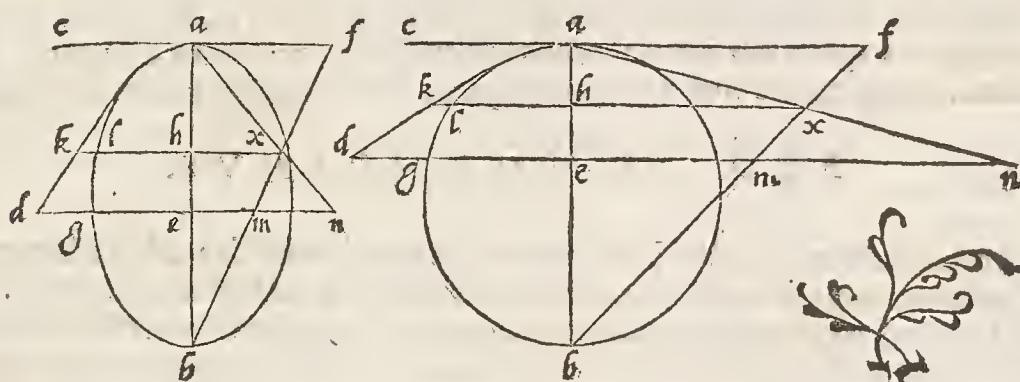
dratum d e ad quadratum e a, ita quadratum k h ad h a quadratum rectangulo autem f a h æquale est quadratum l h. quare ut quadratum k h ad quadratum h a, sic quadratum l h ad quadratum h a. æqualis est igitur linea k h ipsi h l, quod est absurdum, non ergo in locum inter rectam lineam a c & sectionem altera recta linea cadet.



Sit sectio hyperbole, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cuius diameter a b: & rectam figuræ latus a f. iuncta autem b f producatur: & à puncto a ordinatim applicetur a c, quæ extra sectionem cadet, ut ostensum est. Dico in locum, qui inter lineam rectam a c, & sectionem interiicitur, alteram rectam lineam non cadere. cadat enim, si fieri potest; ut a d: & in ipsa sumatur quodus punctū d, à quo d e ordinatim applicetur: & per e ducatur e m ipsi a f æquidistans. Et quoniam g e quadratum æquale est rectangulo a e m; fiat rectangulum a e n quadrato d e æquale: & iuncta a n secet f m in puncto x, deinde per x ipsi f a æquidistans ducatur x h: & per h ducatur h l k æquidistans a c. Itaque cum quadratum d e æquale sit rectangulo a e n, erit ut

12. & 13.
huius.

14. vel 17.
exti.



n e ad ed, ita d e ad ea. & idcirco ut linea n e ad ea, ita quadratum d e ad quadratum e a. Sed ut n e ad ea, ita x h ad h a: & ut quadratum d e ad quadratum e a, ita quadratum k h ad h a quadratum. ut igitur x h ad h a, sic quadratum k h ad quadratum h a. ergo k h media proportionalis est inter x h, h a: & propterea quadratum k h æquale rectangulo a h x. est autem & quadratum l h rectangulo a h x æquale propter sectionem. ergo quadratum k h æquale est quadrato h l: quod fieri non potest. in locum igitur, qui est inter rectam lineam a c & sectionem altera recta linea non cadet.

cor. 10. se
xti

E V T O C I V S.

IN septimo decimo theoremate simpliciter ostendit rectam lineam, quæ per uerticem ducitur, ordinatum applicatae æquidistans, sectionem ipsam contingere. hoc autem loco, id quod. in elementis circulo tertium inesse demonstratur, uniuersè in omni coni sectione ostendit. oportet autem scire, quod d & illic demonstratum est, nullum fortasse sequi absurdum, si linea curua inter sectionem & lineam rectam cadat. at vero ut cadat recta linea, fieri non potest. secabit etenim ipsa, non contingit sectionem, quoniam duæ rectæ lineæ in eodem puncto contingentes esse non possunt. Cum autem hoc theorema multifariam demostretur in diuersis editionibus, nos simpliciorem, & manifestiorem demonstrationem secuti sumus.

T H E O R E M A . X X X I I I . P R O P O S I T I O . X X X I I I .

S i in parabola sumatur aliquod punctum, à quo recta linea ad diametrum ordinatim applicetur, & ei, quæ ab ipsa ex diametro absinditur ad uerticem, æqualis ponatur in directum ab eius extremitate: recta linea, quæ à facto punto ducitur ad illud, quod sumptum fuerat, sectionem continget.

Sit parabole, cuius diameter $a b$: sumptoq; in ea aliquo punto c ; linea $c d$ ordinatim applicetur: & ipsi $d e$ æqualis ponatur $e a$, & iungatur $a c$. Dico lineam $a c$ productam extra sectionem cadere. Si enim fieri potest, cadat intra, ut $c f$: & $g b$ ordinatim applicetur. itaque quadratum $g b$ ad quadratum $c d$ maiorem proportionem habet, quam quadratum $f b$

s. quinti

A ad quadratum $c d$: & ut quadratum $f b$ ad quadratum $c d$,

20. huius ita quadratum $b a$ ad quadratum $a d$. ut autem quadratu-

23. quinti tum $g b$ ad $c d$ quadratum, ita linea $b e$ ad $e d$. ergo $b e$ ad

B $e d$ maiorem proportionem habet, quam $b a$ quadratum

27. quinti ad quadratum $a d$: sed ut $b e$ ad $e d$, ita rectangulum $b e a$

apud Cā. quater sumptum ad rectangulum $a e d$ quater. rectangu-

C lum igitur $b e a$ quater ad rectangulum $a e d$ quater ma-

D iorem habet proportionem, quam quadratum $b a$ ad qua-

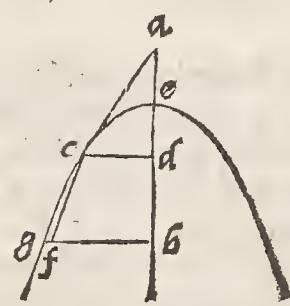
dratum a d : & permutando rectangulum $b e a$ quater ad

quadratum $a b$ maiorem proportionem habet, quam rectangulum $a e d$ quater ad

quadratum $a d$: quod fieri minime potest. nam cum linea $a e$ ipsi $e d$ sit æqualis, re-

ctangulum $a e d$ quater sumptum æquale est quadrato $a d$: rectangulum uero $b e a$

quater sumptum quadrato $b a$ est minus: neque enim punctum e lineam $a b$ bifariam secat. linea igitur $a c$ non cadet intra. quare sectione ipsam contingat necesse est.



F E D . C O M M A N D I N V S .

A E t. ut quadratum $f b$ ad quadratum $c d$, ita quadratum $b a$ ad quadratum $a d$.] Ob similitudinem triangulorum $f a b, c a d$. quippe cum ponamus $a c f$ lineam rectam esse.

B Sed ut $b e$ ad $e d$, ita rectangulum $b e a$ quater sumptum ad rectangulum $a e d$ quater.] Nam ut $b e$ ad $e d$, ita rectangulum $b e a$ ad rectangulum $a e d$: ut autem rectangulum $b e a$ ad rectangulum $a e d$, ita rectangulum $b e a$ quater sumptum ad rectangulum $a e d$ itidem

i. sexti quater sumptum, ex decima quinta elementorum. quare ex undecima eiusdem constat propositum.

C Nam cum linea $a e$ ipsi $e d$ sit æqualis, rectangulum $a e d$ quater sumptum æquale est quadrato $e d$.] Quadratum enim $a d$ ex quarta secundi elementorum æquale est quadratis $a e, e d$, & duobus rectangulis $a e d$. Sed quadrata $a e, e d$ duobus rectangulis $a e d$ æqualia sunt, quod linea $a c, e d$ sint æquales. ergo rectangulum $a e d$ quater sumptum quadrato $a d$ æquale erit.

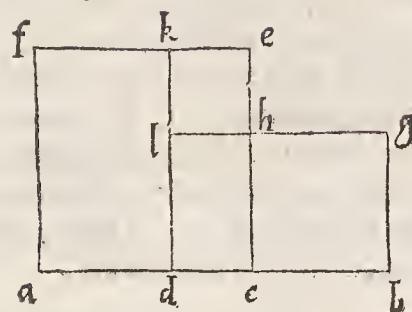
D Rectangulum uero $b e a$ quater sumptum quadrato $b a$ est minus.] Rursus enim eadem ratione quadratum $b a$ æquale est quadratis $b e, e a$, & duobus rectangulis $b e a$. Sed cum lineæ $b e, e a$ inæquales sint, duo rectangula $b e a$ minora sunt quadratis $b e, e a$, ut mox demonstrabitur. rectangulum igitur $b e a$ quater sumptum minus est quadrato $b a$. illud uero nos hoc lemmate demonstrabimus.

Si recta linea in partes inæquales secetur, earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur; & quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

Secetur recta linea $a b$ in partes inæquales in c , ita ut $a c$ maior sit, quam $c b$: & ipsi $c b$ æqualis ponatur $a d$. Dico quadrata $a c, c b$ æqualia esse rectangulo, quod bis $a c b$ continetur; & quadrato lineæ $d c$; qua scilicet $a c$ ipsam $c b$ superat. constituantur enim ex lineis $a c, c b$ quadra-

dra

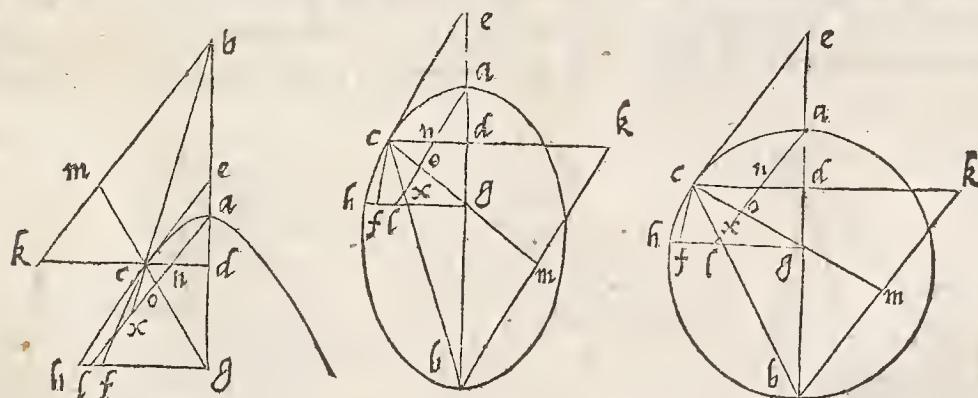
drata ac ef, cb gh: & per d
ducta linea dk, qua ipsi ce
equidistet, producatur gh ad
dk in l. Itaque quoniam ad,
cb aequales sunt, & utriusque
communis dc; erit db ipsi ac
equalis: ideoq; rectangula ak,
dg erunt aequalia ei, quod bis
acb continetur. quadratum
autem lh ek aequale est qua-
drato linea dc. ergo quadrata
ac, cb aequalia sunt rectangu-
lo, quod bis continetur acb;
& linea dc quadrato: quod
demonstrare oportebat.



THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

Si in hyperbola, uel ellipsis, uel circuli circumferentia sumatur aliquod punctum: ab eoq; recta linea addiametrum ordinatim applicetur: & quam proportionem habent linea interiectae inter applicatam, & terminos transuersi lateris figuræ, eandem habeant inter se partes lateris transuersi, ita ut quæ sunt ad uerticem partes sibi ipsis respondeant: recta linea coniungens punctum, quod in transuerso latere sumitur, & punctum, quod est in sectione, sectionem ipsam continget.

Sit hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter ab; sumaturq; A aliquod punctum in sectione, quod sit c: & ab eo linea cd ordinatim applicetur: fiat autem ut bd ad da, sic be ad ea: & iungatur ec. Dico lineam ce sectionem contingere. Si enim fieri potest, secet, ut ec f: & sumpto in ea aliquo punto f ordinatim applicetur gh: per puncta uero ab ducantur al, bk, quæ ipsi ec aequidistent: & iunctæ dc, bc, gc ad puncta mxk producantur. Itaque quoniam ut bd ad da, ita est



be ad ea: & ut bd ad da, sic be ad ea, ita b cad ex, hoc est bk ad x: erit ut bk ad an, ita bk ad nx. aequalis est igitur an ipsi nx. & propterea rectangulum anx maius est rectangulo aox. quare linea nx ad xo maiorem habet proportionem, quam o a ad an. Sed ut nx ad xo, ita kb ad bm. ergo kb ad bm maiorem proportionem habet, quam o a ad an: ideoq; rectangulum, quod fit ex kb, an maius est eo, quod ex bm, ao. Sequitur igitur rectangulum ex kb, an ad quadratum ce maiorem proportionem habere quam rectangulum ex mb, ao ad quadratum ce. at uero ut rectangulum ex kb, an ad quadratum ce, sic rectangulum bda ad quadratum de, propter similitudinem triangulorum bkd, and, ecd: & ut rectangulum ex mb, ao

4. sexti.
2. sexti
2. quinti.

B

C

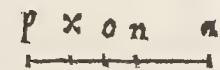
F

ad quadratum c e, sic rectangulum b g a ad quadratum g e, ergo b d a rectangulum
 27. quinti ad quadratum d e maiorem proportionem habet, quam rectangulum b g a ad qua-
 dratum g e, & permutando rectangulum b d a ad rectangulum a g b maiorem habet
 21. huius proportionem, quam quadratum d e ad e g quadratum. Sed ut rectangulum b d a
 4. & 22. se ad ipsum a g b, ita quadratum c d ad quadratum g h: & ut quadratum d e ad qua-
 dratum e g, sic quadratum c d ad quadratum f g. quadratum igitur c d ad quadratum
 g h maiorem proportionem habet, quam quadratum c d ad quadratum f g: & idcir-
 co linea h g minor est ipsa g f: quod fieri non potest. linea igitur e c non secat. qua-
 re sectionem ipsam contingat necesse est.

E V T O C I V S.

SCIENDVM est lineam c d, quae ad diametrum ordinatim applicatur, in hyperbola quidem determinare lineas b d, d a, & relinquere ipsam b a, quae in proportionem linearum b d, d a secari debet; in ellipsi uero & circuli circumferentia contrauenit: nam cum secet lineam b a, necesse est ut inquiramus b e, e a in determinata proportione, in qua uidelicet sunt b d, d a. neque enim difficile est data proportione, aequalem ipsi exhibere. Sed & illud scire oportet, in unaquaque sectione duas descriptiones esse, nempe puncto f uel intra c, uel extra sumpto, ita ut omnes casus sex sint. utitur autem duobus lemmatibus, quae nos deinceps conscribemus.

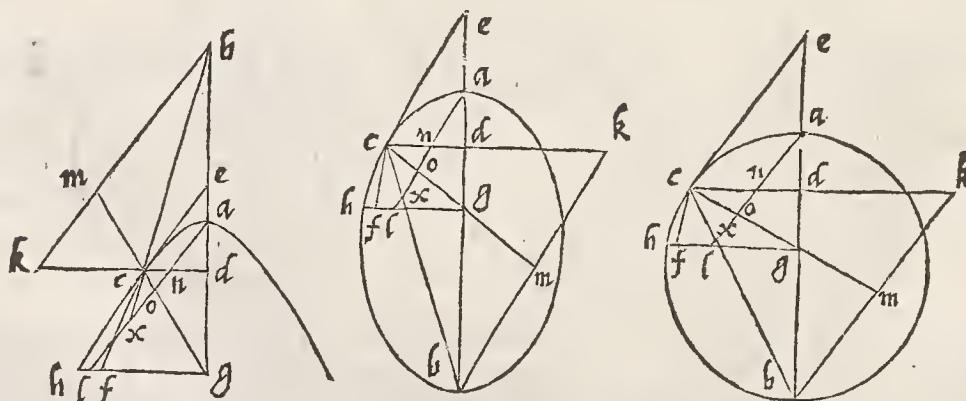
B. Et propterea rectangulum a n x maius est rectangulo a o x. quare linea n x ad x o maiorem proportionem habet, quam o a ad a n.] Quoniam enim rectangulum a n x rectangulo a o x maius est, fiat rectangulo a n x aequalis rectangulum, quod ipsa a o, & alia quapiam linea, uidelicet x p continetur, quea quidem maior erit, quam x o. est igitur ut o a ad a n, sic n x ad x p. sed n x ad x o maiorem proportionem habet, quam ad x p. ergo o a ad a n minorem habet proportionem, quam n x ad x o: & ideo n x ad x o maiorem habet, quam o a ad a n.



Sed contra illud etiam constat, si n x ad x o maiorem proportionem habeat, quam o a ad a n, & rectangulum a n x maius esse rectangulo a o x.

Fiat enim ut o a ad a n, ita n x ad aliam lineam maiorem ipsa x o, uidelicet ad x p. quare rectangulum a n x aequalis est rectangulo, quod a o, x p continetur. rectangulum igitur a n x rectangulo a o x maius erit.

C. At uero ut rectangulum ex k b, a n ad quadratum c e, sic rectangulum b d a ad quadratum d e.] Quoniam igitur ob linearum a n, e c, k b aequalitatem, ut a n ad e c, ita est ad ad d e: ut autem e c ad k b, ita e d ad d b. quare ex aequali, ut a n ad k b, ita ad ad d b:



1em. 22 decimi. 4. & 22. se gti & propterea ut quadratum a n ad rectangulum ex a n, k b, ita quadratum a d ad rectangulum a d b. Sed ut quadratum e c ad quadratum a n, ita quadratum e d ad quadratum d a. ergo ex aequali ut quadratum e c ad rectangulum ex k b, a n, ita quadratum e d ad rectangulum a d b: & conuertendo ut rectangulum ex k b, a n ad quadratum e c, ita rectangulum b d a ad quadratum d e.

F. E. D. COMMANDI NOV. S.

Fiat autem, ut $b:d \text{ ad } d:a$, sic $b:e \text{ ad } e:a$.] In hyperbola quomodo illud fiat perspicuum A est: at uero in ellipsi, uel circulo, sumatur in $d:b$ linea, quæ sit æqualis $d:a$: sitq; $d:g$, ut in proposi- tis figuris; & fiat ut $b:g$ ad $g:d$, ita $b:a$ ad $a:e$. erit enim componendo, ut $b:d$ ad $d:g$, hoc est ad $d:a$ ei æqualem, ita $b:e$ ad $e:a$: quod faciendum proponebatur.

Et propterea rectangulum $a:nx$ maius est rectangulo $a:ox$. quare linea nx ad xo B maiorem proportionem habet quam oa ad an .] Illud Pappus ad principium septimi li- bri hoc lemmate demonstrauit.

Habeat a ad b maiorem proportionem, quam c ad d . Dico rectangulum contentum lineis $a:d$ maius esse eo, quod $b:c$ continetur.

Fiat enim ut a ad b , ita c ad e . ergo c ad e maiorem proportionem habet, quam ad d . & id circa e minor est, quam d . Itaque posita a communi altitudine, erit rectan- gulum ex $a:e$ minus rectangulo ex $a:d$. Sed rectangulum ex $a:e$ æquale est ei, quod ex $b:c$. rectangulum igitur ex $b:c$ minus est rectangulo ex $a:d$: & propterea rectangulum ex a:d maius eo, quod ex $b:c$.

Similiter etiam si minor sit proportio, rectan- gulum rectangulo minus erit.

Sed rursus sit rectangulum ex $a:d$ maius re- ctangulo ex $b:c$. Dico a ad b maiorem habere proportionem, quam c ad d .

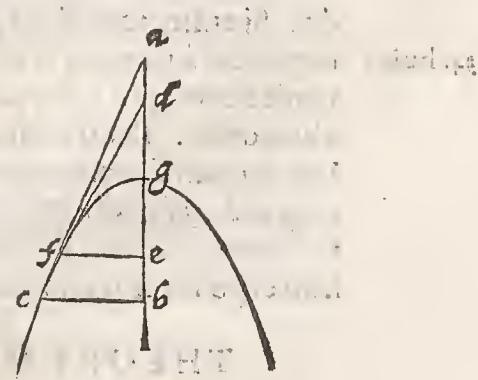
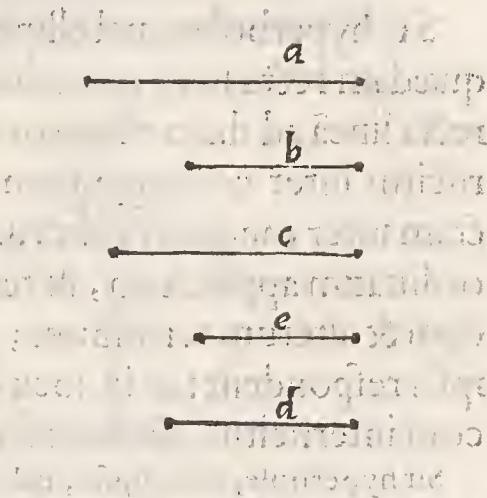
Ponatur namque rectangulo ex $a:d$ æquale rectangulum quod ex $b:c$. erit rectangulum ex $b:c$ maius eo, quod ex $b:c$. quare & e maior, quam c . Ut autem a ad b , ita e ad d . Sed e ad d ma- iorem habet proportionem, quam c ad d . ergo & a ad b habebit maiorem, quam c ad d . 14. sexti

At uero ut rectangulum ex $k:b, a:n$ ad quadratum $c:e$, sic rectangulum $b:d$ ad qua- dratum $d:e$.] Ex tertio lemmate Pappi.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XXXV.

Si parabolæ recta linea contingat, conueniens cum diametro extra sectionem; quæ à tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abscedet ex diametro ad uerticem sectionis lineam æqualem ei, quæ inter ipsam & contingentem interiicitur: & in locum, qui est inter contingentem & sectionem alia recta linea non cadet.

Sit parabole, cuius diameter $a:b$: ordinatimq; applicetur $b:c$: & sit $a:c$ linea sectionem contingens. Dico lineam $a:g$ ipsi $g:b$ æqualem esse. Si enim fieri potest, sit inæqualis: & ipsi $a:g$ æqualis ponatur $g:e$: linea autem $e:f$ ordinatim applicetur: & iungantur $a:f$. ergo $a:f$ producta conueniet cum linea $a:c$: quod fieri non potest; duarum enim rectarum linearum iidem termini esent. non ergo inæqualis est $a:g$ ipsi $g:b$. quare necessario erit æqualis. Rursus dico in locum, qui est inter $a:c$, & sectionem, aliam rectam li- neam non cadere. Si enim fieri possit, cadat $c:d$: ipsiq; $g:d$ æqualis ponatur $g:e$: & $e:f$ ordinatim applicetur. ergo à punto d ad f ducta linea contingit sectionem. quare producta extra ipsam cadet: & propterea conueniet cum $d:c$, eruntq; duarum linearum rectarum iidem termini: quod est absurdum. non igitur in locum, qui est inter sectionem, & lineam $a:c$ alia re- cta linea cadet.

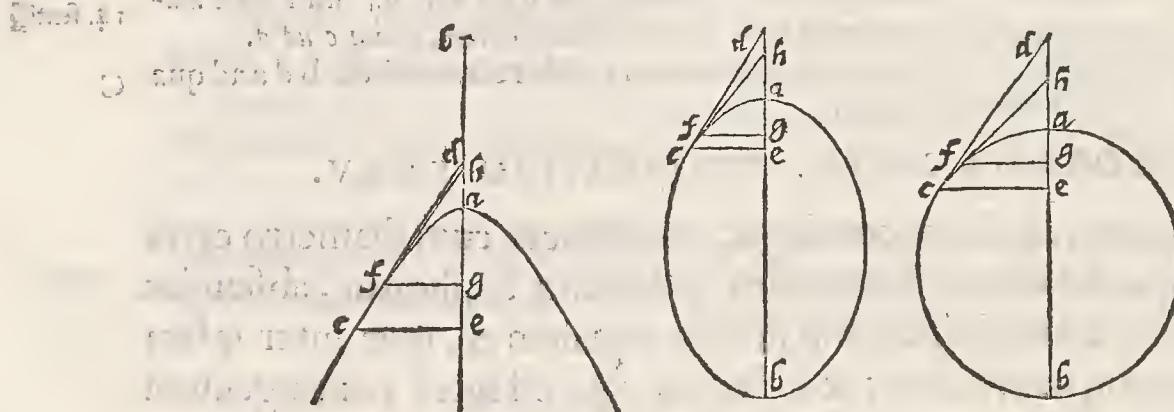


ERGO af producta conueniet cum linea $a c$: quod fieri non potest; duarum enim rectarum linearum iidem termini essent.] Nam linea af ex trigesima tertia propositione huins sectionem contingit. quare si producatur, cadet extra sectionem; & id circa conueniet cum linea $a c$, ita ut sint duarum linearum rectarum iidem termini: quod est absurdum; quoniam duæ rectæ lineaæ superficiem intra se se concluderent. alia est enim linea, quæ à puncto a ad f ; alia quæ ab eodem puncto ad c ducitur: quarum linearum iidem termini erunt; unus uidelicet ad a , alter ad c .

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XXXVI.

Si hyperbolam, uel ellipsim, uel circuli circumferentiam contingat quædam recta linea conueniens cum transuerso figuræ latere: & à tactu recta linea ad diametrum ordinatim applicetur: erit ut linea, quæ interiicitur inter contingentem, & terminum transuersi lateris ad interieclam inter eandem & alterum lateris terminum, ita linea, quæ est inter ordinatim applicatam, & terminum lateris ad eam, quæ est inter eandem & alterum terminum; adeo ut continuatae inter se sint, quæ sibi ipsis respondent: & in locum, qui inter contingentem, & sectionem coni interiicitur, altera recta linea non cadet.

Sit hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter $a b$: linea uero contingens sit $c d$. & $c e$ ordinatim applicetur. Dico ut $b e$ ad $e a$, sic esse $b d$ ad



d a. Si enim non est ita, sit ut $b d$ ad $d a$, sic $b g$ ad $g a$: & ordinatim applicetur $g f$. ergo quæ à punto d ad f ducitur recta linea sectionem continget, & producta conueniet cum ipsa $c d$. quare duarum rectarum linearum iidem termini erunt: quod est absurdum. Dico etiam in locum, qui inter sectionem & lineam $c d$ interiicitur, nullam rectam lineam cadere. Si enim fieri potest, cadat $c h$: & ut $b h$ ad $h a$, ita fiat $b g$ ad $g a$: & $g f$ ordinatim applicetur. iuncta ergo $h f$, si producatur, conueniet cum ipsa $h c$; atque erunt duarum linearum rectarum iidem termini: quod fieri non potest. non ergo inter sectionem & lineam $c d$ altera recta linea cadet.

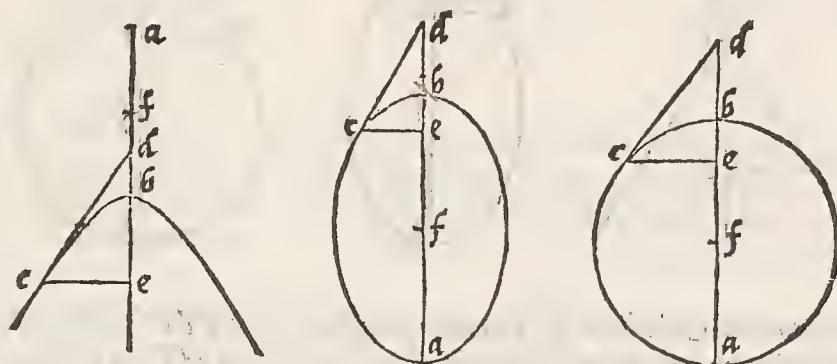
THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XXXVII.

Si hyperbolam, uel ellipsim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat: & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: quæ interiicitur inter applicatam & centrum sectionis

nis unà cum interiecta inter contingentem, & sectionis centrum, continebit rectangulum æquale quadrato lineæ, quæ est ex centro sectionis: sed unà cum ea, quæ inter applicatam & contingentem interiicitur, continet spatium, quod ad quadratum lineæ applicatæ eandem proportionem habet, quam transuersum figuræ latus ad rectum.

S I T hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b: ducaturq; linea contingens c d: & c e ordinatum applicetur: centrum autem sit f. Dico rectangulum d f e quadrato f b æquale esse: & ut rectangulum d' e f ad quadratū e c, ita transuersum latus ad rectum. quoniam enim c d contingit sectionem; & ordinatum applicata est c e: erit ut a d ad d b, ita a e ad e b. ergo componendo, ut utraque a d, d b ad d b, ita utraque a e, e b ad e b: & antecedentium dimidia. In hyperbola quidem in hunc modum argumentabimur. Sed utriusque a e, e b dimidia est f e; ip-

36. huius.



sius autem a b dimidia f b. ut igitur f e ad e b, ita f b ad b d: & per conuersionem rationis, ut e f ad f b, ita f b ad f d. quare rectangulum e f d quadrato f b est æquale. &

17. sexti

quoniam ut f e ad e b, ita f b ad b d; hoc est a f ad b d: erit permutando ut a f ad f e, ita d b ad b e: & componendo, ut a e ad e f, ita d e ad e b. ergo rectangulum a e b æquale est rectangulo f e d. sed ut rectangulum a e b ad quadratum c e, ita transuersum latus ad rectum. Vt igitur rectangulum f e d ad quadratum e c, ita transuersum latus ad rectum.

16. sexti.

21. huius.

In ellipsi uero, & circuli circumferentia hoc modo sed utriusque a d d b dimidia est d f; & ipsius a b dimidia f b. ergo ut f d ad d b, ita f b ad b e: & per conuersionem rationis, ut d f ad f b, ita b f ad f e. rectangulum igitur d f e æquale est quadrato b f. at uero rectangulum d f e rectangulo d e f unà cum quadrato f e est æquale: & quadratum b f æquale rectangulo a e b unà cum quadrato f e. commune auferatur, uide licet quadratum f e. reliquum igitur rectangulum d e f ad quadratum c e est ut rectangulum a e b ad idem c e quadratum. sed ut rectangulum a e b ad quadratum c e, ita transuersum latus ad rectum. ergo ut rectangulum d e f ad quadratum e c, ita transuersum latus ad rectum.

E V T O C I V S.

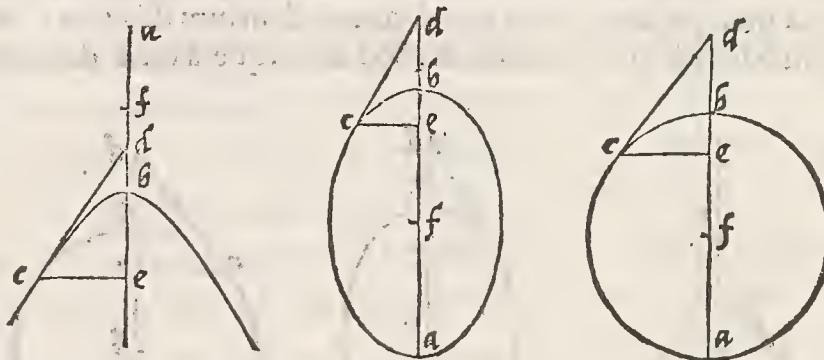
E x his theorematibus patet, quomodo per datum punctum in diametro uel uertice sectionis contingentem lineam ducere possimus.

F E D. C O M M A N D I N V S.

Ex iis, quæ demonstrata sunt, constat lineam c d contingere sectionem, siue rectangulum d f e æquale sit quadrato f b; siue d e f rectangulum ad quadratum e c eam proportionem habeat, quam transuersum figuræ latus ad rectum.

APOLLONII PERGAEI

17. sexti Sit enim hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter $a b$: & sumatur ali-
quod punctum c in sectione; à quo recta linea $c e$ ad diametrum ordinatum applicetur. sit autem
sectionis centrum f : fiatq; ut $e f$ ad $f b$, ita $b f$ ad $f d$: & iungatur $c d$. erit rectangulum $d f e$ qua-
drato $f b$ æquale. itaque dico lineam $c d$ sectionem contingere. Quoniam enim in hyperbola est ut
 $e f$ ad $f b$, ita $b f$ ad $f d$: per conuersionem rationis erit ut $f e$ ad $e b$, ita $f b$ ad $b d$: & antecedentium dupla. sed lineæ $a e, e b$ duplæ sunt ipsius $f e$: & lineæ $a d, d b$ duplæ $f b$. quare ut $a e, e b$ ad
 $e b, ita a d, d b$ ad $d b$: & diuidendo ut $a e$ ad $e b$, ita $a d$ ad $d b$. ergo ex trigesima quarta huius li-
næ $c d$ sectionem contingit. In ellipsi uero & circuli circumferentia, ut $d f$ ad $f b$, ita est $b f$ ad $f e$.
quare per conuersionem rationis, ut $f d$ ad $d b$, ita $f b$ ad $b e$, & antecedentium dupla. Sunt autem
lineæ $a d, d b$ ipsius $f d$ duplæ, & $a e, e b$ duplæ $f b$. Ut igitur $a d, d b$ ad $d b$, ita $a e, e b$ ad $e b$: &
34. huius diuidendo ut $a d$ ad $d b$, ita $a e$ ad $e b$. ex quibus sequitur, ut linea $c d$ sectionem contingat.



Rursus eadem maneant, & in linea $f b$ sumatur punctum d , ita ut $d e f$ rectangulum ad qn. idra-
tum $c e$ eam proportionem habeat, quam transuersum figuræ latus ad latus rectum. Dico lineam
21. huius $c d$ contingere sectionem. Quoniam enim rectangulum $d e f$ ad quadratum $c e$ est; ut transuersum la-
9. quinti. tus ad rectum; & ut transuersum latus ad rectum, ita $a e b$ rectangulum ad quadratum $c e$: erit re-
ctangulum $d e f$ ad quadratum $c e$, ut rectangulum $a e b$ ad idem quadratum: & propterea rectan-
14. sexti. gulum $a e b$ rectangulo $d e f$ est æquale. ergo in hyperbola, ut $a e$ ad $e f$, ita $d e$ ad $e b$: & diuiden-
do, permutandoq; ut $a f$, hoc est $f b$ ad $b d$, ita $f e$ ad $e b$: & per conuersionem rationis, ut $b f$ ad $f d$,
16. sexti. ita $e f$ ad $f b$. rectangulum igitur $d f e$ quadrato $f b$ est æquale. & ideo ex ijs, quæ proxime demon-
strauiimus; linea $c d$ sectionem contingit. sed in ellipsi, & circuli circumferentia, quoniam rectangu-
lum $a e b$ æquale est rectangulo $d e f$, addito utriusque quadrato $f e$; erit rectangulum $a e b$ una cum
5. secundi. quadrato $f e$ æquale rectangulo $d e f$ una cum quadrato $f e$. rectangulo autem $a e b$ una cum qua-
drato $f e$ æquale est quadratum $b f$: & rectangulo $d e f$ una cum quadrato $f e$ æquale rectangulum
d $f e$. ergo rectangulum $d f e$ æquale est quadrato $f b$: & propterea linea $c d$ sectionem ipsam contin-
gat necesse est: quæ omnia demonstrare oportebat. Ad hoc autem theorema quartum lemma Pap-
pi spectare uidetur.

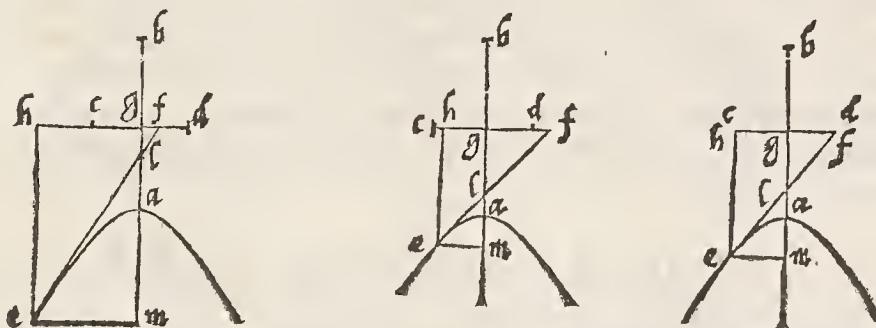
THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

S I hyperbolæ, uel ellipsim, uel circuli circumferentiam recta linea
contingens cum secunda diametro conueniat: & à tactu ad diametrum
applicetur linea alteri diametro æquidistans: quæ interiicitur inter ap-
plicatam, & sectionis centrum unâ cum interiecta inter contingentem,
& centrum sectionis, continebit rectangulum æquale quadrato, quod
fit ex dimidia secundæ diametri: sed unâ cum ea, quæ inter applicatam,
& contingentem interiicitur, spatium continebit, quod ad quadratum
applicatæ eam proportionem habeat, quam figuræ rectum latus ad
transuersum.

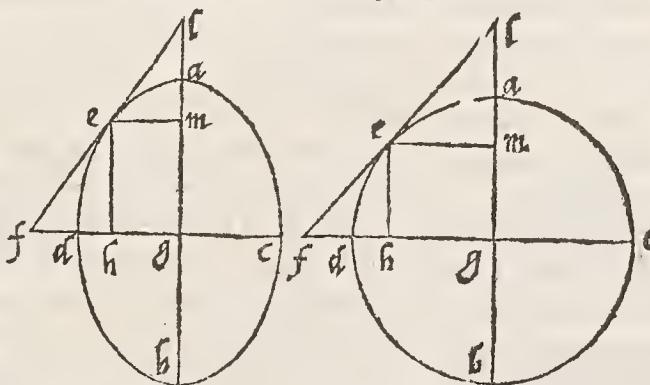
S I T hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter $a g b$, secun-
da diameter $c g d$; linea uero sectionem contingens sit $e l f$, quæ conueniat cum $c d$ in f ,
& $h e$

& h e ipsi ab æquidistet. Dico rectangulum fgh quadrato cg æquale esse: & ut rectangulum ghf ad quadratum he, ita rectū figuræ latus ad latus transuersum . ordinatim namque applicata me, erit ut rectangulum gml ad quadratum me, ita transuersum latus ad rectum . sed ut transuersum latus ba ad cd, ita cd ad latus rectum . ergo ut transuersum latus ad rectum, ita quadratum ab ad quadratum cd: & ita horum quadratorum quartæ partes, uidelicet quadratum ga ad quadratum gc. ut igitur rectangulum gml ad quadratum me, ita quadratum ag ad gc quadratum. sed rectangu-

37. huius
diff. 2. dia
metri.
cor. 20. se
xti.
23. sexti



lum gml ad quadratum me compositam proportionem habet ex proportione gm ad me, hoc est ad gh, & ex proportione lm ad me. quare conuertendo proportio quadrati me ad rectangulum gml componitur ex proportione em ad mg, hoc est hg ad gm, & ex proportione em ad ml, hoc est fg ad gl. ergo quadratum cg ad 4. sexti quadratum ga compositam habet proportionem ex proportione hg ad gm, & ex proportione fg ad gl. hæc autem eadem est, quæ rectanguli fgh ad rectangulum mgl. Ut igitur rectangulum fgh ad mgl rectā gulm, ita quadratum cg ad quadratum ga: & permutando ut rectangulum fgh ad quadratum cg, ita rectangulum mgl ad quadratum ga. rectangulum autem mg l æquale est quadrato ga. ergo & rectangulum fgh quadrato cg æquale erit. Rursus ut rectum latus ad transuersum, ita quadratum em ad rectangulum gml. quadratum uero em ad rectangulum gml compositam proportionem habet ex proportione em ad mg, hoc est gh ad he; & ex proportione em ad ml, hoc est fg ad gl; hoc est fh ad he. quæ proportio eadem est, quam habet rectangulum fhg ad quadratum he. ergo ut rectangulum fhg ad quadratum he, ita rectum latus ad transuersum .



23. sexti

37. huius
21. huius

4. sexti

Ildem positis ostendendum est, ut linea, quæ inter tangentem, & terminum secundæ diametri ad partes applicatae interiicitur, ad eam, quæ inter tangentem, & alterum terminum secundæ diametri, ita esse lineam quæ est inter alterum terminum, & applicatam ad eam, quæ inter alterum terminum, & applicatam.

Quoniam enim æquale est rectangulum fgh quadrato gc, hoc est rectangulo cg d; nam linea cg æqualis est ipsis gd: erit fgh rectagulum rectangulo cg d æquale. ergo ut fg ad gd, ita cg ad gh: & per conuerzionem rationis, ut gf ad fd, ita gc ad dh: & antecedentium dupla. est autem ipsis g f dupla utraque cf, fd, propterea quod cg est æqualis gd: & ipsis gc dupla dc. Ut igitur utraq; cf, fd ad fd, ita dc ad dh: & diuidendo ut cf ad fd, ita dh ad hd. quod demonstrare oportebat.

14. sexti

Ex iam dictis manifestum est lineam cf contingere sectionem, siue rectangulum fgh æquale sit quadrato gc, siue fhg rectangulum ad

A P O L L O N I I P E R G A E I

quadratum h e eam, quam diximus, proportionem habeat: conuerso enim modo illud facile ostendetur.

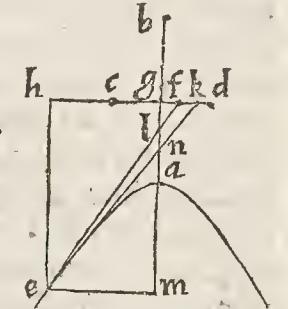
E V T O C I V S.

*I*N aliquibus exemplaribus hoc theorema in sola hyperbolā demonstratum inuenimus. Sed hoc loco uniuersaliter demonstratur, quoniam eadem contingunt & in alijs sectionibus. Apollonio autem usum est non solum hyperbolē, sed etiam ellipſim secundam diametrum habere, ut ſæpe ex ipſo in superioribus didicimus. & in ellipſi quidem caſum non habet, in hyperbola uero tres habet caſus; punctum enim f, in quo linea ſectionem contingens cum ſecunda diametro conuenit, uel eſt in fra d, uel in ipſo d, uel ſupra: & propterea punctum h ſimiliter tres locos obtinet. attendendum autem eſt, cum f cadit in fra d, & h in fra c cadere: cum uero f cadit in d, & h in c: & cum f ſupra d, & h ſupra c cadet.

F E D . C O M M A N D I N V S.

Ex iam dictis manifestum eſt lineam e f contingere ſectionem, ſiue reſtangulum f g h æquale ſit &c.

*S*it enim hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b, ſecunda diameter c g d: & ſumatur in ſectione aliquod punctum e; à quo ad diametrum ordinatim applicetur e m: & ad ſecundam diametrum ducatur e h, ipſi a b æquidistantes. Sumpto autem in linea g d puncto f, ita ut reſtangulum f g h æquale ſit quadrato c g; iungatur e f ſecans diametrum in l. Dico linea e f ſectionem contingere. Si enim fieri potest, non contingat ſectionem linea e l f, ſed alia linea e n k. Eodem modo, quo uſus eſt Apollonius, demonstrabitur reſtangulum k g h quadrato c g æquale eſſe. ſed eidem quadrato c g ponitur æquale reſtangulum f g h. reſtangulum igitur k g h reſtangulo f g h eſt æquale. Ut autem reſtangulum k g h ad reſtangulum f g h, ita linea k g ad linea f g. Ergo linea k g æqualis eſt ipſi f g: quod fieri nullo modo potest. ſequitur igitur linea e l f neceſſario ſectionem contingere. Iſdem manentibus, habeat reſtangulum f h g ad quadratum h e eandem proportionem, quam reſtum latus ad transuersum. Rurſus dico linea e l f contingere ſectionem. habebit enim quadratum h e ad reſtangulum f h g proportionem eandem, quam transuersum latus ad reſtum. ſed proportio quadrati h e ad reſtangulum f h g composita eſt ex proportione e b ad h f, hoc eſt l m ad m e, & ex proportione e b ad h g, hoc eſt g m ad m e: quæ quidem eſt ea, quam habet reſtangulum g m l ud quadratum m e. ergo reſtangulum g m l ad quadratum m e eſt, ut transuersum latus ad reſtum. quare ex his, quæ in antecedenti demonstrauimus, linea e l f ſectionem continget.



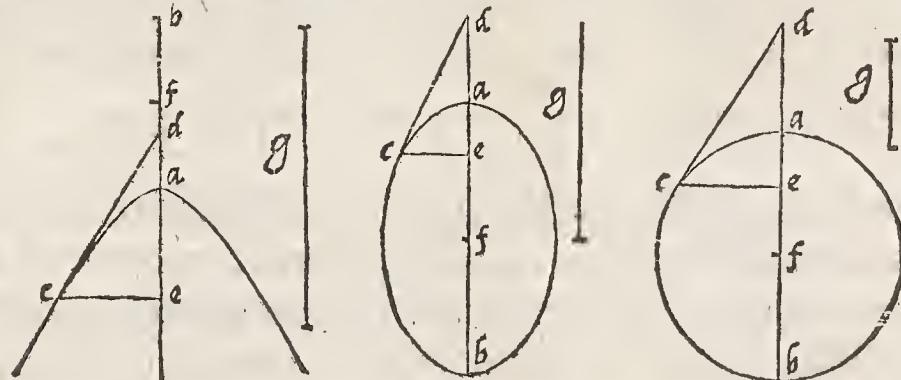
THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XXXIX.

*S*i hyperbolē, uel ellipſim, uel circuli circumferentiam reſta linea contingens cum diametro conueniat: & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: ſumpta quavis linea ex duabus, quarum altera interiicitur inter applicatam, & centrum ſectionis; altera inter applicatā, & contingente: habebit ad eam applicata proportionem compositam ex proportione, quam habet altera dictarum linearum ad applicatam, & ex proportione, quam reſtum figuræ latus habet ad transuersum.

*S*it hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b; centrum autem i ducaturq; linea c d ſectionem contingens: & c e ordinatim applicetur. Dico ce ad alteram linearum fe, e d proportionem habere compositam ex proportione, quæ in

quam habet rectum figuræ latus ad transuersum, & ex ea quam altera dictarum linearum f e, e d habet ad ipsam e c. sit enim rectangulum f e d æquale rectangulo, quod fit ex e c, & linea, in qua g. & quoniam ut rectangulum f e d ad quadratum c e, ita transuersum latus ad rectum: atque est rectangulum f e d rectangulo ex e c, & g æquale: erit

37. huius



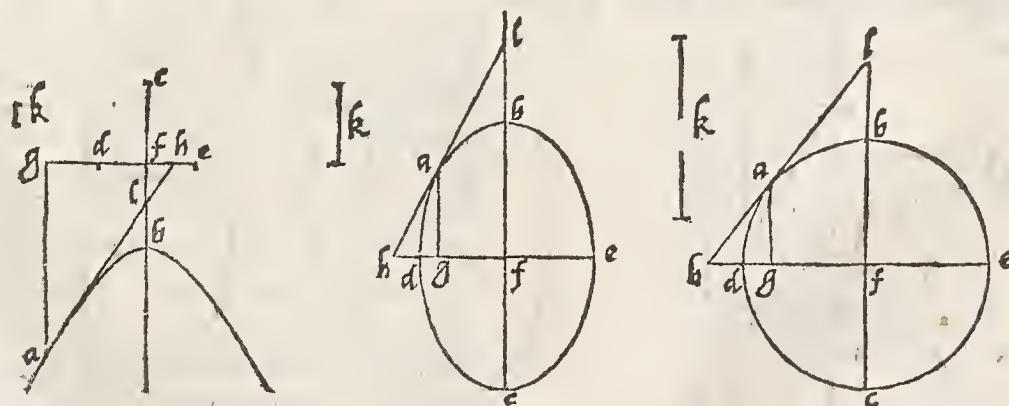
ut rectangulum ex e c, & g ad quadratum c e, hoc est, ut g ad c e, ita transuersum latus ad rectum. Rursus quoniam rectangulum f e d æquale est rectangulo ex e c & g: ut f e ad e c, ita erit g ad e d. habet autem c e ad e d proportionem compositam ex proportione; quam c e habet ad g, & ex ea, quam g ad e d: utq; c e ad g, ita est rectum latus ad transuersum: & ut g ad e d, ita f e ad e c. ergo c e ad e d proportionem habebit compositam ex proportione, quam habet rectum latus ad transuersum, & ex ea, quam f e habet ad e c.

lem. in 22
decimi
14. sexti

THEOREMA XL. PROPOSITIO XL.

Si hyperbolam, uel ellipsim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum secunda diametro conueniat: & à tactu ad eandem diametrum linea applicetur, diametro alteri æquidistans: sumpta qualibet linea ex duabus, quarum una inter applicatam, & sectionis centrum interioritur, altera inter applicatam, & contingentem: habebit ad ipsam applicata proportionem compositam ex proportione, quam habet transuersum figuræ latus ad rectum, & ex ea, quam altera dictarum linearum habet ad applicatam.

SIT hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, a b, cuius diameter b f c, secunda diameter d f e: ducaturq; recta linea sectionem contingens h l a; & ipsi b c æquidistans ducatur a g. Dico a g ad alteram linearum h g, g f proportionem habere



compositam ex proportione, quam habet transuersum figuræ latus ad rectum, & ex ea quam altera dictarum linearum h g, g f habet ad ipsam g a. sit enim rectangulum h g f rectangulo, quod fit ex g a, & linea k æquale. Itaque quoniam ut rectum latus ad transuersum, ita rectangulum h g f ad quadratum g a: rectangulo autem h g f æquale

38. huius

H

A P O L L O N I I P E R G A M

14. sexti

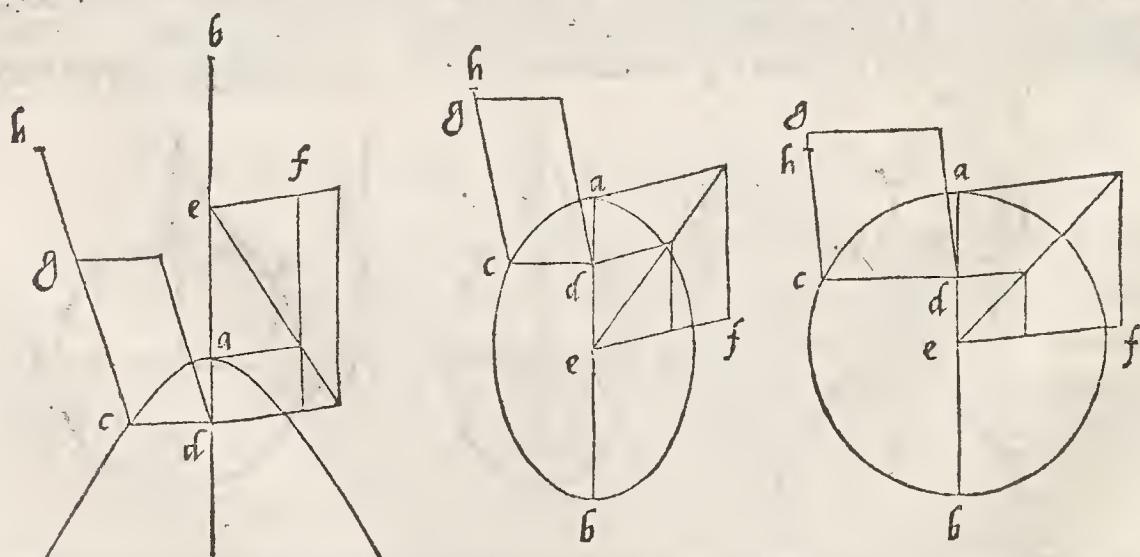
est, quod fit ex ga & k: erit rectangulum ex ga & k ad quadratum ga, hoc est k ad ag, ut latus rectum ad transuersum. & quoniam ag ad gf compositam habet proportionem ex proportione, qnam habet ag ad k, & ex ea, quā k ad gf: estq, ut ag ad k, ita transuersum latus ad rectum: & ut k ad gf, ita hg ad ga, propterea quod rectangulum hgf æquale sit ei, quod ex ag & k. constat ergo ag ad gf compositam habere proportionem ex ea, quam transuersum latus ad rectum, & ex ea, quam hg habet ad ga.

THEOREMA XLI. PROPOSITIO XLI.

Si in hyperbola, uel ellipsi, uel circuli circumferentia recta linea ordinatim applicetur ad diametrum: & ab applicata, & ea, quæ ex centro parallelogramma æquiangula describantur: habeat autem applicata ad reliquum parallelogrammi latus proportionem compositam ex proportione, quam habet ea, quæ ex centro ad reliquum latus; & ex proportione, quam rectum figuræ sectionis latus habet ad transuersum: parallelogrammum factum à linea; quæ inter centrum, & applicatam interiicitur, simile parallelogrammo, quod fit ab ea, quæ ex centro, in hyperbola quidem maius est, quam parallelogrammum ab applicata, parallelogrammo ab ea, quæ ex centro, in ellipsi uero, & circuli circumferentia unâ cum parallelogrammo, quod fit ab applicata æquale est parallelogrammo ab ea quæ ex centro.

Iem. in 22
decimi
21. huius

SIT hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter ab, centrum e: & ordinatim applicetur cd: à lineis autem ea, cd æquiangula parallelogramma describantur, quæ sint af, dg: & habeat dc ad cg proportionem compositam ex proportione, quam habet ae ad ef, & ex ea, quam rectum figuræ latus habet ad transuersum. Dico in hyperbola parallelogrammum, quod fit ex ed simile ipsi af, parallelogrammis af, gd æquale esse; in ellipsi uero, & circuli circumferentia parallelogrammum, quod fit ex ed simile af, unâ cum parallelogrammo gd ipsi af esse æquale. fiat enim ut rectum figuræ latus ad transuersum, ita dc ad ch. & quoniam ut dc ad ch, ita rectum latus ad transuersum: ut autem dc ad ch. ita quadratum dc ad rectangulum dc ch: & ut rectum latus ad transuersum, ita quadratum dc ad re-



9. quinti rectangulum bda: erit rectangulum bda rectangulo dcch æquale. rursus quoniam dc ad cg proportionem habet compositam ex proportione, quam habet ae ad ef: & ex ea, quam rectum latus ad transuersum, hoc est quam dc habet ad

ad ch. sed dc ad cg compositam proportionem habet ex proportione dc ad ch, & ex proportione hc ad cg: erit proportio composita ex proportione ae ad ef, & ex proportione dc ad ch eadem, quæ componitur ex proportione dc ad ch; & ex proportione hc ad cg. communis auferatur, proportio scilicet dc ad ch. reliqua igitur proportio ae ad ef eadem est, quæ reliqua hc ad cg. ut autem hc ad cg, ita rectangulum hcd ad rectangulum gcd: & ut ae ad ef, ita quadratum ae ad rectangulum ae f. ergo ut rectangulum hcd ad rectangulum gcd, ita quadratum ae ad rectangulum ae f. sed ostensum est rectangulum hcd æquale esse rectangulo bda. ut igitur rectangulum bda ad rectangulum gcd, ita quadratum ae ad rectangulum ae f: permutoandoq; ut rectangulum bda ad quadratum ae, ita rectangulum gcd ad ipsum ae f: & ut rectangulum gcd ad ae f rectangulum, ita parallelogrammum dg ad parallelogrammum fa: parallelogramma enim æquiangularia sunt, & proportionem habent compositam ex proportione laterum gc ad ae, & cd ad ef. quare ut rectangulum bda ad quadratum ae, ita parallelogrammum dg ad ipsum fa. Itaque in hyperbola hoc inodo concludemus. Ut omnia se habent ad omnia, ita unum ad unum. ergo ut rectangulum bda una cum quadrato ae ad ae quadratum, hoc est quadratum de ad quadratum ea, sic parallelogramma gd, af ad parallelogrammum af. Sed ut quadratum de ad quadratum ea, sic parallelogrammum, quod fit ex de, si mile, & similiter descriptum ipsi af ad parallelogrammum af. ut igitur parallelogramma dg, af ad parallelogrammum af, sic parallelogrammum ex de descriptum simile ipsi af ad af. ergo parallelogrammum ex de, simile ipsi af æquale est parallelogrammis gd, af. In ellipsi uero & circuli circumferentia hoc modo. Quoniam ut totum, quadratum scilicet ae ad totum parallelogrammum af, sic ablatum rectangulum ad b ad ablatum parallelogrammum dg; erit reliquum ad reliquum, sicut totum ad totum. Quòd si à quadrato ea auferatur rectangulum bda, relinquetur quadratum de. Ut igitur quadratum de ad excessum, quo parallelogrammum af excedit parallelogrammum dg, sic quadratum ae ad parallelogrammum af. sed ut quadratum ae ad parallelogrammum af, sic quadratum de ad parallelogrammum, quod fit ex de, simile ipsi af. ergo ut quadratum de ad excessum, quo parallelogrammum af excedit ipsum dg, sic quadratum de ad parallelogrammum ex de, simile ipsi af. parallelogrammum igitur ex de simile af æquale est excessui, quo parallelogrammum af excedit dg. quare sequitur parallelogrammum ex de simile af una cum parallelogrammo dg ipsi af æquale esse.

E V T O C I V S.

THEOREMA hoc in hyperbola casum non habet; in ellipsi uero, si applicata in centrum cadat, & reliqua eodem modo disponantur, parallelogrammum, quod fit ab applicata parallelogrammo, quod ab ea, quæ ex centro æquale erit. sit enim ellipsis, cuius diameter ab, centrum d: ordinatimq; applicetur cd: & ab ipsis cd, da parallelogramma æquiangularia describantur, dg, af: habeat autem dc ad cg proportionem compositam ex proportione, quam habet ad ad df; & ex ea, quam rectum figuræ latus habet ad transuersum. Dico parallelogrammum af æquale esse parallelogrammo dg. Quoniam enim in superioribus ostensum est, ut quadratum ad ad parallelogrammum af, ita esse rectangulum ad b ad parallelogrammum dg: erit permutoando, ut quadratum ad ad rectangulum ad b, ita parallelogrammum af ad parallelogrammum dg. sed quadratum ad æquale est rectangulo ad b. ergo parallelogrammum af parallelogrammo dg æquale erit.

1. sexti
lem. in 22
decimi
11. quinti

A
22. sexti

B
6. secundi

C
-

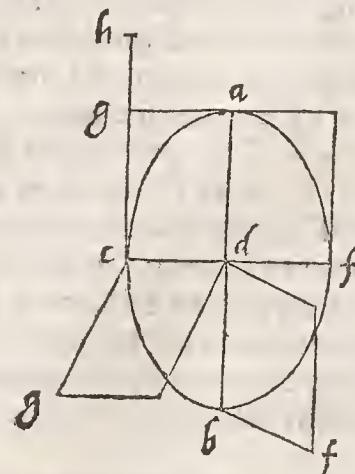
9. quinti

D

19. quinti
5. secundi

E

9. quinti.



A P O L L O N I I P E R G A E I

F E D . C O M M A N D I N V S.

- A** ET ut rectangulum $g c d$ ad $a e f$ rectangulum, ita parallelogrammum $d g$ ad parallelogrammum $f a$.] *Hoc etiam constat ex sexto lemmate Pappi.*
- B** Ut omnia se habent ad omnia, ita unum ad unum.] *In omnibus antiquis codicibus, quos uiderim sic legitur ὡς πάντα πρός πάντα, εν πρός εν. Sed delenda sunt, ut arbitror, tanquam ab aliquo addita; illud enim per compositam rationem colligi perspicuum est.*
- C** Sed ut quadratum $d e$ ad quadratum $e a$; sic parallelogrammum, quod fit ex $d e$ si mile, & similiter descriptum ipsi $a f$ ad parallelogrammum $a f$.] *Quadratum enim $d e$ ad quadratum $e a$ duplam proportionem habet eius, qua est lateris $d e$ ad latus $e a$: & eandem proportionem habet parallelogrammum ex $d e$ simile ipsi $a f$ ad $a f$. ex corollario 20. sexti elementorum.*
- D** Quoniam ut totum quadratum scilicet $a e$ ad totum parallelogrammum $a f$.] *Demonstratum enim est superius, ut rectangulum $b d a$ ad quadratum $a e$, ita esse parallelogrammum $d g$ ad parallelogrammum $f a$. quare permuto rectangulum $b d a$ ad parallelogrammum $d g$ est, ut quadratum $a e$ ad parallelogrammum $a f$.*
- E** Sed ut quadratum $a e$ ad parallelogrammum $a f$, sic quadratum $d e$ ad parallelogrammum, quod fit ex $d e$ simile ipsi $a f$.] *Erat enim ut quadratum $d e$ ad quadratum $e a$, sic parallelogrammum ex $d e$ simile ipsi $a f$ ad $a f$. ergo & permuto.*

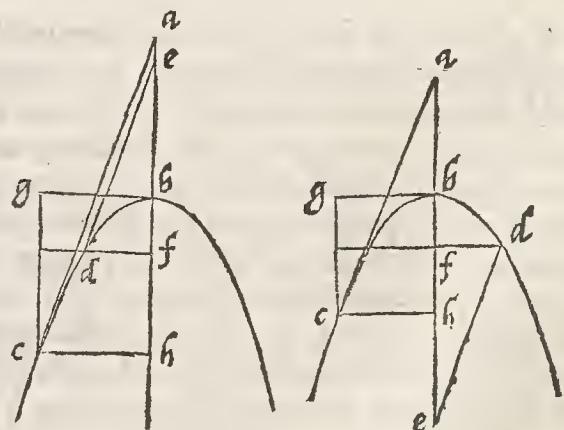
THEOREMA XLII. PROPOSITIO XLII.

Si parabolen recta linea contingens cum diametro conueniat: & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: sumpto autem quoquis punto in sectione, applicentur ad diametrum duæ lineæ, altera quidem contingenti æquidistans, altera uero æquidistans ei, quæ à tactu ordinatim applicata est: triangulum, quod ab ipsis constituitur, æquale erit parallelogrammo contento linea à tactu applicata, & ea, quæ interiicitur inter æquidistantem & uerticem sectionis.

SIT parabole, cuius diameter $a b$:ducaturq; linea $a c$ sectionem contingens: & $c h$ ordinatim applicetur. à quo quis autem puncto d applicetur $d f$: & per d quidem ducatur $d e$ ipsi $a c$ æquidistans; per c uero ipsa $c g$ æquidistans $b f$: denique per b ducatur $b g$, quæ ipsi $h c$ æquidistet. Di-
co triangulum $e d f$ æquale esse parallelo-
grammo $f g$. Quoniam enim $a c$ sectionem
contingit, & ordinatim applicata est
 $c h$, erit $a b$ æqualis ipsi $b h$; & $a h$ dupla
 $h b$. triangulum igitur $a h c$ parallelogrā-
mo $b c$ est æquale. & quoniam ut quadra-
tum $c h$ ad quadratum $d f$, ita linea $h b$
ad ipsam $b f$, propter sectionem: ut autem
quadratum $c h$ ad quadratum $d f$, ita tri-
angulum $a c h$ ad triangulum $e d f$: & ut
 $h b$ ad $b f$, ita parallelogrammum $g h$ ad
parallelogrammum $g f$: erit ut triangulū
 $a c h$ ad triangulum $e d f$, ita $h g$ parallelogrammum ad parallelogrammum $f g$: &
permuto, ut $a c h$ triangulum ad parallelogrammum $h g$, ita triangulum $e d f$ ad
parallelogrammum $f g$. sed triangulum $a c h$ æquale est parallelogrammo $h g$. ergo
triangulum $e d f$ parallelogrammo $f g$ æquale erit.

35. huius.
20

1. sexti



E V T O C I V S.

HOC theorema undecim habet casus; unum quidem si d supra c sumatur; constat enim lineas æquidistantes cadere intra ipsas a c b: alios autem quinque casus habet, si d sumatur infra c: nam linea d f æquidistans cadet extra c b, & de uel inter a & b cadet, uel in ipso b, uel inter b & h, uel in h, uel infra h: ut enim supra a cadat, fieri non potest: quoniam cum d sit infra c, & quæ per ipsum æquidistans a e ducitur, infra a cadet. Quod si d sumatur ex altera parte sectionis, uel utræque æquidistantes inter b & h cadent: uel d f quidem cadet supra b c, punctum uero e uel in b, uel infra, uel rursus e cadet infra h, & f, uel in h, ita ut c b d sit recta linea, (quamquam tunc non exacte æquidistantium proprietas seruetur) uel infra b cadet. Oportet autem in demonstracione quinque casuum post tremorism lineam d f usque ad sectionem, & ad ipsam g c produci. Sed ex his alias quandam descriptionem mente concipere possumus, cum uidelicet sumatur aliud punctum, & quæ in principio sumptæ fuerant lineæ faciant id, quod dictum est. Sed hoc theorema est, non casus.

F E D. C O M M A N D I N V S.

TRIANGVLVM igitur a h c parallelogrammo b c est æquale.] Est enim parallelogrammum c b a duplum trianguli a b c, itemq; duplum parallelogrammi c b b, hoc est ipsius b c. quare ex nona quinti sequitur triangulum a c b parallelogrammo b c æquale esse.

Vt autem quadratum c h ad quadratum d f, ita triangulum a c h ad triangulum e d f.] Quadratum enim c b ad quadratum d f duplam proportionem habet eius, quæ est lateris c b ad d f ex cor. 20. sexti: & similiter eandem habet proportionem triangulum a c b ad triangulum e d f ipsi simile. ut igitur quadratum c b ad quadratum d f, ita triangulum a c b ad triangulum e d f.

A

41. primi
1. sexti

B

THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLIII.

S i hyperbolæ, uel ellipsis, uel circuli circumferentiam recta linea contingens conueniat cum diametro: & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: huic uero æquidistans ducatur per uerticem sectionis, quæ cum linea per tactum & centrum ducta conueniat: & sumpto aliquo punto in sectione, ab eo ad diametrum duæ lineæ ducantur, una quidem contingenti æquidistans; altera uero æquidistans ei, quæ à tactu applicata est: triangulum ab ipsis factum in hyperbola minus erit, quam triangulum, quod abscondit linea per centrum, & tactum ducta, triangulo ab ea, quæ ex centro, simili absctisso: in ellipsi uero, & circuli circumferentia unà cum triangulo absctisso ad centrum æquale erit triangulo simili absctisso, quod ab ea quæ ex centro describitur.

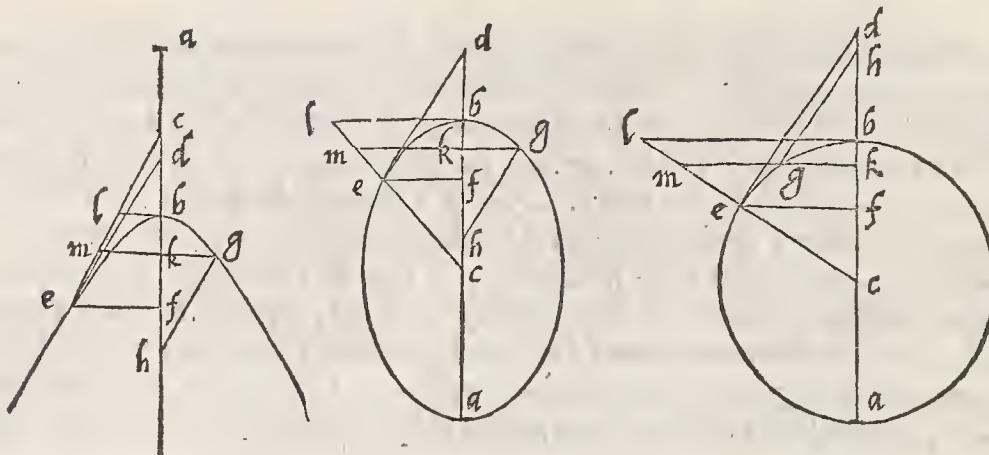
Sit hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b; centrum c: ducaturq; linea d e sectionem contingens: & iuncta c e, ordinatim applicetur e f. Sumatur autem aliquod punctum in sectione, quod sit g: & ducatur linea g h contingenti æquidistans: & g k m ordinatim applicetur: per b uero ordinatim applicetur b l. Dico triangulum k m c differre à triangulo c l b per triangulum g k h. Quoniam enim linea e d sectionem contingit, ordinatim uero applicata est e f, habebit e f ad fd proportionem compositam ex proportione c f ad fe, & ex proportione recti lateris ad transuersum. Sed ut e f ad fd, ita g k ad k h: & ut c f ad fe, ita c b ad b l. Ergo g k ad k h proportionem habebit compositam ex proportione c b ad b l: & ex

39. huius

4. sexti

A P O L L O N I I P E R G A E I

proportionem rectilateris ad transuersum, quare ex his, quæ in quadragesimo primo



theoremate ostendimus, triangulum c k m à triangulo b c l differt, triangulo g h k: etenim in parallelogrammis triangulorum duplis hæc eadem demonstrata sunt.

E V T O C I V S.

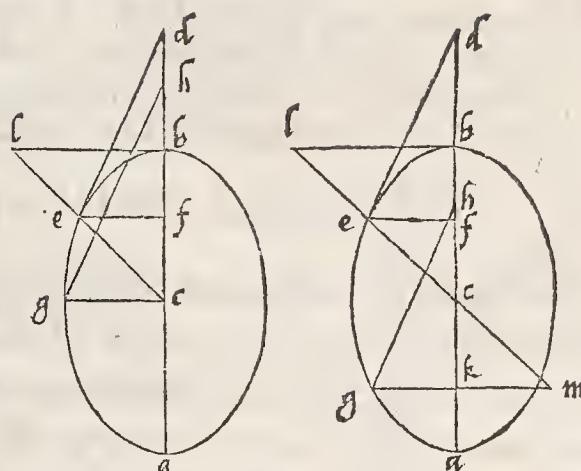
37. huius In aliquibus codicibus huius theorematis talis legitur demonstratio. Quoniam enim re-
14. sexti & tangulum fcd æquale est quadrato cb, erit ut fc ad cb, ita bc ad cd. quare ut fi-
cor. 20. se gura, quæ fit ex fc ad figuram ex cb, ita linea fc ad cd. Sed ut figura ex fc ad figu-
xti ram ex cb, ita ecf triangulum ad triangulum lcb: & ut linea fc ad ipsam cd, ita efc
1. sexti triangulum ad triangulumecd. Ut igitur ec f triangulum ad triangulum lcb, ita
9. quinti. triangulum ecf ad ipsum ecd. proptereaq; triangulum ecd triangulo lcb est æqua-

A. le. ergo in hyperbola per conuersionem rationis; & in ellipsi, conuertendo, diuiden-
B. doq; & rursus conuertendo, ut efc triangulum ad quadrilaterum elbf, ita triangu-
9. quinti. lum ecf ad triangulum edf. quare triangulum edf æquale est quadrilatero elbf.

C. Et quoniam ut quadratum fc ad cb quadratum, ita triangulum ecf ad triangulum
D. lcb, in hyperbola quidem diuidendo; in ellipsi autem conuertendo, & per conuersio-
E. nem rationis, & rursus conuertendo, erit ut rectangulum afb ad quadratum bc, ita
F. quadrilaterum elbf ad triangulum blc: & similiter ut quadratum cb ad rectangu-
 lum akb, ita triangulum lcb ad quadrilaterum mlbk. ergo ex æquali ut rectangu-
21. huius lum afb ad rectangulum akb, ita elbf quadrilaterum ad quadrilaterum mlbk. ut
 autem rectangulum afb ad rectangulum akb, ita quadratum ef ad quadratum gk:
 & ut quadratum ef ad quadratum gk, ita triangulum edf ad triangulum ghk. quare
 ut triangulum edf ad triangulum ghk, ita quadrilaterum elbf ad quadrilaterum
 mlbk: & permutoando ut triangulum edf ad quadrilaterum elbf, ita triangulum
 ghk ad quadrilaterum mlbk. Sed triangulum edf ostensum est æquale quadrila-
 tero elbf. ergo & triangulum ghk quadrilatero mlbk est æquale. triangulum igitur
 mck à triangulo lcb differt triangulo ghk.

Sed cum hæc demonstratio obscuritatem quandam habeat in proportionibus ellipsis, enitendum
E. est, ut ea, quæ breviter dicta sunt, latius explicitentur. Quoniam, inquit, ut quadratum fc
 ad quadratum cb, ita triangulum ecf ad triangulum lcb, erit conuertendo, & per
 conuersionem rationis, rursusq; conuertendo. est enim conuertendo ut quadratum bc ad
 quadratum cf, ita lcb triangulum ad triangulum efc: & per conuersionem rationis, ut quadra-
3. secundi tum bc ad rectangulum afb (hoc est ad excessum, quo quadratum bc excedit quadratum cf, quo
 niam punctum c lineam ab bifariam secat,) ita triangulum lbc ad quadrilaterum lbf: & con-
 uertendo, ut rectangulum afb ad quadratum bc, ita quadrilaterum lbf ad lcb triangulum.
 Habet autem in hyperbola casus undecim, quot habebat præcedens theorema in parabola, &
 præterea alium quendam, cum scilicet punctum, quod in g sumitur idem sit, quod e. tunc enim con-
 tingit triangulum edf una cum triangulo lbc æquale esse triangulo ecf: quoniam ostensum est
 triangulum edf quadrilatero lbf æquale. quadrilaterum autem lbf à triangulo ecf ipso lbe
 trian-

triangulo differt. Sed in ellipsi uel punctum g idem est, quod e, uel supra e sumitur, & tunc intrasque aequidistantes inter d & f cadere per spicium est. quod si g sumatur infra e, & ab eo ducta linea aequidistans ipsi e f cadat inter f & c, punctum h quinque casus efficit: uel enim cadit inter d & b, uel in b, uel inter b & f, uel in f, uel inter f & c. si uero quae per g ducitur applicata aequidistans in centrum c cadat, punctum h similiter quinque efficit casus. Attendum tamen est triangulum factum a lineis, quae ipsis de e, ef aequidistant, triangulo lb c aequale esse. Quoniam enim ut quadratum ef ad quadratum gc, ita triangulum edf ad triangulum ghc, similia enim triangula sunt: & ut quadratum ef ad quadratum gc, ita rectangulum bfa ad rectangulum bca, hoc est ad quadratum b c: erit ut triangulum edf ad ipsum ghc, ita rectangulum bfa ad quadratum b c. ut autem rectangulum bfa ad quadratum b c, ita quadrilaterum lbf ad triangulum lbc, quod demonstratum iam fuit. ergo ut edf triangulum ad triangulum ghc, ita est quadrilaterum lbf ad triangulum lbc: & permittendo ut triangulum edf ad quadrilaterum lbf, ita triangulum ghc ad triangulum lbc. sed aequale est triangulum edf quadrilatero lbf. triangulum igitur ghc triangulo lbc est aequale. Possimus autem haec etiam aliter probare, si dicamus in parallelogrammis triangulorum duplis eadem demonstrata esse; uidelicet in quadragesimo primo theoremate. Quod si ducta per g aequidistans ef cadat inter c & a, producetur quidem, quousq; linea c e cum ipsa conueniat; & punctum h septem casus efficiet. uel enim inter b & d cadit, uel in b, uel inter b & f, uel in f, uel inter f & c, uel in c, uel inter c & a, & in his casibus contingit differentiam triangulorum lbc, ghk infra constituta lineis gk, ec productis. Si uero g sumatur in altera parte sectionis: & quae per g ducitur ipsi ef aequidistans inter b & f cadat, producetur ob demonstrationem, quousq; secet ipsam lc: & punctum h faciet septem casus; uel inter b & f cadens, uel in f, uel inter f & c, uel in c, uel inter c & a, uel in a, uel infra a. & si g k cadat inter f & c, punctum h quinque casus efficiet, uel enim erit inter f & c, uel in c, uel inter c & a, uel in a, uel infra a. Sed si gk in centrum c cadat, punctum h casus efficiet tres, uel inter c & a cadens, uel in a uel extra a. atque in his casibus rursus contingit triangulum ghk aequale esse triangulo lbc. Denique si gk cadat inter c & a, punctum h uel cadet inter c & a, uel in a, uel extra. Itaque in ellipsi casus omnes erunt quadraginta duo, & totidem in circuli circumferentia, ita ut huius theorematis casus sint nonaginta sex.



21. huius

=

FED. COMMANDINVS IN DEMONSTRATIONEM, QVAE AB EVTOCIO AFFERTVR.

Ergo in hyperbola per conuersionem rationis.] Quoniam enim est ut ecf triangulum ad triangulum lcb, ita triangulum ecf ad triangulumecd: erit per conuersionem rationis, ut ecf triangulum ad quadrilaterum elbf, ita triangulum ecf ad triangulum edf. A

Et in ellipsi conuertendo, diuidendoq; & rursus conuertendo.] Rursus quoniam ut triangulum ecf ad triangulum lcb, ita triangulum ecf ad triangulumecd: conuertendo erit ut lcb triangulum ad triangulum ecf, ita triangulum ecd ad triangulum ecf: diuidendoq; ut quadrilaterum elbf ad triangulum ecf, ita triangulum edf ad triangulum ecf: & rursus conuertendo ut triangulum ecf ad quadrilaterum elbf, ita triangulum ecf ad edf triangulum. B

Et quoniam ut quadratum fc ad cb quadratum, ita triangulum ecf ad triangulum lcb.] Sunt enim triangula ecf, lbc similia, & duplam inter se proportionem habent eius, quae est lateris ad latus similis rationis, quemadmodum & ipsa quadrata. C cor. 20. se xxi

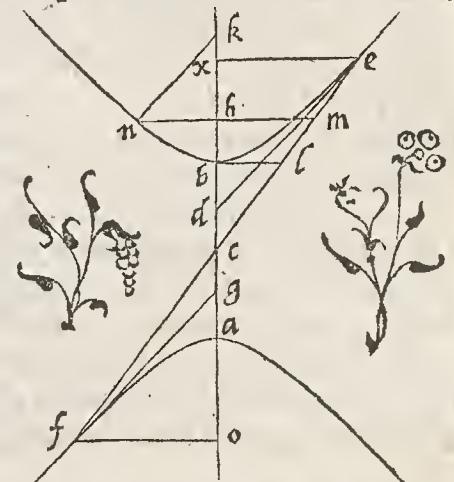
In hyperbola quidem diuidendo.] Nam cum sit ut quadratum fc, ad cb quadratum, ita triangulum ecf ad triangulum lcb; erit diuidendo, ut excessus, quo quadratum fc excedit cb quadratum, hoc est rectangulum afb ex sexti secundi elementorum, ad quadratum cb, ita quadrilaterum elbf ad triangulum lcb. D

F Et similiter ut quadratum cb ad rectangulum akb, ita triangulum lcb ad quadrilaterum mlbk.] Quoniam enim ut quadratum x c ad cb quadratum, ita triangulum mck ad triangulum lcb: similiter demonstrabitur ut rectangulum akb ad b c quadratum, ita quadrilaterum mlbk ad triangulum lcb. quare & conuertendo.

THEOREMA XLIVI. PROPOSITIO XLIVI.

Si unam oppositarum sectionum recta linea contingens cum diametro conueniat; à tactu uero ad diametrum linea ordinatim applicetur; atque huic æquidistans ducatur per uerticem alterius sectionis, ut conueniat cum linea per tactum, & centrum ducta: sumpto autem in sectione quois puncto, applicentur ad diametrum duas lineæ, quarum altera contingenti æquidistet, altera æquidistet ei, quæ à tactu ordinatim applicata est: triangulum ab ipsis factum minus est, quam triangulum, quod abscondit applicata ad centrum sectionis, triangulo simili abscondito ab ea, quæ ex centro.

Sint oppositæ sectiones af, be, quarum diameter ab, centrum c: & ab aliquo punto eorum, quæ sunt in sectione fa, uidelicet à punto f ducatur linea fg sectionem contingens: ordinatimq; applicetur fo: & iuncta fc producatur, ut ad e: per b uero ducatur bl ipsi fo æquidistans: & sumatur aliquod punctum in sectionem be, quod sit n; à quo nh ordinatim applicetur: atque ipsi fg æquidistans ducatur nk. Dico triangulum nhk minus esse, quam triangulum cmh, triangulo cbl. ducatur enim per e linea ed contingens eb sectionem: & ex ordinatim applicetur. itaque quoniam oppositæ sectiones sunt fa, be, quarum diameter ab: & linea fe per centrum ducitur: & fg, ed sectiones contingunt: erit de ipsi fg æquidistans. est autem nk æquidistans fg. ergo & nk ipsi ed: & mh ipsi bl æquidistat. Quoniam igitur hyperbole est be, cuius diameter ab, centrum c: & linea ed sectionem contingit: ordinatimq; applicata est ex: & ipsi ex æquidistat bl: sumpto autem in sectione punto n, ab eo ordinatim applicatur nh, & ipsi de æquidistans ducitur nk: erit triangulum nhk minus, quam triangulum hmc, ipso cbl triangulo. hoc enim in quadragesimo tertio theoremate ostensum est.



E V T O C I V S.

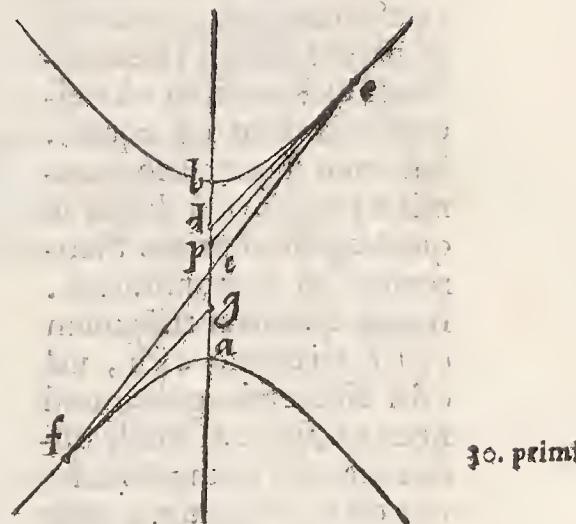
Itaque quoniam oppositæ sectiones sunt fa, be; quarum diameter ab: & linea fe per centrum ducitur: & fg, de sectiones contingunt: erit de ipsi fg æquidistans.] Quoniam igitur hyperbole est af, lineaq; fg sectionem contingit; & applicata est fo; erit rectangulum o cg æquale quadrato ca, ex trigesimo septimo theoremate: & similiter rectangulum xcd quadrato cb æquale. est igitur ut rectangulum o cg ad quadratum ac, ita rectangulum xcd ad quadratum bc: & permutoando ut rectangulum o cg ad rectangulum xcd, ita quadratum ac ad ipsum cb: & id circa rectangulum o cg æquale est rectangulo xcd. est q; linea o c æqualis ipsi cx. ergo & gc ipsi cd. Sed fc ipsi ce est æqualis, ex trigesimo theoremate. lineæ igitur fc, cg, æquales sunt ipsis ec, cd: angulosq; æquales continent ad c, sunt enim secundum uerticem. quare & fg ipsi ed est æqualis; & angulus cgf angulo cde: qui quidem anguli alterni sunt. ergo fg ipsi ed æquidistabit. Casus huius theorematis duodecum sunt, quemadmodum in hyperbola, ut diximus in quadragesimo tertio theoremate, atque eadem est demonstratio.

FED. COMMANDINVS.

Ex his quæ superius dicta sunt, licet etiam illud demonstrare.

Si unam oppositarum sectionum recta linea contingat: & à tactu ducatur diameter usque ad alteram sectionem: quæ ab eo puncto ducitur linea sectionem contingenti æquidistans, sectionem ipsam continget.

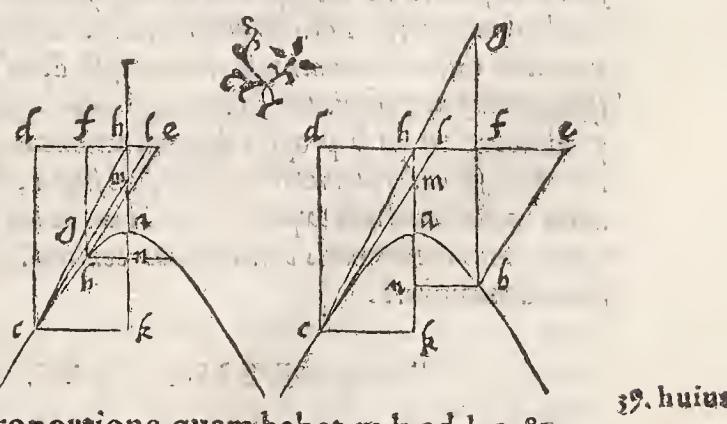
Sint oppositæ sectiones af, be, quarum diameter ab, centrum c, ut in proposita figura: & linea fg in f sectionem contingat: ducatur autem diameter fc e sectioni bc in punto e occurrens: & ab eo ducatur ed æquidistans fg. Dico lineam ed sectionem in e contingere. Nam si non contingit ed, ducatur ab eodem punto alia linea sectionem contingens, quæ sit ep. æquidistant ep linea fg, ex iam demonstratis, ergo & ipsi ed: quod fieri non potest: conuenient enim inter se in punto e. linea igitur ed in e sectionem contingat necesse est.



THEOREMA XLV. PROPOSITIO XLV.

Si hyperbolæ, uel ellipsis, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum secunda diametro conueniat: & à tactu ad eandem diametrum linea applicetur, diametro alteri æquidistans: & per tactum & centrum ducta linea producatur: sumpto autem in sectione quovis punto, ad secundam diametrum ducantur duæ lineæ, quarum una contingenti, altera applicata æquidistet: triangulum, quod ab ipsis constituitur, in hyperbola quidem maius est, quam triangulum abscisum ab applicata ad centrum, triangulo, cuius basis est linea contingens, & uerteret centrum sectionis: in ellipsi uero & circuli circumferentia, unâ cum triangulo abscisso, æquale est triangulo, cuius basis linea contingens, & uerteret sectionis centrum.

Sit hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia abc, cuius diameter ah; secunda diameter hd; & centrum h: linea uero cm l sectionem contingat in c: ducaturq; cd ipsi ah æquidistans: & iuncta ch producatur: sumpto deinde in sectione quovis punto b, ducantur lineæ be, bf, quæ ipsis lc, cd æquidistent. Dico triangulum bef in hyperbola quidem maius esse, quam triangulum ghf, triangulo lch; in ellipsi uero & circuli circumferentia, unâ cum triangulo fgh æquale esse triangulo clh. ducantur enim ck, bn æquidistantes ipsi dh. & quoniam linea cm sectionem contingit; atque applicata est ck, habebit ck ad kh proportionem compositam ex proportione, quam habet mk ad kc: & ex ea, quam rectum figuræ latus habet ad transuersum. ut autem mk ad kc, ita cd ad dl. ergo ck ad kh proportionem compositam habet ex proportione cd ad dl, & ex proportione rectilateris ad transuersum. atque est triangulum cdh figura, quæ fit



APOLLONII PERGAEI

ex k h: & triangulum c h k, hoc est cdh, figura, quæ fit ex ck, hoc est ex dh. quare triangulum cd l in hyperbolâ qui dem maius est, quam triangulum ck h, triangulo facto ex ah, simili ipsi cd l: in ellipsis uero & circuli circumferentia una cum ipso ck h eidem triangulo est æquale. hoc enim in parallelogrammis triangulorum duplis in quadragesimo primo theoremate est demonstratum. Itaque quoniam triangulum cd l à triangulo ck h, uel cdh differt triangulo, quod fit ex ah, ipsi cd l simili: differt autem & triangulo ck h erit chl triangulum æquale ei, quod fit ex ah, simile ipsi cd l. Rursus quoniam triangulum bfe simile est triangulo cd l. & triangulum gfh triangulo cd h, ipsorum latera inter se eandem proportionem habent. atque est triangulum bfe, quod fit ex nh, inter applicatam & centrum interiecta: triangulum uero gfh, quod fit ex bn applicata, hoc est ex fh. Ex iis igitur, quæ prius ostensa sunt, triangulum bfe à triangulo gfh differt triangulo, quod fit ex ah, simili ipsi cd l. quare & triangulo chl.

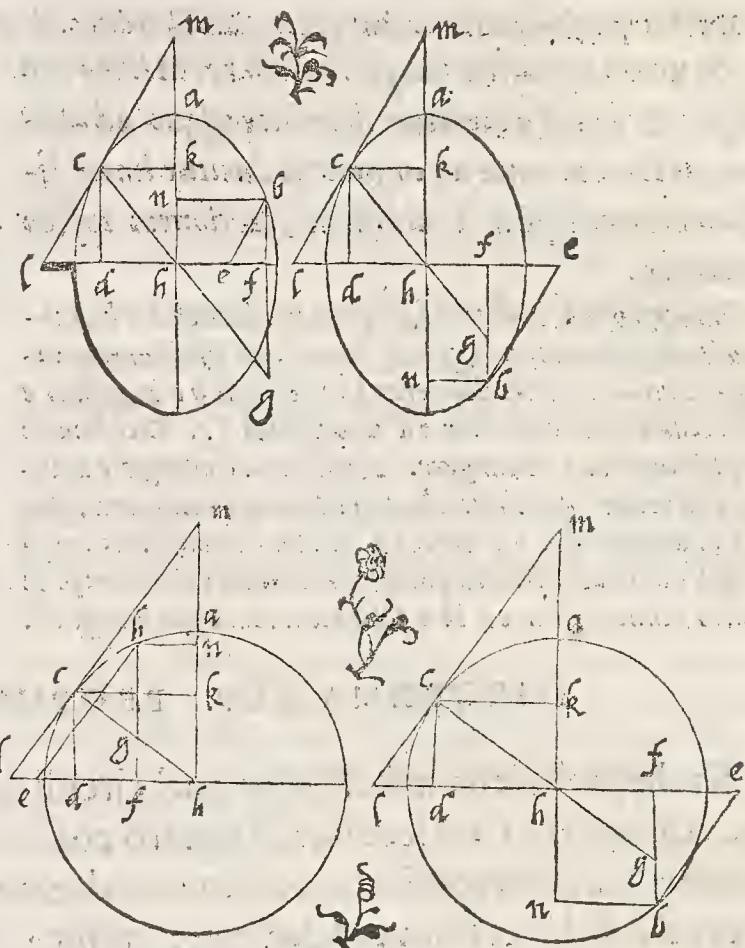
E V T O C I V S.

AT T E N D E N D U M est hoc theorema plures habere casus: in hyperbola enim uiginti habet; nam punctum, quod pro b sumitur, uel idem est, quod c, uel idem quod a: & tunc contingit triangulum factum ex ah simile ipsi cd l, idem esse, quod à linea e quidistantibus ipsis dl, lc abscinditur. Si uero b sumatur inter ac, & puncta dl sint supra terminos secundæ diametri, fient tres casus: nam puncta fe uel supra terminos ferentur, uel in ipsis, uel infra; & si dl sint in terminis secundæ diametri; fe infra terminos erunt. Quod si b sumatur infra c; & bc ad c producatur, tres alios casus fieri contingit, nempe ipso d, uel supra terminos secundæ diametri existente, uel in ipsis, uel infra. & similiter f faciet tres alios casus. si autem b sumatur ex altera parte sectionis, producetur cb ad b propter demonstrationem: & bf, be tres casus efficient, quoniam fe uel ad terminos secundæ diametri ferentur, uel supra, uel infra. Ellipsis uero, & circuli circumferentiae uarios casus nunc non explicabimus, cum de his satis dictum sit in præcedenti theoremate. erunt igitur huius theorematis casus omnes centum. Sed possunt hæc eadem etiam in oppositis sectionibus demonstrari.

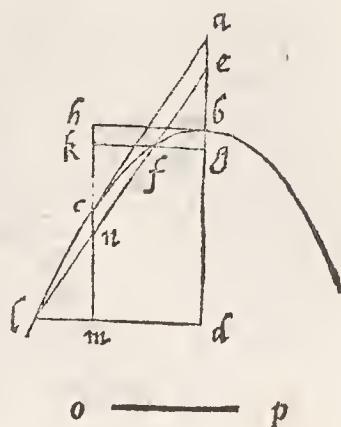
THEOREMA XLVI. PROPOSITIO XLVI.

Si parabolæ recta linea contingens cum diametro conueniat; quæ per tactum ducitur diametro æquidistans ad easdem partes sectioni, lineas in sectione ductas, quæ contingenti æquidistant, bifariam secabit.

Sit

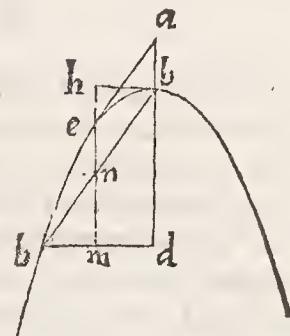


Sit parabole, cuius diameter a b d: & linea a c sectionem contingat: per c uero duatur h c m æquidistans a d: & sumpto in sectione quovis punto l ducatur l n f e, quæ ipsi a c æquidistet. Dico l n ipsi n f æqualem esse. ducantur enim ordinatim b h, k f g, l m d: & quoniam ex his, quæ in quadragesimo secundo theoremate demonstrauimus, triangulum e l d æquale est parallelogrammo b m, & triangulum e f g parallelogrammo b k; erit parallelogramnum g m, quod relinquitur æquale quadrilatero l f g d. commune auferatur m d g f n quinquelaterum. reliquum igitur triangulum k f n reliquo l m n est æquale. Sed linea k f æquidistat l m. ergo f n ipsi n l æqualis erit.



E V T O C I V S

HOC theorema plures casus habet. demonstrabimus autem habita ratione casuum quadragesimi secundi theorematis; ut exempli caussa si f cadat in b, ita dicemus. Quoniam triangulum b d l æquale est parallelogrammo b b d m, commune auferatur n m d b, erit reliquum triangulum, scilicet l n m æquale reliquo h n b: In alijs autem ad hunc modum. Quoniam triangulum l e d parallelogrammo b b d m est æquale; & triangulum f e g parallelogrammo b b g k, erit reliquum l f g d æquale reliquo k g d m. Commune auferatur n f g d m. reliquum igitur triangulum l n m reliquo k n f est æquale.



F E D . C O M M A N D I N V S.

SED linea k f æquidistat l m, ergo f n ipsi n l æqualis erit.] Quoniam enim æquidistant k f, l m, angulus f k n æqualis est angulo l m n: anguli autem ad n secundum uerticem inter se sunt æquales. ergo & reliquis æquals reliquo: & triangulum f k n triangulo l m n simile. Itaque fiat ut f n ad n l, sic n l ad aliam lineam, quæ sit o p; erit linea f n ad o p, ut triangulum f k n ad ipsum l m n. quare linea f n linea o p est æqualis. Sed cum tres linea f n, n l, o p proportionales sint, sequitur rectangulum ex f n, o p; hoc est quadratum f n quadrato n l æquale esse: & propterea lineam f n linea n l æqualem.

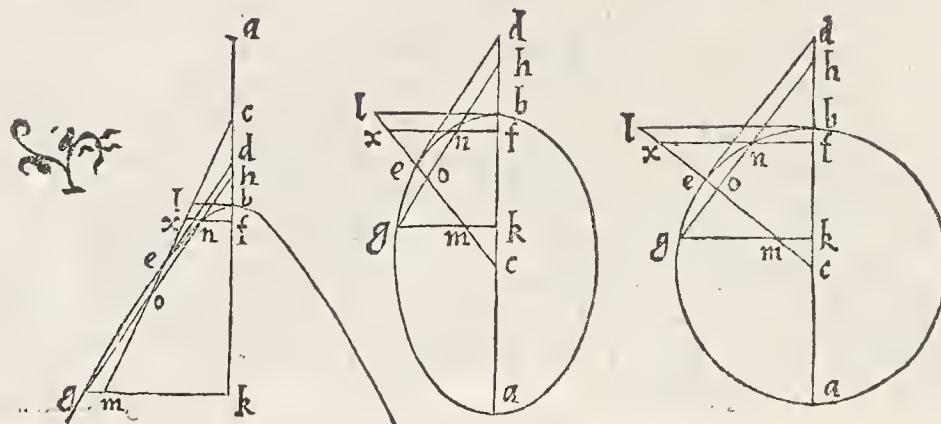
29. primi
15 cor. 20. se
xti
16. sexti.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO XLVII.

Si hyperbolæ, uel ellipsis, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat: per tactum, & centrum ducta linea ad easdem partes sectioni, lineas, quæ in sectione ducuntur, contingenti æquidistantes bifariam secabit.

Sit hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b, centrum c: ducaturq; d e sectionem contingens: & iuncta c e producatur. Sumpto autem in sectione quovis punto n, ducatur per n linea h n o g ipsi d e æquidistans. Dico n o ipsi o g æqualem esse. applicentur enim ordinatim x n f, b l, g m k. ergo ex demonstratis in quadragesimo tertio theoremate triangulum h n f æquale est quadrilatero l b f x: & g h k triangulum quadrilatero l b k m. reliquum igitur n g k f quadrilaterum reliquo m k f x est æquale. commune auferatur o n f x m quinquelaterum.

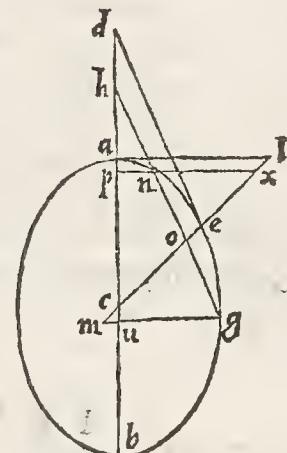
A P O L L O N I I P E R G A E I



erit reliquum triangulum omg æquale reliquo oxn . atque est mg æquidistans nx . ergo no ipsi og est æqualis.

E V T O C I V S.

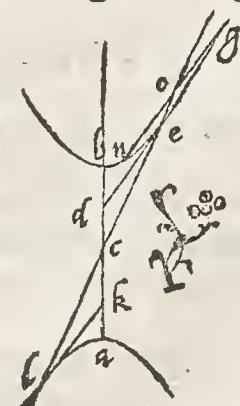
HOC theorema in hyperbola tot habet casus, quot habebat præcedens in parabola. demonstrationes autem eorum faciemus, attendentes casus quadragesimi tertij theorematis: & in ellipsi itidem, ut in subiecta figura, cum punctum g extra sumitetur. Quoniam triangulum lac æquale est triangulis bgu , ucm , hoc est triangulis ohc , omg : atque est idem triangulum lac æquale triangulo xpc , & quadrilatero $lapx$, hoc est triangulo nbp : ex his, quæ demonstrata sunt in quadragesimo tertio theoremate, erunt triangula xpc , nbp æquilia triangulis ohc , omg . commune auferatur triangulum ohc . reliquum igitur triangulum xon æquale est reliquo mg : & est nx æquidistans mg . ergo no ipsi og est æqualis.



THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO XLVIII.

SI unam oppositarum sectionum recta linea contingens cum diametro conueniat: & per tactum & centrum linea producta fecerit alteram sectionem: quæ in altera sectione ducta fuerit, contingenti æquidistans à linea producta bifariam secabitur.

Sint oppositæ sectiones, quarum diameter ab , centrum c : & linea k sectionem contingat: iunctaq; lc producatur. sumpto autem in b sectione punto n , per n ducatur ng , quæ æquidistet lk . Dico lineam no ipsi og æqualem esse. Ducatur enim per e sectionem contingens ed . erit ed ipsi lk æquidistans: quare & ipsi ng . Quoniam igitur hyperbole est bng , cuius centrum c : lineaq; de sectionem contingit; & iuncta est ce : sumpto autem in sectione punto n , per n ipsi de æquidistans ducta est ng : ex iis, quæ in hyperbola ostendimus, erit no ipsi og æqualis.



E V T O C I V S.

HIVVS etiam theorematis casus ita se habent, ut in quadragesimo septimo theoremate dictum est de hyperbolæ descriptione.

THEO-

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO XLIX.

Si parabolen recta linea contingens cum diametro conueniat: & per tactum ducatur linea diametro æquidistans: à uertice uero ducatur æquidistans ei, quæ ordinatim applicata est: & fiat ut portio contingens inter applicatam & tactum interiecta ad portionem æquidistantis, quæ itidem inter tactum, & applicatam interiicitur; ita quædam recta linea ad duplam contingentis: quæ à sectione ducta fuerit, æquidistans contingenti ad lineam, quæ per tactum ducitur diametro æquidistans, poterit rectangulum contentum inuentum linea, & ea, quæ inter ipsam & tactum interiicitur.

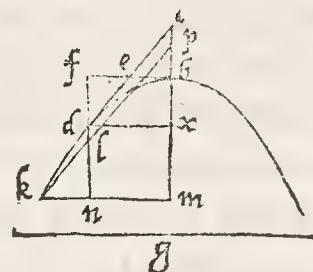
SIT parabole, cuius diameter $m b c$: & linea $c d$ sectionem contingat: per d uero ipsi $b c$ æquidistans ducatur $f d n$: & $f b$ ordinatim applicetur: fiatq; ut $e d$ ad $d f$, ita quædam recta linea g ad duplam ipsius $c d$: & sumpto in sectione punto k , ducatur per k ipsi $c d$ æquidistans $k l p$. Dico quadratum $k l$ æquale esse rectangulo, quod fit ex linea g & $d l$, hoc est diametro existente $d l$ lineam g esse rectum latus. applicentur enim ordinatim $d x, k n m$. & quoniam $c d$ sectionem contingit, ordinatim uero applicata est $d x$, erit $c b$ æqualis $b x$, sed $b x$ est æqualis $f d$. ergo $c b$ ipsi $f d$ æqualis erit: & propterea triangulum $e c b$ æquale triangulo $e f d$. commune addatur, figura scilicet $d e b m n$. quadrilaterum igitur $d c m n$ æquale est parallelogrammo $f m$, hoc est triangulo $k p m$. commune auferatur quadrilaterum $l p m n$. ergo reliquum triangulum $k l n$ parallelogrammo $l c$ est æquale. angulus autem $d l p$ æqualis est angulo $k l n$. quare rectangulum $k l n$ duplum est rectanguli $l d c$. quoniam igitur ut $e d$ ad $d f$, ita linea g ad duplam ipsius $c d$: & ut $e d$ ad $d f$, ita $k l$ ad $l n$: erit ut g ad duplam $c d$, ita $k l$ ad $l n$. sed ut $k l$ ad $l n$, ita quadratum $k l$ ad rectangulum $k l m$: & ut g ad duplam $c d$, ita rectangulum, quod fit ex g & $d l$ ad duplum rectanguli $c d l$. quare ut quadratum $k l$ ad rectangulum $k l n$, ita rectangulum ex g & $d l$ ad duplum ipsius $c d l$ rectanguli: & permutando. est autem $k l n$ rectangulum æquale duplo rectanguli $c d l$. ergo quadratum $k l$ rectangulo ex g & $d l$ æquale erit.

35. huius

42. huius

8. lemm.
pappi4. sexti
lemm. 22
decimi.

1. sexti

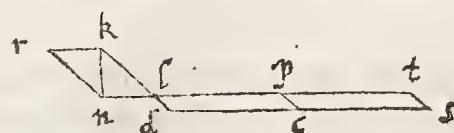


E V T O C I V S.

ERGO reliquum triangulum $k l n$ parallelogrammo $d l p c$ est æquale. angulus autem $d l p$ æqualis est angulo $k l n$. quare rectangulum $k l n$ duplum est rectanguli $l d c$. Triangulum enim $k l n$ seorsum describatur: itemq; parallelogrammum $d l p c$. & quoniam triangulum $k l n$ æquale est parallelogrammo $d p$, ducatur per n ipsi $l k$ æquidistans, quæ sit $n r$: & per k ducatur $k r$ æquidistans $l n$. parallelogrammum igitur est $l r$, & duplum trianguli $k l n$. quare & parallelogrammi $d p$ duplum. producantur $d c, l p$ ad puncta $s t$: ponaturq; ipsi $d c$ æqualis $c s$, & $p t$ æqualis ipsi $l p$; & iungantur $s t$. ergo $d t$ parallelogrammum est, duplum ipsius $d p$: & idcirco $l r$ parallelogrammum æquale parallelogrammo $l s$. est autem & equiangulum, quoniam anguli ad l secundum uerticem sunt æquales. sed æqualium, & equiangularum parallelogramorum latera, quæ circa æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. ergo ut $k l$ ad $l t$, hoc est ad $d s$, ita $d l$ ad $l n$: propterea q; rectangulum $k l n$ æquale est rectangulo $l d s$. & cum $d s$ dupla sit ipsius $d c$, rectangulum $k l n$ rectanguli $l d c$ duplum erit.

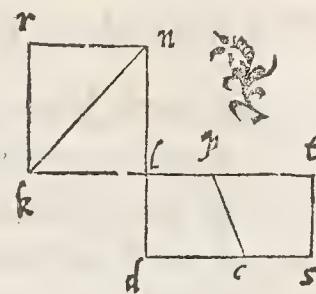
14. sexti

16. sexti



APOLLONII PERGAEI

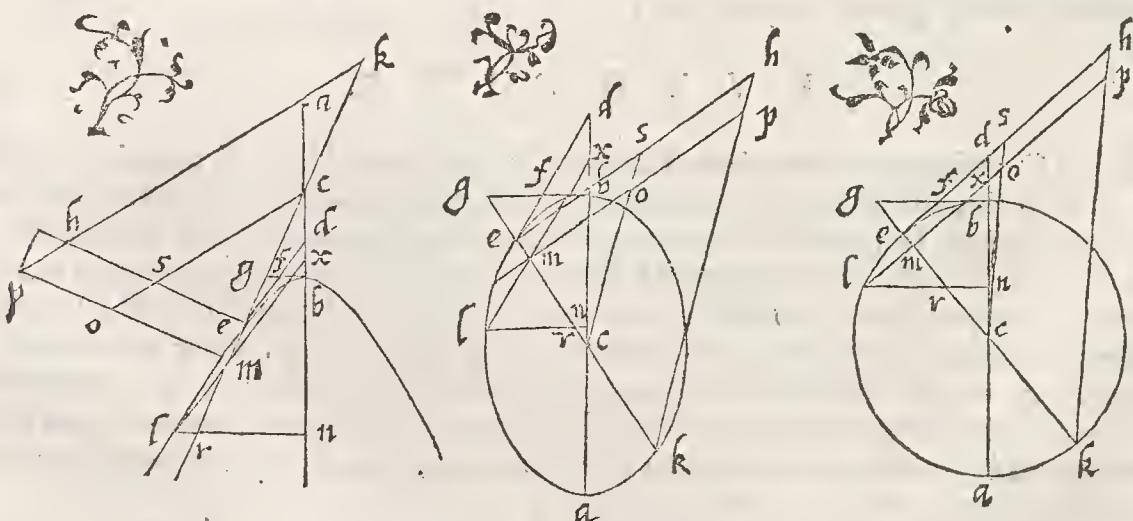
At si linea d e ipsi l p æquidistet, c p uero non æquidistet ipsi d l, erit d c p l trapezium, & tunc dico rectangulum k l n æquale esse ei, quod linea d l, & utraque ipsarum c d, l p continetur. Si enim parallelogrammum l r compleatur, sicuti prius: producanturq; d c, l p, ita ut ipsi l p æqualis ponatur c s, & ipsi d c æqualis p t; & iungantur s t: fiet dt parallelogrammum duplum ipsius d p: & eadem erit demonstratio. Hoc autem utile est etiam ad ea, quæ sequuntur.



THEOREMA L. PROPOSITIO L.

Si hyperbolam, uel ellipsim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat; & per tactum & centrum linea producatur: à uertice autem ordinatim applicata conueniat cum ea, quæ ducitur per tactum & centrum: fiatq; ut portio contingentis inter tactum & applicatam interiecta, ad portionem lineæ ductæ per tactum & centrum, quæ itidem inter tactum & applicatam interiicitur, ita quædam recta linea ad duplam contingentis: quæ à sectione ducitur contingenti æquidistans ad lineam per tactum & centrum ductam, poterit spatium rectangulum, quod adiacet inuentæ lineæ, latitudinem habens interiectam inter ipsam & tactum; in hyperbola quidem excedens figura simili contentæ linea dupla eius, quæ est inter centrum, & tactum, & inuenta linea; in ellipsi uero & circulo eadem deficiens.

SIT hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b, centrū c: & linea d e sectionem contingentat. iuncta uero c e producatur ad utrasq; partes: ponaturq; c k ipsi e c æqualis: & per b ordinatim applicetur b f g: deinde per e ad rectos angulos ipsi e c ducatur e h: fiatq; ut f e ad e g, ita e h ad duplam ipsius e d: &



1. iuncta h k producatur: sumpto denique in sectione punto l, per ipsum ducatur l m x quidem ipsi e d æquidistans; l r n uero æquidistans b g; & ipsi e h æquidistans m p. Dico quadratum l m rectangulo e m p æquale esse. ducatur enim per c linea c s o æquidistans k p. Itaque quoniam e c æqualis est ipsi c k; & ut e c ad c k, ita e s ad sh; erit

2. sexti.

erit e s ipsi sh. æqualis. & quoniam ut f e ad e g, ita h e ad duplam e d: atque est ipsius e h dimidia e s: erit ut f e ad e g, ita s e ad e d. ut autē f e ad e g, ita l m ad m r. ergo ut l m ad m r, ita s e ad e d. sed cum demonstratum sit triangulum r n c in hyperbola quidem maius esse, quam triangulum c g b, hoc est triangulum c d e; in ellipsi uero & circulo minus, ipso l n x triangulo communibus ablatis, in hyperbola scilicet triangulo e c d, & n r m x quadrilatero, in ellipsi autē & circulo, triangulo m x c: erit l m r triangulum quadrilatero m e d x æquale. atque est m x æquidistans d e, & angulus l m r æqualis angulo e m x. ergo rectangulum l m r æquale est rectangulo, quod linea e m, & utraque ipsarum e d, m x continetur. est autem ut m c ad c e, ita & m x ad e d, & m o ad e s. ut igitur m o ad e s, ita m x ad e d: & componendo ut utraque m o, s e ad e s, ita utraque m x, d e ad e d. quare permutando, ut utraque m o, s e ad utramque m x, d e, ita s e ad e d. Sed ut utraque m o, s e ad utramque m x, d e, ita rectangulum, quod continetur utraque m o, s e, & ipsa e m, ad contentum utraq; m x, d e & e m. Ut autem s e ad e d, ita f e ad e g, hoc est l m ad m r; uidelicet quadratum l m ad rectangulum l m r. quare ut rectangulum contentum utraque m o, s e, & e m ad contentum utraque m x, d e & e m, ita quadratum l m ad rectangulum l m r: & permutando ut rectangulum contentum utraque m o, s e, & e m ad quadratum m l, ita contentum utraque m x, d e, & e m ad l m r rectangulum. est autem rectangulum l m r æquale rectangulo, quod fit ex e m, & utraque m x, d e. ergo quadratū l m æquale est rectangulo ex e m, & utraque m o, s e. estq; e s ipsi sh. æqualis, & s h ipsi o p. quadratum igitur l m rectangulo e m p. æquale erit.

E V T O C I V S.

CASVS huius theorematis ita se habent, ut in quadragesimo tertio, & ita casus theorematis quinquagesimi primi.

F E D. C O M M A N D I N V S.

V T autem f e ad e g, ita l m ad m r.] Ob similitudinem triangulorum f e g, l m r. nam cum æquidistent g f, l r, angulus g f e æqualis est angulo r l m; & angulus f g e angulo l r m. ergo reliquo reliquo æqualis, & triangulum f e g triangulo l m r simile erit.

Sed cum demonstratum sit triangulum r n c in hyperbola quidem maius esse, quam triangulum c g b.] Etenim in quadragesimo tertio huius demonstratum est triangulum x l n in hyperbola minus esse, quam triangulum c r n, triangulo c g b; in ellipsi uero & circuli circumferentia una cum ipso c r n æquale esse triangulo c g b.

Hoc est triangulum c d e.] Triangulum enim c d e triangulo c g b æquale demonstratum est in 43. huius, uidelicet in secunda demonstratione, quam affert Eutocius in commentarijs.

Ergo rectangulum l m r æquale est rectangulo, quod linea e m, & utraque ipsarum e d, m x continetur.] Ex octavo lemmate Pappi, & ex ijs quæ Eutocius proxime demonstrauit.

Est autem ut m c ad c e, ita & m x ad e d, & m o ad e s.] Ex quarta sexti, sunt enim triangula c e d, c m x similia: itemq; similia inter se triangula c m o, c e s.

THEOREMA LI. PROPOSITIO LI.

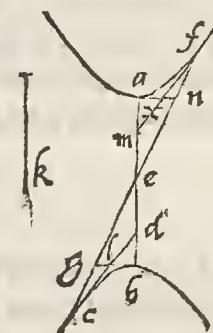
Si quamlibet oppositarum sectionum recta linea contingens cum diametro conueniat; & per tactum & centrum linea producat ut usque ad alteram sectionem: à uertice uero ducatur linea æquidistans ei, quæ ordinatim applicata est; conueniensq; cum linea per tactum, & centrum ducta: & fiat ut portio contingentis inter applicatam & tactum ad portionem lineæ ductæ per tactum, & centrum, quæ inter tactum & appli-

A P O L L O N I I P E R G A E I

catam interiicitur, ita quædam recta linea ad duplam contingentis: quæ in altera sectione ducitur æquidistans contingentis, ad lineam per tactum & centrum ductam, poterit rectangulum, quod adiacet inuentæ lineæ, latitudinem habens, lineam, quæ est inter ipsam & tactum; excedensq; figura simili ei, quæ linea inter oppositas sectiones interiecta & inuenta continetur.

SINT oppositæ sectiones, quarum diameter ab, centrum e: & linea cd sectionē b contingat: iunctaq; ce producatur: ordinatim uero applicetur blg, & fiat ut lc ad cg, sic quædam recta linea k ad duplam cd. itaque perspicuum est in sectione bc lineas æquidistantes cd, quæ ducuntur ad lineam in directum ipsi ce productam, posse spatia adjacentia lineæ k; latitudinemq; habentia lineam, quæ est inter ipsas & tactum, & excedentia figura simili contentæ linea cf&k: dupla est enim fc ipsius ce. Dico igitur idem evenire in sectione af. Ducatur per f linea mf, quæ af sectionem contingat: ordinatimq; applicetur axn, & quoniam oppositæ sectiones sunt bc, af atque ipsas contingunt cd, mf; erit cd ipsi mf æqualis, & æquidistantes. est autem ce æqualis ef. ergo & ed ipsi em. Sed quoniā ut lc ad cg, ita linea k ad duplam cd, hoc est mf; erit ut xf ad fn, ita k ad duplam mf. fatque est hyperbole af, cuius diameter ab: & mf ipsam contingit: ordinatim uero applicata est an: & ut xf ad fn, ita k ad duplam mf. ergo quæcumque à sectione du cuntur æquidistantes fm ad lineam, quæ in directum protenditur ipsi ef, pectorunt rectangulum contentum linea k, & interiecta inter ipsas & punctum f, excedensq; figura simili ei, quæ linea cf&k continetur.

46. huius Itaque his demonstratis perspicuum est in parabola unamquamque rectarum linearium, quæ diametro ex generatione du cuntur æquidistantes, diametrum esse: in hyperbola uero, ellipsi & op positis sectionibus unamquamque earum, quæ per centrum ducuntur.
47. huius Et in parabola quidem applicatas ad unamquamque diametrum, æquidi stantes contingentibus, posse rectangula ipsi adiacentia: in hyperbola & op positis posse rectangula adiacentia ipsi, quæ excedunt eadem figura: in ellipsi autem quæ eadem deficiunt. postremo quæcumque circa se ctiones adhibitis principalibus diametris demonstrata sunt, & aliis dia metris assumpptis eadem contingere.



E V T O C I V S.

DIAMETRVM ex generatione uocat communem sectionem plani secantis, & trianguli per axem, quæ in ipso cono efficitur; quam & principalem diametrum appellat. Dicit autem omnia accidentia sectionum, quæ in superioribus theorematibus demonstrata sunt, posuit principalibus dia metris, & alijs quibuscumque diametris assumpptis eadem contingere posse.

P R O B L E M A I. P R O P O S I T I O L I I.

Recta linea data in plano, ad unum punctum terminata, inuenire in plano coni sectionem, quæ parabolæ appellatur, ita ut ejus diameter sit data linea; uertex lineæ terminus; quæ uero à sectione ad diametrum in dato

in dato angulo applicatur, posuit rectangulum contentum linea, quæ est inter ipsam & uerticem sectionis, & altera quadam data linea.

S I T recta linea data positione a b, ad a punctum terminata; altera autem magnitudine data c d: & datus angulus primum sit rectus. Itaque oportet in subiecto plano inuenire parabolen, ita ut eius diameter sit a b; & uertex a: rectum autem figuræ latius c d: & ordinatim ductæ in recto angulo applicentur: boc est ut a b sit axis. producatur a b ad e: sumaturq; ipsius c d quarta pars c g: & sit a e maior, quam c g. ipsarū autem c d, e a media proportionalis sit h. est igitur ut c d ad e a, ita quadratum h ad e a quadratum. sed c d est minor, quam quadrupla ipsius e a. ergo & quadratum h quadrati e a minus est, quam quadruplum: & propterea linea h minor, quam dupla ipsius e a. Cum igitur duæ lineæ e a, maiores sint, quam h, fieri potest ut ex h, & duabus e a triangulum constituatur. ergo in linea e a cōstituatur triangulum e a f rectum ad subiectum planum, ita ut e a æqualis sit a f; & h æqualis fe:ducaturq; a k æquidistans e f; & fk ipsi e a. Deinde intelligatur conus, cuius uertex f punctum; basis autem circulus circa diametrum k a, rectus ad planum, quod per lineas a f, fk transit. erit igitur is conus rectus, quoniam a f æqualis est f k. Itaque secetur conus plano, quod circulo k a æquidistet; faciatq; sectionem circulum m n x, rectum uidelicet ad planum trāsiens per m f, f n: & sit circuli m n x, & m f n trianguli communis sectio m n. quare m n circuli diameter est. cōmuni autem sectio plani subiecti, & circuli sit x l. Quoniam igitur circulus m n x rectus est & ad subiectum planū, & ad triangulum m f n: communis ipsorum sectio x l ad m n f triangulum, hoc est ad k f a perpendicularis erit. quare & ad omnes rectas lineas; quæ in triangulo ipsam contingunt; & ad utramque ipsarum m n, a b. Rursus quoniam conus basim habens circulum m n x, uerticem uero punctum f, secatur piano ad m f n triangulum recto, quod sectionem facit circulum m n x; & secatur altero piano subiecto, secante basim coni secundum rectam lineam x l, perpendicularem ad m n, quæ communis sectio est circuli m n x, & m f n trianguli: communis autem sectio subiecti plani, & trianguli m f n, uidelicet a b, æquidistans est lateri coni f k m: erit coni sectio in subiecto piano facta, parabole; cuius diameter a b: & lineæ à sectione ad ipsam ab ordinatim ductæ in recto angulo applicabuntur: æquidistantes enim sunt lineæ x l, quæ est ad a b perpendicularis. Et quoniam tres lineæ c d h, e a proportionales sunt; æqualis autem e a ipsi a f, & ipsi fk: atque h æqualis e f, & a k: erit ut c d ad a k, ita a k ad a f. quare ut c d ad a f, ita quadratum a k ad a f quadratum, hoc est ad id, quod a fk continetur. ergo rectum sectionis latus est c d: illud enim in undecimo theoremate demonstratum fuit.

Iisdem positis non sit datus angulus rectus: intelligaturq; ipsi æqualis, qui h a e continetur: & sit a h dimidia c d: ab h uero ducatur h e ad a e perpendicularis: perq; e ipsi b h æquidistans ducatur e l: & ab a ad e l perpendicularis a l. deinde secta e l bifariam in k, ab ipso k ducatur k m ad rectos angulos ipsi e l: & ad puncta f g producatur: & quadrato a l æquale sit rectangulum l k m. Itaque duabus rectis lineis l k, k m datis; l k quidem positione, quæ ad k terminatur; k m uero magnitudine: & dato angulo recto, describatur parabole, ut dictum est, cuius diameter k l, uertex k, & rectum latus k m. transibit autem per a, propterea quod quadratum a l rectangulo l k m est æquale: & linea a e sectio-

cor. 20. se
xti

22. primi

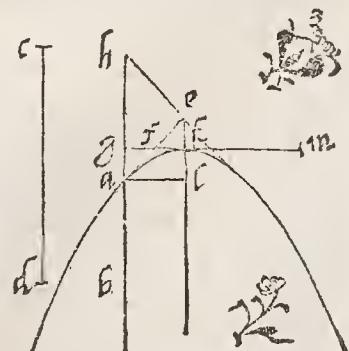
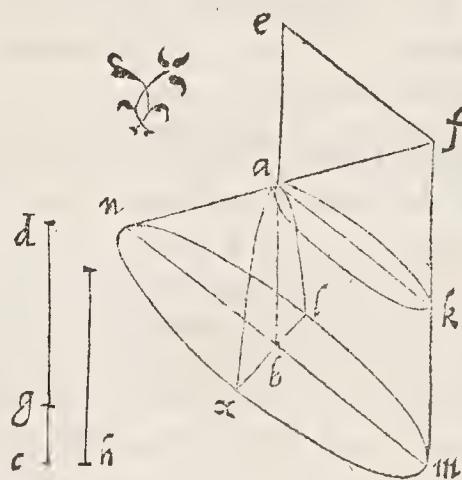
4. huius

19. unde-
cimi
3. diff. un
decimi

11. huius

20. sexti

33. huius



K

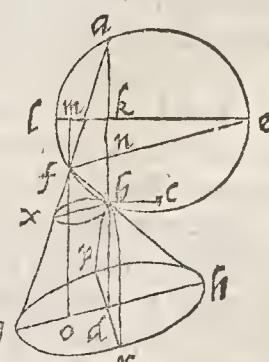
A P O L L O N I I P E R G A E I

46. huius nem continget, quoniam $1k$ æqualis est $k\cdot e$. sed ha æquidistat e $k\cdot l$. ergo hab diameter erit sectionis : & à sectione ad eam applicatæ ipfi a e æquidistantes bifariam diuidentur à linea $a\cdot b$: & in angulo ha e applicabuntur. quoniam igitur angulus a e h æqualis est angulo a g f, & communis qui ad a ; triangulum a h e simile est a g f triangulo. ut ergo ha ad a e, ita f a ad a g: & ideo ut dupla ha ad duplam a e, ita f a ad a g. sed cum cd sit dupla ipsius ha, erit ut f a ad a g, ita cd ad duplam a e. quare per ea, quæ in 49. theoremate ostensa sunt, erit cd rectum sectionis latus.

PROLEMA II. PROPOSITIO LIII.

Datis duabus rectis lineis terminatis, quæ ad rectos inter se angulos A constituuntur : & altera producta ad easdem partes angulo recto, inuenire in linea producta coni sectionem, quæ hyperbole dicitur, in eodem plano, in quo sunt datæ lineæ ; ita ut producta sit diameter sectionis, & uertex punctum, quod ad angulum cōsistit : quæ uero à sectione ad diametrum applicatur, angulum faciens æqualem dato, possit rectangulum, quod adiacet alteri lineæ, latitudinem habens lineam interiectam inter applicatam & uerticem sectionis ; excedensq; figura simili, & similiter posita ei, quæ datis à principio lineis continetur.

SINT datae rectæ lineæ terminatae a b, b c, ad rectos inter se angulos: & producatur a b ad d. oportet igitur in plano, quod per a b c transit, inuenire hyperbolæ, ita ut eius diameter sit a b d, uertex b punctum, & rectum figuræ latus b c. quæ uero à sectione ad b d in dato angulo applicentur, possint rectangula adiacentia ipsi b c, quæ latitudines habeant lineas interiectas inter ipsas, & punctum b: excedantq; figura simili, & similiter posita ei, quæ lineis a b, b c continetur. sit datus angulus primum rectus; & ex linea a b planum attollatur, rectum ad subiectum planum, in quo circa lineam a b circulus describitur a e b f; ita ut pars diametri circuli, quæ in portione a e b comprehenditur ad partem comprehensam in portione a f b, non maiorem proportionem habeat, quam a b ad b c. & secetur a e b circumferentia bifariam in e: ducaturq; à puncto e ad a b perpendicularis e k: & ad l producatur. ergo e l diameter est circuli. Quod si ut a b ad b c, ita fuerit e k ad k l, utemur puncto l; sin minus fiat ut a b ad b c, ita e k ad minorem ipsa k l, quæ sit k m: & per m ducatur m f æquidistantis a b: invenitisq; a f, e f, f b, per b ducatur b x ipsi f e æquidistantis. Itaque quoniam **B** angulus a f e æqualis est angulo e f b: angulus autem a f e angulo a x b: & e f b ipsi f b x: erit & f b x angulus angulo f x b æqualis. quare & linea f b æqualis lineæ f x. intelligatur conus, cuius uertex f, & basis circulus circa diametrum b x, rectus ad f b x triangulum. erit utique is conus rectus, quia f b æqualis est f x. producatur f b, f x, m f: & secetur conus plano, quod circulo b x æquidistet. erit ea sectio circulus, qui sit g p h r. ergo g h circuli diameter est. communis autem sectio circuli g h, & subiecti plani sit p d r. erit p d r ad utramque ipsarum g h, d b perpendicularis. uterque enim circulorum x b, h g rectus est ad triangulum f g h. sed & subiectum planum ad f g h rectum est. ergo communis ipsorum sectio p d r, erit & ad f g h perpendicularis, & ad omnes rectas lineas, quæ in eo plano consistentes, ipsam contingunt. Quoniam igitur conus, cuius basis est circulus g h, & uertex f, secatur plano ad f g h triangulum recto; quod facit sectionem circulum: secatur autem, & altero plano subiecto, secante basim coni secundum rectam lineam p d r, perpendiculararem ad g d h: & communis sectio subiecti plani, & trianguli f g h; uidelicet d b producta ad b conuenit cum g f in puncto a: erit ex iis, quæ demonstrata sunt, sectio p b r hyperbole, cuius uertex b: & ordi-

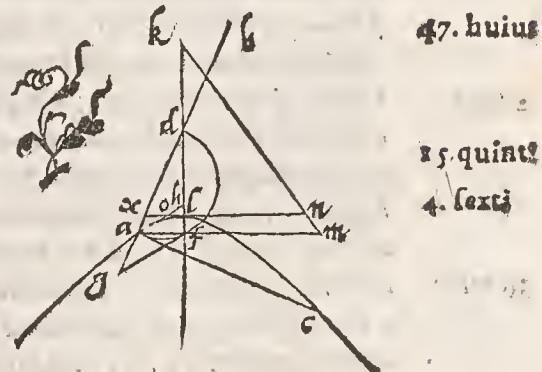


ordinatim ductæ ad diæmetrum b d in recto angulo applicabuntur. æquidistantes etenim sunt ipsi p d r. præterea quoniam ut a b ad b c, ita est e k ad k m: & ut e k ad k m, ita e n ad n f, hoc est rectangulum e n f ad n f quadratum: erit ut a b ad b c, ita e n f rectangulum ad quadratum n f. sed e n f rectangulum æquale est rectangulo a n b. ergo ut a b ad b c, ita rectangulum a n b ad n f quadratum. rectangulum autem a n b ad n f quadratum proportionem habet compositam ex proportione a n ad n f: & ex proportione b n ad n f. sed ut a n ad n f, ita a d ad d g, & fo ad o g: & ut b n ad n f, ita fo ad o h. quare a b ad b c proportionem compositam habet ex proportione fo ad o g, & ex proportione fo ad o h: hoc est ex proportione quadrati f o ad rectangulum g o h. est igitur ut a b ad b c, ita quadratum f o ad g o h rectangulum. atque est fo æquidistans a d. Sequitur ergo, ut a b sit transuersum figuræ latus, & b c rectum: etenim hæc in duodecimo theoremate ostensa sunt.

Non sit autem datus angulus rectus: sintq; rectæ lineæ datæ a b, a c: & datus angulus æqualis sit ei, qui b a h continetur. oportet igitur describere hyperbolæ, ita ut eius diameter sit a b, & rectū latus a c: ductæ uero ad diæmetrum in angulo b a h applicentur. secetur a b bifariam in d: & in linea a d describatur semicirculus a f d: & ducatur quædam recta linea f g in semicirculum, æquidistans a h; faciensq; proportionem quadrati f g ad rectangulum d g a eandem, quam habet c a ad duplam a d: & iuncta f h d producatur. ipsarum autem f d, d h media proportionalis sit d l: ponaturq; ipsi l d æqualis d k; & quadrato a f æquale rectangulum l f m: & iungatur k m. deinde per l ad rectos angulos ipsi k f ducatur l n. & ad x producatur. datis ergo duabus rectris lineis terminatis, & ad rectos inter se angulos, k l, l n describatur hyperbole, cuius transuersum quidem latus sit k l; rectum uero l n; & à sectione ad diæmetrum ductæ in recto angulo applicentur, & possint rectangula adiacentia lineæ l n, quæ latitudines habeant interiectas inter ipsas & punctum l, excedantq; figura simili ipsi k l n. transibit igitur sectio per a, cum quadratum a f æquale sit rectâculo l f m: & linea a h sectionem contingat; rectangulum enim f d h quadrato d l est æquale. ergo a b diæmeter est sectionis. Et quoniā ut c a ad duplam a d, hoc est ad a b, ita quadratum f g ad rectangulum d g a: sed c a ad duplam a d compositam proportionem habet ex proportione c a ad duplam a h, & ex proportione duplæ a h ad duplæ d a, hoc est ex proportione h a ad a d, hoc est f g ad g d: habebit c a ad a b proportionem compositam ex proportione c a ad duplam a h, & ex proportione f g ad g d. habet autem & quadratum f g ad rectangulum d g a proportionem compositam ex proportione f g ad g d, & ex proportione f g ad g a. proportio igitur composita ex proportione c a ad duplam a h, & ex proportione f g ad g d eadem est, quæ proportio composita ex proportione f g ad g d, & ex proportione f g ad g a. Communis auferatur proportio, quæ est f g ad g d. ergo ut c a ad duplam a h, ita f g ad g a. & ut f g ad g a, ita o a ad a x. ut igitur c a ad duplam a h, ita o a ad a x. Quod cum ita sit, erit a c linea, iuxta quam posunt, quæ à sectione ducuntur. hoc enim in quinquagesimo theoremate demonstratum est.

E V T O C I V S.

E T ex linea a b planum attollatur, rectum ad subiectum planum, in quo circa linea a b circulus describatur a e b f, ita ut pars diæmetri circuli, quæ in portione a e b comprehenditur ad partem comprehensam in portione a f b, non maiorem proportionem habeat, quæ a b ad b c.] Sint duæ rectæ lineæ a b, b c; & oporteat circa a b circulum describere, cuius diameter à linea a b ita dividatur, ut pars ipsius, quæ est ad c ad reliquâ partem non maiorem proportionem habeat, quæ a b ad b c. ponatur nunc eandem babere: seceturq; a b bifariam in d: & per d ad rectos angulos ipsi a b, ducatur e d f: & fiat ut a b ad b c, ita e d, ad d f: atque e f bifariam secetur. constat ergo, si quidem a b sit æqualis b c, & e d ipsi d f æquale



2. sexti
lem. in 2.
decimi
35. tertii
23. sexti

4. sexti
23. sexti
C

D
E

47. huius
25. quinti
4. sexti

4. sexti

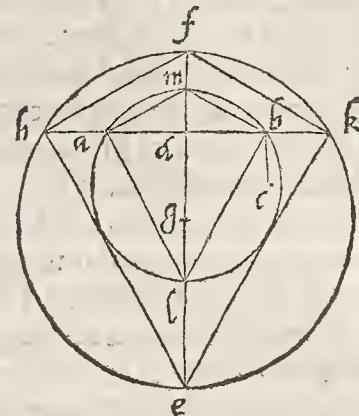
K a

APOLLONII PERGAEI

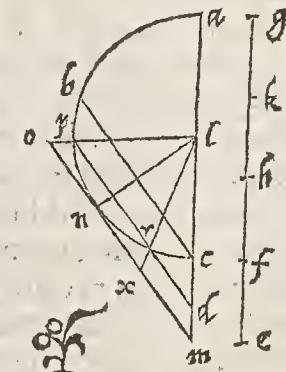
esse: & ideo punctum d lineam e f bifariam secare: si uero ab sit maior bc, & ed ipsa d f, punctus quod bifariam lineam e f secat, infra d cadet: & si minor sit, cadet supra. sed infra cadat ut g: & centro quidem g; inter-
vallo autem g f circulus describatur. necessarium utique est eum, uel per puncta ab transire, uel extra, uel intra. & si transeat per ab, factum iam erit, quod oportebat. si uero tra-
seatur extra, producatur ab in utranque partem, ut conueniat cum circumferentia circuli in punctis b k: iunctisq; f h, b e,
e k, k f, ducatur per b linea m b, & equidistant fk, & bl & qui-
distans k e: & iungantur ma, al, quæ ipsis fh, b e & equidista-
bunt, propterea quod æquales intersecte sint ad db: itemq; b d,

31. tertii. d k, & edf ad rectos angulos ipsi b k. Quoniam igitur an-
gulus, qui ad k rectus est: & mb, bl equidistant ipsis fk, k e:

29. quinti erit & qui ad b rectus: & eadem ratione, qui ad a. quare cir-
4. sexti culus circa ml descriptus per puncta ab transibit. Itaque describatur, sitq; malb. & quoniam
mb equidistant est ipsi fk, erit ut fd ad dm, ita k d ad db: & similiter ut kd ad db, ita ed ad
dl: & permutoando, ut ed ad df, ita ld ad dm. ergo ut ab ad bc, ita ld ad dm. Quod si circu-
lus circa fe descriptus, secet lineam ab, idem nihilominus demonstrabitur.



D Et in linea ad describatur semicirculus afd, & ducatur quedam recta linea fg in se-
micirculum, & equidistant ah; faciensq; proportionem quadrati fg ad rectangulum
dga eandem, quam habet ca ad duplam ad.] Sit semicirculus abc circa diametrum ac:
data autem proportio sit ef ad fg: & oporteat facere ea, quæ proposita sunt. ponatur ipsi ef & qua-
lis fb: & hg in punto k bifariam diuidatur: ducaturq; in semicirculo quæpiam recta linea cb,
in angulo acb: & à centro l ad ipsam perpendicularis ducatur, quæ producta occurrat circuli cir-
cumferentie in n: & per n ipsi cb & equidistant nm. ergo nm circulum contingit. Itaque fiat ut
fb ad b k, ita mx ad xn: & ipsi xn æqualis ponatur no. iungan-
tur autem lx, lo, quæ semicirculum in punctis rp secant: & ducatur
prd. Quoniam igitur xn æqualis est no, communisq; & ad rectos
angulos nl; erit lo ipsi lx æqualis. Sed lp est æqualis lr. ergo &
reliqua po reliqua rx; & propterea prd ipsi om æquidistant. est
autem ut fb ad bk, ita mx ad xn. & ut bk ad bg, ita xn ad xo.
ex æquali igitur ut fb ad bg, ita mx ad xo: conuertendoq; ut gh ad
bf, ita ox ad xm; & componendo ut gf ad fh, hoc est ad fe, ita om
ad mx: hoc est pd ad dr. ut autem pd ad dr, ita rectangulum pdr
ad dr quadratum. Sed rectangulum pdr æquale est rectangulo
adc. ergo ut gf ad fe, ita adc rectangulum ad quadratum dr: &
conuertendo ut ef ad fg, ita quadratum dr ad rectangulum adc.



F E D. C O M M A N D I N V S.

A Inuenire in linea producta coni sectionem, quæ hyperbole dicitur.] Græcus codex
ita habet, εὐρεῖ πὶ τὸς προσεκβληθέονς καὶ νοῦ τοῦν τὸν καλούμενον ὑπερβολὴν. Sed uidelicet
uerba illa. επὶ τὸς προσεκβληθέονς, superuacanea sint: statim enim subiungit. ὅπως οὐ μὲν προσεκ-
βληθεῖσα διάμετρος εἰν τὸς τοῦν.

C Est igitur ut ab ad bc, ita quadratum fo ad goh rectangulum.] Ad hunc locum
ut opinor, nonum Pappi lemma pertinet, in quo ostenditur, ut quadratum fo ad rectangulum
go h, ita esse rectangulum anb ad nf quadratum.

E Faciensq; proportionem quadrati fg ad rectangulum dga eandem, quam habet
ca ad duplam ad.] In græco codice legitur ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπό ληπτὸν διαλόγον
τὸν αὐτὸν τῷ τὸς αγαθῷ πρὸς α. sed legendum est, ut apud Eutocium. τὸν αὐτὸν τῷ τὸς αγαθῷ πρὸς
τὸν διπλασιὸν τὸς αδ. quod etiam ex ijs, quæ sequuntur perspicue appetat.

F Et linea ah sectionem contingat: rectangulum enim fdh quadrato dl est æquale.]
17. sexti Nam cum inter lineas fd, db proportionalis facta sit dl, rectangulum fdh æquale est quadrato
dl. quare ex ijs, quæ demonstrauimus in commentarijs in trigesimam septimam propositionem hu-
ius, linea ab sectionem ipsam contingat necesse est.

PRO

PROBLEMA III. PROPOSITIO LIII.

DATIS duabus rectis lineis terminatis, atque ad rectos inter se angulos, inuenire circa diametrum alteram ipsorum, coni sectionem, quæ ellipsis appellatur, in eodem plano, in quo sunt datae lineæ: ita ut uer tex sit punctum ad rectum angulum: & à sectione ad diametrum applicatae in angulo dato possint rectangula adiacentia alteri lineæ, quæ latitudinem habeant, lineam inter ipsas & uerticem sectionis interiectam, deficiantq; figura simili, & similiter posita ei, quæ datis rectis lineis continetur.

Sint datae rectæ lineæ a b, a c ad rectos angulos constitutæ, quarum maior a b. Itaque oportet in subiecto plano describere ellipsem, ita ut eius diameter sit a b, uer tex a, & rectum latus a c: ductæ uero à sectione ad a b in dato angulo applicentur: & possint spatia adiacentia lineæ a c, quæ latitudines habeant, lineas interiectas inter ipsas, & punctum a: deficiantq; figura simili, & similiter posita ei, quæ lineis b a, a c continentur. Sit datus angulus primum rectus: & ex linea a b planum attollatur, rectum ad subiectum planum; in quo ad a b circuli portio a d b descripta bifariam diuidatur in d: & iungantur d a, d b: ponatur autem ipsi a c æqualis a x: & per x ducatur x o æquidistans b d: & per o ipsa o f æquidistans a b: iuncta q; d f conueniat cum a b producta in puncto e. erit igitur ut b a ad a c, ita b a ad a x; hoc est d a ad a o, hoc est de ad e f. deinde iungantur a f, f b, & producantur: sumaturq; in fa quod uis punctum g: & per g ipsi d e æquidistans ducatur g l, quæ cum a b producta conueniat in k. deinde producatur f o: & conueniat cum g k in l. Quoniam igitur circumferentia a d æqualis est ipsi d b; & angulus a b d angulo d f b æqualis erit. & quoniam angulus e f a æqualis est duobus angulis f a d, f d a; atque est f a d angulus æqualis angulo f b d, & f d a ipsi f b a: erit angulus e f a æqualis angulo d b a, hoc est b f d. Sed cum d e æquidistet ipsi l g: & angulus e f a æqualis est angulo f g h: & d f b ipsi f h g. quare sequitur, ut f g h angulus angulo f h g sit æqualis: & linea f g linea f h. Itaque circa g h describatur circulus g h n, rectus ad triangulum h g f: & intelligatur conus, cuius basis circulus g h n, & uer tex punctum f. erit is conus rectus, quod g f æqualis sit f h. & quoniam circulus g h n rectus est ad h g f planum: est autem & planum subiectum rectum ad planum, quod per g h f transit: communis ipsorum sectio ad planum per g h f perpendicularis erit. communis autem sectio sit linea k m. ergo k m perpendicularis est ad utramque ipsarum a k, k g. Rursus quoniam conus, cuius basis est circulus g h n, & uer tex f, secatur piano per axem, quod facit sectionem triangulum g h f: secatur autem, & altero piano per a k, k m transeunte, quod est subiectum planum, secundum rectam lineam k m, perpendiculari ad g k: & planum occurrit ipsis g f, f h lateribus coni: erit facta sectio ellipsis, cuius diameter a b. ductæ uero à sectione ad a b in recto angulo applicabuntur; sunt enim ipsis k m æquidistantes. & quoniam ut d e ad e f, ita rectangulum d e f, hoc est b e a ad quadratum e f: rectangulum autem b e a ad quadratum e f compositam proportionem habet ex proportione b e ad e f, & ex proportione a e ad e f: utque b e ad e f, ita b k ad k h, hoc est f l ad l h: & ut a e ad e f, ita a k ad k g; hoc est f l ad

7. quinti
4. sexti

26. tertii
32. primi

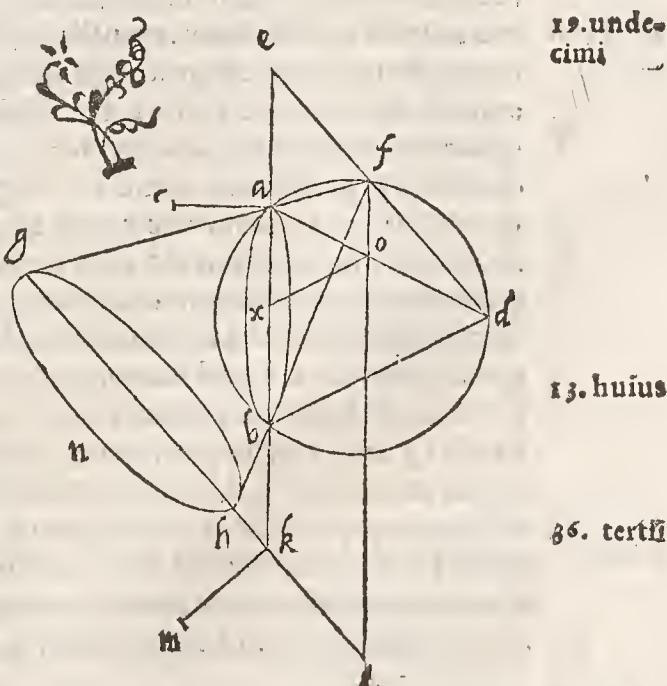
29. primi
6. primi

19. undeci
cimi

13. huic

86. tertii

4. sexti



APOLLONII PERGAEI

A Ig: habebit b a ad ac proportionem compositam ex proportione fl ad 1g; & ex proportione fl ad 1h. quæ quidem proportio eadem est, quā habet quadratum fl ad g1h rectangulum, ergo ut b a ad ac, ita fl quadratum ad rectangulum g1h. Quod cum ita sit, linea ac rectum erit figuræ latus, ut ostensum est in 13. theoremate.

Iisdem positis, sit linea ab minor ipsa ac: & oporteat circa diametrum ab ellipsis describere, ita ut ac rectum sit figuræ latus. Secetur ab bifariam in d; à quo ad rectos angulos ipsi ab ducatur e f: & rectangulo bac æquale sit quadratum fe: & linea fd æqualis de: linea vero ab æquidistantis ducatur fg: & fiat ut ca ad ab, ita ef

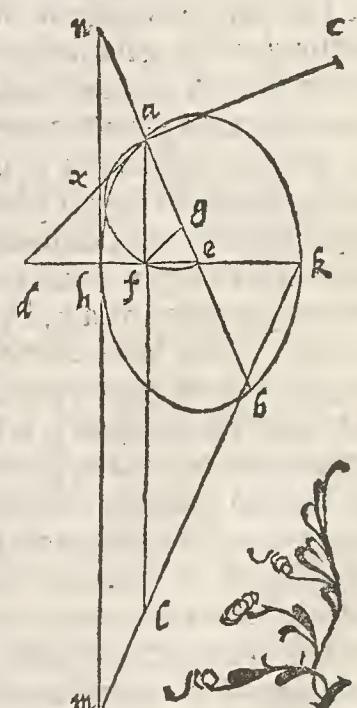
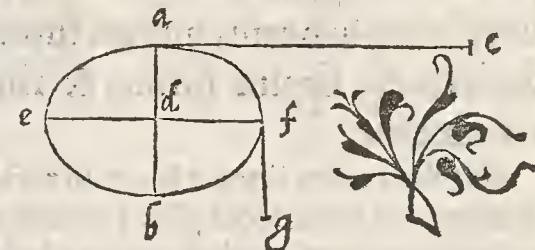
B ad fg. maior est igitur ef quam fg. Itaque quoniam rectangulum cab æquale est quadrato ef, ut ca ad ab, ita est quadratum fe ad quadratum ab; & quadratum fd ad da quadratum. ut autem ca ad ab, ita ef ad fg.

ergo ut ef ad fg, ita quadratum fd ad quadratum da. sed quadratum fd æquale est rectangulo fd e. quare ut ef ad fg, ita rectangulum edf ad da quadratum. Duabus igitur rectis lineis terminatis, aptatisq; ad rectos inter se angulos, quarum maior est ef, describatur ellipsis, ita ut ef diameter sit, & fg rectum figuræ latus. transibit utique sectio per a, quoniam ut rectangulum fde ad quadratum da, ita est ef ad fg: atque est ad æqualis db. transibit igitur etiam per b, ac propterea ellipsis circa ab descripta erit. & quoniam ut ca ad ab, ita quadratum fd ad quadratum da: atque est quadratum da rectangulo ab æquale:

C erit ut ca ad ab, ita df quadratum ad rectangulum ab. quare ac rectum est figuræ latus.

E Sed non sit datus angulus rectus: sitq; ipsi æqualis b ad: & secta ab bifariam in e, circa lineam ae semicirculus afe describatur; in quo ipsi ad æquidistantes ducatur fg; ita ut faciat proportionem quadrati fg ad rectangulum age eandem, quam habet linea ca ad ab: & iunctæ af, ef producantur: & sumatur ipsarum de, ef media proportionalis eh, cui æqualis ponatur ek. fiat autem quadrato af æquale rectangulum hfl: iungaturq; kl: & per h ipsi hf ad rectos angulos ducatur mhx, æquidistantes ipsi af; rectus est enim angulus, qui ad f. Itaque datis duabus rectis lineis terminatis, & ad rectos inter se angulos kh, hm, describatur ellipsis, cuius diameter transuersa kh, & rectum figuræ latus hm: ductæ vero à sectione ad hk, in recto angulo applicentur. transibit igitur sectio per a, quia quadratum fa rectangulo hfl est æquale. Et quoniam he æqualis est ek, & ae ipsi eb, transibit & per b sectio; cuius

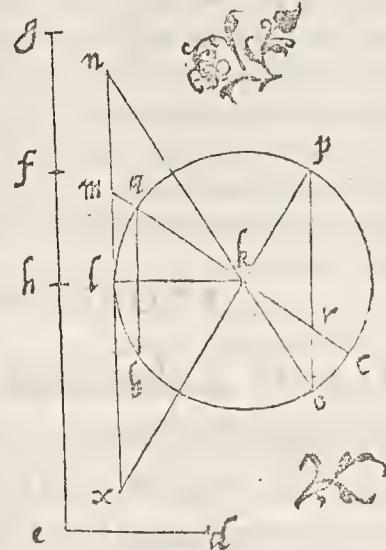
F quidem centrum e, diameter ae, & linea d a sectionem contingit; propterea quod rectangulum def æquale est quadrato eh. est autem ut ca ad ab, ita fg quadratum ad rectangulum age. Sed ca ad ab proportionem habet cōpositam ex proportione ca ad duplam ad, & ex proportione duplæ ad ad ab; hoc est ex proportione da ad ae. quadratum vero fg ad rectangulum age composita proportionem habet ex proportione fg ad ge, & ex proportione fg ad ga. ergo proportio composita ex proportione ca ad duplam ad, & ex proportione da ad ae, eadem est, quæ componitur ex proportione fg ad ge, & proportione fg ad ga. Sed ut da ad ae, ita fg ad ge. ergo sublata communi proportione, erit ut ca ad duplam ad, ita fg ad ga; hoc est xa ad ga. Quando autem hoc sit, linea ac rectum est figuræ latus.



E V T O C I V S.

Et se^ta ab bifariam in e, circa lineam ae semicirculus a fe describatur, in quo ipsi ad æquidistantes ducatur fg, ita ut faciat proportionem quadrati fg ad rectangulum age eandem, quam habet linea ca ad ab.] Sit semicirculus abc, in quo recta linea quæpiam ab: ponaturq; duas rectas lineas inæquales de, cf: & producatur ef ad g, ut sit fg æqualis de: & eg in h bifariam diuidatur. Sumpto autem circuli centro k, ab eo ducatur perpendicularis ad ab, quæ circumferentia circuli occurrat in l: perq; l ipsi ab æquidistantes ducatur lm: & ka producta conueniat cum lm in puncto m. dein defiat ut hf ad fg, ita lm ad mn: atque ipsi ln æqualis sit lx: & iunctæ nk, kx producantur adeo, ut à completo circulo secentur in punctis op: & iungatur orp. Quoniam igitur ut hf ad fg, ita est lm ad mn; componendo erit ut hg ad gf, ita ln ad nm: & conuertendo ut fg ad gh, ita mn ad nl. ut autem fg ad ge, ita mn ad nx: & diuidendo ut gf ad fe, ita nm ad mx. quod cum nl aqua lis sit lx, communisq; & ad rectos angulos lk; erit & kn æqualis kx. & est ko ipsi kp æqualis. æquidistantes igitur est nx ipsi op: atque ob id triangulum kmn simile triangulo kro: & triangulum kmx ipsi krp. ergo ut km ad kr, ita mn ad ro. Sed ut km ad kr, ita mx ad pr. quare ut mn ad ro, ita mx ad pr: & permuto ut nm ad mx, ita or ad rp. ut autem nm ad mx, ita gf ad fe, hoc est de ad ef: & ut or ad rp, ita quadratum or ad rectangulum orp. ergo ut de ad ef, ita or quadratum ad rectangulum orp. atque est rectangulum orp rectangulo arcæ æquale, ut igitur de ad ef, ita quadratum or ad rectangulum arcæ.

35. tertii



22

F E D. C O M M A N D I N V S.

HABEBIT ba ad ac proportionem compositam.] Superius namq; demonstratum est A ba ad ac ita esse, ut de ad ef.

Itaque quoniam rectangulum cab æquale est quadrato ef, ut ca ad ab, ita est B quadratum fe ad quadratum ab.] Cum enim rectangulum cab quadrato ef sit æquale, erit ut ca ad ef, ita ef ad ab. quare ut ca ad ab, ita quadratum ca ad quadratum ef, hoc est 14. sexti cor. 20. se xti quadratum ef ad ab quadratum.

Transibit utique sectio per a, quoniam ut rectangulum fde ad quadratum da, ita est ef ad fg.] Ex uigesima prima propositione huius.

C

D

Quare ac rectum est figuræ latus.] Ex eadem uigesima prima.

Et linea da sectionem continget, propterea quod rectangulum def æquale est quadrato eh.] Ex ijs, quæ nos demostrauimus in trigesimam octauam propositionem huius libri.

F

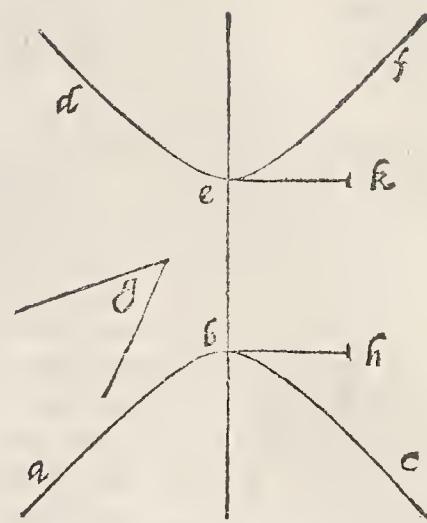
Quando autem hoc ita sit, linea ac rectum est figuræ latus.] Ex quinquagesima propositio- G neme huius.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO LV.

DATIS duabus rectis lineis terminatis, atque ad rectos inter se angulos; inuenire oppositas sectiones, quarum diameter sit una datarum linearum; & uertices lineæ termini: applicatae uero ab utraque sectione in dato angulo possint spatia adiacentia alteri lineæ, excedentiaq; figura simili ei, quæ datis lineis continetur.

A P O L L O N I I P E R G A E I

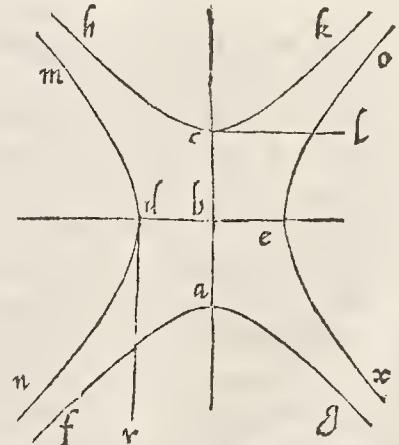
Sint datae rectæ lineæ terminatae ad rectos inter se angulos b e, b h: & datuſ angulus sit g. oportet utique circa unam linearum b e, b h sectiones oppositas describere; ita ut ductæ à sectione lineæ in angulo g applicentur. Datis igitur duabus rectis lineis b e, b h describatur hyperbole a b c, cuius diameter transuersa sit b e; & rectum figuræ latutus h b: ductæ uero ad lineam, quæ indirectum ipſi b e constituitur, applicentur in angulo g; quod quomodo fieri oporteat, iam dictum est. Ducatur per e linea e k ad rectos angulos ipſi b e, quæ sit æqualis b h: & describatur similiter alia hyperbole d e f; ita ut eius diameter sit b e, rectum figuræ latutus e k; & ductæ à sectione ordinatim applicentur in angulo, qui deinceps est ipſi g. constat igitur b e sectiones esse oppositas; quarum diameter est una: duo uero recta latera inter se æqualia.



P R O B L E M A V . P R O P O S I T I O L V I .

D A T I S duabus rectis lineis, se ſe bifariam ſecantibus, circa utramque ipſarum sectiones oppositas describere, ita ut rectæ lineæ ſint coniugatæ diametri: & quarumlibet oppofitarum ſectionum diameter poſſit figuram aliarum oppofitarum.

ss. huius
diff. ſec.
diamet. Sint datae rectæ lineæ bifariam ſe inuicem ſecantes a c, d e. oportet iam circa utramque ipſarum diametrum oppofitas ſectiones describere, ita ut a c, d e coniugatæ ſint in ipſis: & d e quidem poſſit figuram earum, quæ circa a c ſunt: a c uero figuram earum poſſit, quæ circa d e. Sit quadrato d e æquale rectangulum a c l: ſitq; l c ipſi c a ad rectos angulos: & duabus datis rectis lineis, ad rectos inter ſe angulos coniugatis, a c, c l deſcribantur oppofitæ ſectiones f a g, h c k, quarum diameter transuersa ſit c a, & rectum latutus c l: ductæ autem à ſectionib; ad c a in dato angulo applicentur. erit ipſa d e ſecunda diameter oppofitarum ſectionum, quod medium proportionem habeat inter latera figuræ: & ordinatim applicatæ æquidistantes ad b bifariam ſecet. Sit rurſus quadrato a c æquale rectangulum e d r: & ſit r d ad rectos angulos ipſi d e. itaque datis duabus rectis lineis, ad rectos inter ſe angulos, e d, d r, ſectiones oppofitæ, m d n, o e x deſcribantur, quarum transuersa diameter d e, & d r rectum figuræ latutus: ductæ uero à ſectionib; applicentur ad d e in dato angulo, linea a c ſecunda diameter erit ſectionum m d n, o e x. ergo a c lineas ipſi d e æquidistantes inter ſectiones f a g, h c k bifariam ſecat; d e uero æquidistantes ipſi a c, quod facere oportebat. uocentur autem huiusmodi ſectiones coniugatæ.



E V T O C I V S.

4 S C R I P S I M V S in commentarijs in decimum theorema, quod nam fuerit propositum Apollonio in primis tresdecim theorematibus: & in Commentarijs in sextum decimum de tribus sequentibus dictum est. At uero in septimo decimo afferit Apollonius rectam lineam, quæ per uerticem ducitur, ordinatim applicatæ æquidistantes, extra ſectionem cadere. In decimo octavo lineam, quæ utcunq; contingenti æquidistantes intra ſectionem ducitur, ipsam ſecare. In decimo nono li-

neam,

neam, quæ ducitur ab aliquo puncto diametri, ordinatim applicatae & quidistans, cum sectione conuenire. In uigesimo, & uigesimo primo lineas in sectionibus ordinatim applicatas inquirit, quo modo inter se se habeant: itemq; diametri portiones, quæ ab ipsis fiunt. In uigesimo secundo, & uigesimo tertio tractat de linea, quæ in duobus punctis sectioni occurrit. In uigesimo quarto, & uigesimo quinto de ea, quæ ipsi occurrit in uno puncto tantum, hoc est de linea, quæ sectionem continet. In uigesimo sexto de ea, quæ diametro parabolæ, & hyperbolæ & quidistans dicitur. In uigesimo septimo de linea secante parabolæ diametrum, quippe quæ ex utraque parte sectioni occurrat. In uigesima octauo de ea, quæ & quidistans dicitur contingenti unam oppositarum sectionum. In uigesimo nono de ea, quæ per centrum oppositarum sectionum transiens producitur. In trigesimo de linea transeunte per centrum ellipsis, & oppositarum sectionum, quæ producta à centro bifariam diuiditur. In trigesimo primo de linea hyperbolæ contingente, quæ quidem diametrum secat inter centrum, & uerticem sectionis. In 32.33.34.35.36. de lineis contingentibus agitur. In trigesimo septimo de contingentibus, & de ijs, quæ à tactu applicantur in hyperbola & ellipsi. In trigesimo octauo de contingentibus hyperbolæ, & ellipsis, quo pacto se habeant ad secundam diametrum. In trigesimo nono & quadragesimo de ijsdem agit, compositas ex his proportiones inquirens. In quadragesimo primo de parallelogrammis descriptis ab applicata, & ea, quæ ex centro hyperbolæ & ellipsis. In quadragesimo secundo afferit triangulum in parabola ex contingente, & applicata factum & quale esse ei parallelogrammo, quod cum & quale altitudinem habeat, in dimidia basi constituitur. In quadragesimo tertio inquirit in hyperbola & ellipsi, quomodo se habeant inter se se triangula, quæ à contingentibus & applicatis fiunt. In quadragesimo quarto idem inquirit in oppositis sectionibus. In quadragesimo quinto itidem in secunda diametro hyperbolæ & ellipsis. In quadragesimo sexto de alijs parabolæ diametris, quæ sunt post diametrum principalem. In quadragesimo septimo de alijs diametris hyperbolæ & ellipsis. In quadragesimo octauo de alijs diametris oppositarum sectionum. In quadragesimo nono de lineis, iuxta quas possunt applicatae ad alias parabolæ diametros. In quinquagesimo de ijsdem in hyperbola, & ellipsi. In quinquagesimo primo de ijsdem in oppositis sectionibus. Itaque cum hæc scripsisset, addidisset q; epilogum quendam, in quinquagesimo secundo problema illud ostendit; quomodo parabole in plano describatur. In quinquagesimo tertio quomodo describatur hyperbole. In quinquagesimo quarto, quomodo ellipsis. In quinquagesimo quinto, quomodo oppositæ sectiones. In quinquagesimo sexto, quomodo describantur oppositæ sectiones illæ, quas coniugatas appellamus.

P R I M I L I B R I F I N I S .

PAPP I ALEXANDRINI
LEMMATA IN SECUNDVM LIBRVM
CONICORVM APOLLONII.

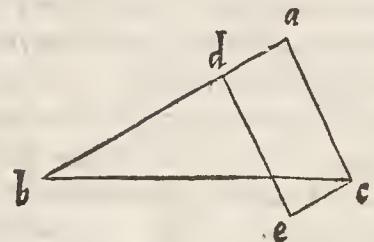
LEMMA PRIMVM.



Atis duabus rectis lineis ab, bc, & data recta de;
in ipsas ab, bc coaptare li-
neam, ipsi de æqualem, &
æquidistantem.

Hoc autem manifestum est.
nam si per e ducatur ec æqui-
distans ab; & per c ipsi de æqui-
distans ducatur ca, erit ac ed

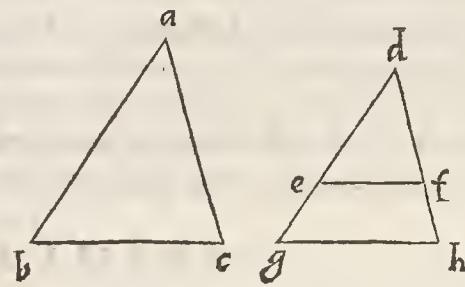
14. primi parallelogrammum: & propterea ac ipsi de & æqua-
lis, & æquidistans; quæ quidem in datas rectas lineas
ab, bc coaptata erit.



LEMMA II.

Sint duo triangula abc, def: sitq; ut ab ad bc, ita de ad ef: & ab qui-
dem sit æquidistantes de; bc uero ipsi ef. Dico
& ac ipsi df æquidistantem esse.

29. primi Producatur enim bc; & conueniat cum de,
6. sexti. df in punctis gh. est igitur angulus e æqualis
28. primi angulo g, hoc est ipsi b; propterea quod duas li-
neas ab, bc duabus de, ef æquidistant. Itaque
quoniam ut ab ad bc, ita est de ad ef: & an-
guli ad be sunt æquales; erit angulus c æqua-
lis angulo f, hoc est angulo h. ergo linea ac ipsi
dh est æquidistans.



LEMMA III.

Sit recta linea ab; sintq; æquales ac, db: & inter cd sumatur quodus punctum e. Dico rectangulum adb unà cum rectangulo ced æquale esse rectan-
gulo aeb.

5. secundi. Secetur enim cd bifariam in f, quomodo docunque se habeat ad e punctum. & quo-
niam rectangulum adb unà cum quadrato fd æquale est quadrato fb: quadrato au-
tem fd rectangulum ced unà cum quadrato fe est æqua-
le: & quadrato fb æquale rectangulum aeb unà cum
quadrato fe: erit rectangulum adb unà cum rectangulo
ced, & quadrato fe æquale rectangulo aeb & quadrato
fe. commune auferatur quadratum fe. reliquum igitur
adb rectangulum unà cum rectangulo ced æquale est rectangulo aeb.



LEMMA IV.

Sit recta linea ab: & æquales sint ac, db; & inter cd quodus punctum e
sumatur. Dico rectangulum aeb æquale esse rectangulo ced, & rectangulo da.

Secetur

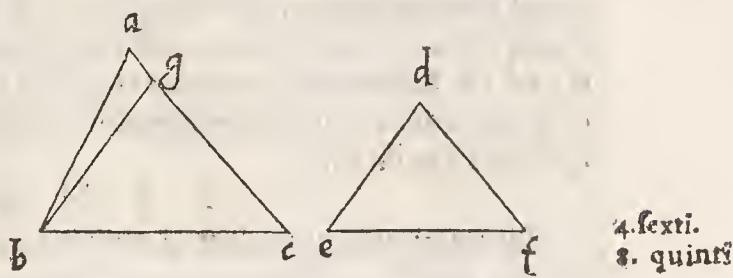
Secetur enim cd in f bifariam, quomodocumque se habeat ad punctum e. quare tota af ipsi fb est æqualis. rectangulum igitur aeb una cum quadrato ef æquale est quadrato af. Sed rectangulum dac unà cum cf quadrato quadrato af est æquale. ergo rectangulum aeb unà cum quadrato ef æquale est rectangulo dac, & cf quadrato. quadratum autem cf est æquale rectangulo ced, & quadrato ef. quare sublato communi, nempe quadrato ef, erit quod relinquitur rectangulum aeb æquale rectangulo ced, & rectangulo dac.

a c ef d b

A
5 secundi
6.

L E M M A V.

Sint duo triangula abc, def: & sit angulus quidem c æqualis angulo f. angulus uero b angulo e maior. Dico lineam bc ad ca minorem proportionem habere, quam ef ad fd.

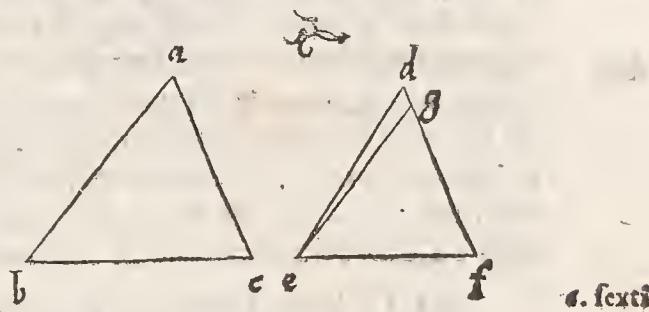


4. sexti.
5. quinti

Constituatur enim angulus cbg æqualis angulo e: & est angulus c angulo f æqualis. ergo ut bg ad cg, ita ef ad fd. Sed bc ad ca minorem habet proportionem, quam bc ad cg: quare & bc ad ca minorem proportionem habebit, quam ef ad fd.

L E M M A VI.

Habeat rursus bc ad ca maiorem proportionem, quam ef ad fd: & sit angulus c æqualis angulo f. Dico angulum b angulo e minorem esse.

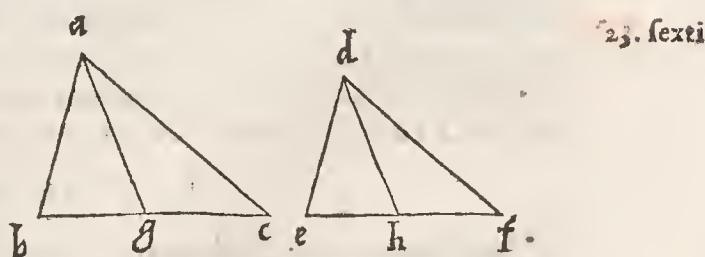


6. sexti

Quoniam enim bc ad ca maiorem proportionem habet, quam ef ad fd: si fiat ut bc ad ca, ita ef ad aliam quandam: erit ea minor, quam fd. Itaque sit fg: & eg iungatur. cum igitur circa æquales angulos latera proportionalia sint; angulus b est æqualis angulo fe: & propterea angulo e minor erit.

L E M M A VII.

Sint triangula similia abc, def: & ducantur ag, dh, ita ut sit rectangulum bcg ad quadratum ca, sicut rectangulum efh ad quadratum fd. Dico triangulum acg triangulo dhf simile esse.



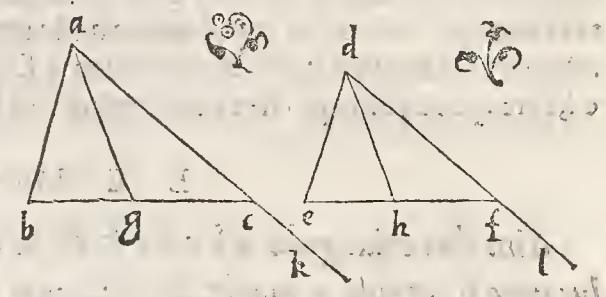
7. sexti

Quoniam enim est ut rectangulum bcg ad quadratum ca, ita rectangulum efh ad quadratum fd: & proportio rectanguli bcg ad quadratum ca composta est ex proportione bc ad ca, & proportione gc ad ca: proportio autem rectanguli efh ad quadratum fd componitur ex proportione ef ad fd: & proportione hf ad fd: quarum quidem proportio bc ad ca eadem est, quæ ef ad fd, propter similitudinem triangulorum: erit reliqua gc ad ca eadem, quæ hf ad fd. & sunt circa æquales angulos latera proportionalia. ergo triangulum acg triangulo dhf 6. sexti

P A P P I L E M M A T A

simile erit. Hoc igitur ex coniuncta proportione in eum, quem diximus, modum demonstratur. Sed licet & aliter demonstrare absque coniuncta proportione.

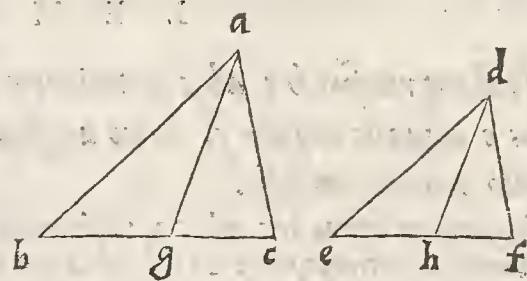
ALITER. Ponatur enim rectangulo $b c g$ æquale rectangulum $a c k$. ergo ut $b c$ ad $c k$, ita $a c$ ad $c g$. Rursus ponatur rectangulo $e f h$ æquale rectangulum $d f l$. erit ut $e f$ ad $f l$, ita $d f$ ad $f h$. Sed positum est, ut rectangulum $b c g$, hoc est rectangulum $a c k$ ad quadratum $a c$, uidelicet ut $a c$ ad $c k$, ita rectangulum $e f h$, hoc est $d f l$ ad quadratum $d f$, uidelicet ut $d f$ ad $f l$: Ut autem $b c$ ad $c a$, ita $e f$ ad $f d$, ob similitudinem triangulorum. ergo ut $b c$ ad $c k$, ita $e f$ ad $f l$. Sed ut $b c$ ad $c k$, ita $a c$ ad $c g$, quod demonstratum est: itemq; ut $e f$ ad $f l$, ita $d f$ ad $f h$. quare ut $a c$ ad $c g$, ita erit $d f$ ad $f h$: & sunt circa æquales angulos. triangulum igitur $a c g$ simile est triangulo $d f h$. & eadem ratione triangulum $a g b$ triangulo $d h e$, quod & $a b c$ triangulum ipsi $d e f$ simile sit.



L E M M A V I I I .

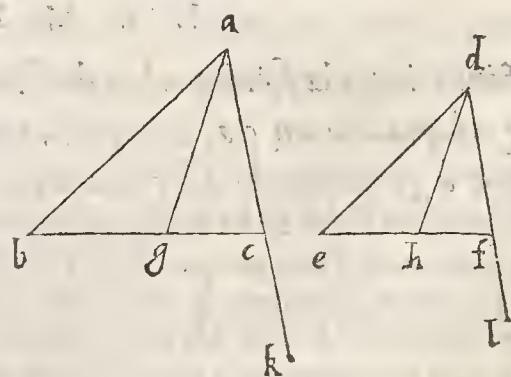
Sit triangulum quidem $a b c$ simile triangulo $d e f$; triangulum vero $a b g$ triangulo $d e h$ simile. Dico ut rectangulum $b c g$ ad quadratum $c a$, ita esse rectangulum $e f h$ ad quadratum $f d$.

Quoniam enim propter similitudinem triangulorum totus angulus a toti d est æqualis: angulus autem $b a g$ æqualis est angulo $e d h$: et reliquo $g a c$ reliquo $h d f$ æqualis. Sed & angulus c est æqualis angulo f . est igitur ut $g c$ ad $c a$, ita $h f$ ad $f d$. ut autem $b c$ ad $c a$, ita $e f$ ad $f d$. ergo & composita proportio compositæ proportioni eadem erit: id circoq; ut rectangulum $b c g$ ad quadratum $c a$, ita rectangulum $e f h$ ad quadratum $f d$.



ALITER ABSQVE CONIVNCTA PROPORTIONE.

Ponatur rectangulo $b c g$ æquale rectangulum $a c k$: & rectangulo $e f h$ æquale rectangulum $d f l$, erit rursus ut $b c$ ad $c k$, ita $a c$ ad $c g$. ut autem $e f$ ad $f l$, ita $d f$ ad $f h$: & eadem ratione, qua supra demonstrabimus, ut $a c$ ad $c g$, ita esse $d f$ ad $f h$. ergo ut $b c$ ad $c k$, ita $e f$ ad $f l$. Sed ut $b c$ ad $c a$, ita $e f$ ad $f d$, ob triangulorum similitudinem. ex æquali igitur ut $k c$ ad $c a$, hoc est ut rectangulum $k c a$, hoc est rectangulum $b c g$ ad quadratum $c a$, ita $l f$ ad $f d$; hoc est rectangulum $l f d$, hoc est rectangulum $e f h$ ad quadratum $f d$. quod demonstrare oportebat.



L E M M A I X .

Similiter demonstrabimus, si ut rectangulum $b c g$ ad quadratum $a c$, ita fuerit rectangulum $e f h$ ad quadratum $f d$: & triangulum $a b c$ simile triangulo $d e f$: & triangulum $a b g$ triangulo $d e h$ simile esse.

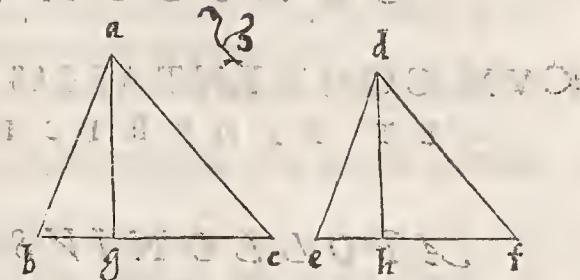
LEM

LIBER II. ELEMENTA XI. LXXXII.

Sint duo triangula similia $a b c$, $d e f$:

& ducantur perpendiculares $a g, d h$. Dico ut rectangulum $b g c$ ad quadratum $a g$, ita esse rectangulum $e h f$ ad quadratum $d h$.

Hoc autem ex ijs, quæ supra dicta sunt, perspicue constat.

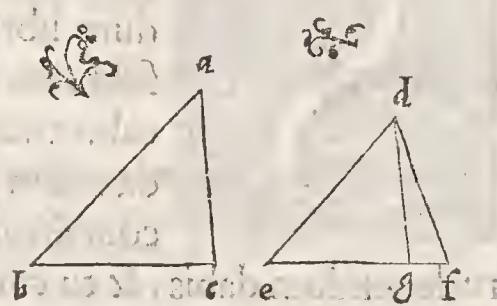


Sit æqualis quidem angulus b angulo e : an-

gulus uero a angulo d minor. Dico $c b$ ad $b a$

minorem proportionem habere, quam $f e$ ad $e d$.

Quoniam enim angulus a minor est angulo d , constituatur angulo a æqualis angulus $e d g$. est igitur ut $c b$ ad $b a$; ita $g e$ ad $e d$, sed $g e$ ad $e d$ minorem habet proportionem, quam $f e$ ad $e d$. ergo & $c b$ ad $b a$ minorem proportionem habebit, quam $f e$ ad $e d$. similiter & omnia alia eiusmodi ostendemus.

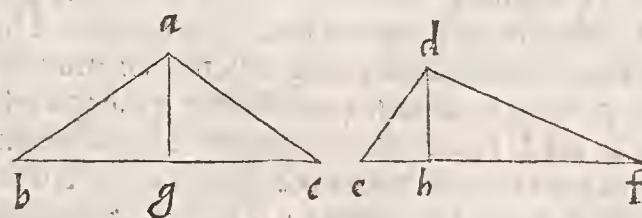


LIBER II. ELEMENTA XI. I.

Sit ut rectangulum $b g c$ ad quadratum $a g$, ita rectangulum $e h f$ ad quadratum $d h$: & sit $b g$ quidem æqualis $g c$: $c g$ uero ad $g a$ minorem proportionem ha-

beat, quam $f h$ ad $h d$. dico $f h$ maiorem esse ipsa $h e$.

Quoniam enim quadratum $c g$ ad quadratum $g a$ minorem proportionem habet, quam quadratum $f h$ ad quadratum $h d$: quadratum au-
tem $c g$ æquale est rectangulo $b g c$:
habebit $b g c$ rectangulum ad qua-
dratum $a g$ minorem propor-
tionem, quam quadratum $f h$ ad qua-
dratum $h d$. sed ut $b g c$ rectangu-
lum ad quadratum $a g$, ita positum
est rectangulum $e h f$ ad quadratum $h d$. ergo rectangulum $e h f$ ad quadratum $h d$,
minorem proportionem habet, quam quadratum $f h$ ad quadratum $h d$. maius igit- 8. quinti.
tut est quadratum $f h$ rectangulo $e h f$. quare & linea $f h$ maior erit linea $h e$.



APOLLONI PERGAEI
CONICORVM LIBER II.

CVM COMMENTARIIS EUTOCHII ASCALONITAE,
ET FEDERICI COMMANDINI.

APOLLONIVS EUDEMONIS. D.

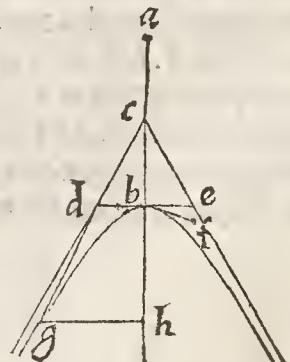


I uales bene est, ego quidem satis commode habeo. Apollonio filio meo dedi, ut ad te perferret secundum librum conicorum, quæ à nobis conscripta sunt. tu eum diligenter percurres: & communicabis cum iis, qui eo tibi digni uidebuntur. Philonidae etiam geometræ, quo cum tibi Ephesi amicitiam conciliaui, si quando in isthac Pergami loca uenerit, legendum dabis. & tu cura ut ualeas.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si hyperbolæ recta linea ad uerticem contingat: & ab ipso ex utra que parte diametri sumatur æqualis ei, quæ potest quartam figuræ partem: lineæ, quæ à sectionis centro ad sumptos terminos contingentis ducentur, cum sectione non conuenient.

- SIT hyperbole, cuius diameter $a b$; centrum c ; & rectum figuræ latus $b f$: linea uero de sectionem contingat in b : & quartæ parti figuræ, quæ continetur lineis $a b$, $b f$ æquale sit quadratum utriusque ipsarum $d b$, $b e$: & iunctæ $c d$, $c e$ producantur. Dico eas cum sectione non conuenire. si enim fieri potest, conueniat $c d$ cum sectione in g : & à g ordinatim applicetur $g h$. ergo $g h$ æquidistantis est ipsi $d b$. & quoniam ut $a b$ ad $b f$, ita est quadratum $a b$ ad rectangulum $a b f$: quadratum autem $c b$ quarta pars est quadrati $a b$: & quadratum $b d$ itidem quarta pars rectanguli $a b f$ erit ut $a b$ ad $b f$, ita quadratum $c b$ ad A $b d$ quadratum; hoc est quadratum $c h$ ad quadratum $h g$. B sed ut $a b$ ad $b f$, ita est rectangulum $a h b$ ad quadratum $h g$. quare ut $c h$ quadratum ad quadratum $h g$, ita rectangulum $a h b$ ad $h g$ quadratum. ex quibus sequitur rectangulum $a h b$ quadrato $c h$ æquale esse: quod est absurdum. ergo $c d$ cum sectione non conuenit. similiter demonstrabitur neque ipsam C $c e$ conuenire cum sectione. sunt igitur lineæ $c d$ $c e$ asymptoti, hoc est cum sectione non conuenientes.



E V T O C I V S.

EXPLICATVRVS secundum librum conicorum amicissime Anthemi, illud prædicere oportere existimo, me ea tantummodo in ipsum conscribere, quæ ex primo libro intelliigi possunt. Primum theorema casum non habet, lineæ enim $d c$, $c e$ sectionis asymptoti cum sint, eadem manent in omnium diametro, tum linea contingente.

FED.

F E D . C O M M A N D I N V S .

HOC est quadratum ch ad quadratum hg.] Quoniam enim ponitur lineam cd pro A duobus cum sectione conuenire in g: erit ex quarta sexti, ut cb ad bd, ita ch ad hg. quare ex 22. eiusdem, ut quadratum cb ad bd quadratum, ita quadratum ch ad quadratum hg.

Sed ut ab ad bf, ita est rectangulum ahb ad quadratum hg.] Ex uigesima prima B primi libri huius.

Quod est absurdum.] Est enim quadratum ch aequalis rectangulo ahb una cum quadrato C bc ex sexta secundi libri elementorum.

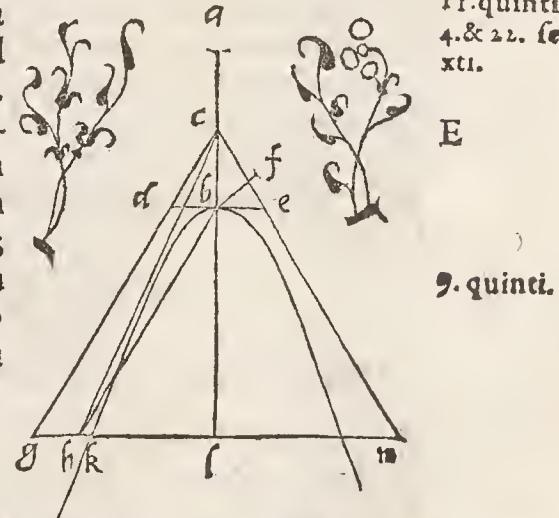
Sunt igitur lineae cd, ce asymptoti, hoc est cum sectione non conuenientes.] Has D Græci ἀσύμπτωτος τὸ τοῦ uel simpliciter ἀσύμπτωτος appellant. quare nobis deinceps, ut ἀσύμπτωτοι uno uerbo dicamus, græca uocem uti liceat.

THEOREMA I I . PROPOSITIO I I .

Iisdem manentibus demonstrandum est non esse alteram asymptoton, quæ angulum dce diuidat.

SI enim fieri potest, sit ch: & per b ipsi cd aequidistantes ducatur bh, quæ cum ch in h puncto conueniat: ipsi uero bh ponatur aequalis dg; & iuncta gh ad klm producatur. Quoniam igitur bh, dg aequales sunt, & aequidistantes; & ipsæ db, gh aequali 33. primi. les & aequidistantes sint necesse est. secatur autem ab bifariam in c: & ipsi adiungitur quedam linea bl. ergo rectangulum alb unà cum cb quadrato aequaliter est quadrato cl. similiter quoniam gm ipsi de aequidistant: atque est db aequalis be; & gl A ipsi lm aequalis erit. quod cum gh sit aequalis db, erit gk ipsa db maior: estq; km B maior be, quoniam & ipsa lm. rectangulum igitur mk g maius est rectangulo db e; C hoc est quadrato db. & quoniam ut ab ad bf, ita est quadratum cb ad bd quadratum D: ut autem ab ad bf, ita alb rectangulum ad quadratum lk: erit ut quadratum cb ad bd quadratum, ita alb rectangulum ad quadratum lk. sed ut quadratum cb ad quadratum bd, ita quadratum cl ad quadratum lg. ergo ut quadratum cl ad quadratum lg, ita alb rectangulum ad quadratum lk. Itaque cum sit, ut totum quadratum cl ad totum quadratum lg, ita ablatum rectangulum alb ad ablatum quadratum lk: erit reliquum quadratum cb ad reliquum rectangulum mk g, ut quadratum cl ad quadratum lg; hoc est ut quadratum cb ad bd quadratum. ergo rectangulo mk g aequaliter est quadratum bd: quod fieri non potest: ostensum est enim eo maius. non igitur linea ch asymptotos est, uidelicet cum sectione non conueniens.

E V T O C I V . S .



HOC theorema casum non habet, si quidem linea bb sectionem omnino in duobus punctis secat. quoniam enim aequidistant est cd, cum ipsa ch conueniet. quare prius cum sectione conuenient necesse est.

F E D . C O M M A N D I N V S .

SIMILITER quoniam gm ipsi de aequidistant; atque est db aequalis be: & gl ipsi lm aequalis erit.] Ex ijs, quæ nos demonstrauimus in commentarijs in sextam propositionem primi libri huius.

Erit gk ipsa db maior.] Nam cum ponatur ch asymptotos, punctum h extra sectionem B cadet, uidelicet extra punctum k; & idcirco linea gk maior erit, quam gh, hoc est quam db.

Estq; km maior be, quoniam & ipsa lm.] Est enim in triangulo clm, ut cl ad lm, ita C.

APOLLONII PERGAEI

cb ad b e: & permutando ut lc ad cb, ita lm ad be, sed lc maior est cb, ergo & lm maior be, atque est km maior lm. multo igitur km ipsa be maior erit.

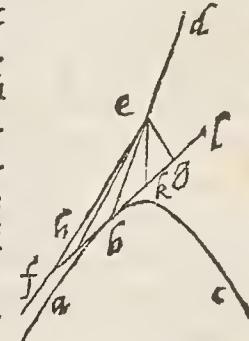
D *Et quoniam ut ab ad bf, ita est quadratum cb ad bd quadratum.] Ex demonstratis in prima propositione huius libri.*

E *Itaque cum sit ut totum quadratum cl ad totum quadratum lg, ita ablatum rectangulum alb ad ablatum quadratum lk: erit reliquu &c.] Quoniam enim rectangulum alb una cum quadrato cb aequalē est quadrato cl, si à quadrato cl auferatur rectangulum alb reliquum erit cb quadratum. Rursus quoniam recta linea gm secatur in partes aequales in l, & in partes inaequales in k: rectangulum mk una cum quadrato lk aequalē est quadrato lg. ergo si à quadrato lg auferatur lk quadratum, relinquetur rectangulum mk g. cum igitur sit, ut quadratum el ad quadratum lg, hoc est ut totum ad totum, ita rectangulum alb ad quadratum lk, ablatum scilicet ad ablatum; erit reliquum ad reliquum, hoc est quadratum cb ad rectangulum mk g, ut totum ad totum.*

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si hyperbolē contingat recta linea, cum utraque asymptoton conueniet, & ad tactum bifariam secabitur: quadratum uero utriusque eius portionis aequalē erit quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum per tactum ductam constituitur.

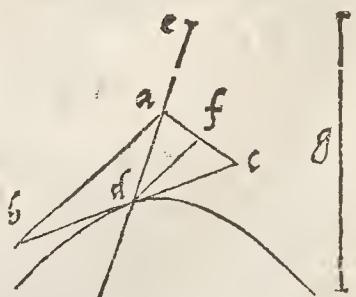
SIT hyperbole abc, cuius centrum e: & asymptoti sint fe, eg: quædam uero recta linea hk sectionem contingat in puncto b. Dico hk productam cū lineis fe, eg conuenire. si enim fieri potest, non conueniat; & iuncta be producatur: sitq; ipsi be aequalis ed. diameter igitur est bd. ponatur quartæ parti figuræ, quæ est ad bd aequalē quadratum utriusque ipsarum hb, bk: & iungantur he, ek. ergo he, ek asymptoti sunt, quod fieri nequit. positum est enim asymptotos esse fe, eg. quare hk producta cū ipsis fe, eg conuenit. itaque conueniat in punctis fg. Dico quadratum utriusque ipsarum fb, bg aequalē esse quartæ parti figuræ, quæ fit ad bd. non enim, sed si fieri potest, sit quartæ parti eius figuræ aequalē quadratum utriusque ipsarum hb, bk. asymptoti igitur sunt he, ek; quod est absurdum. ergo quadratum utriusq; fb, bg aequalē est quartæ parti figuræ, quæ ad ipsam bd constituitur.



PROBLEMA I. PROPOSITIO IV.

Datis duabus rectis lineis angulum continentibus, & puncto intra angulum dato, describere per punctum coni sectionē, quæ hyperbole appellatur, ita ut datæ lineæ ipsius asymptoti sint.

SINT duæ rectæ lineæ ab, ac angulum ad a continentes: sitq; datum punctum d: & oporteat per d circa asymptotos ba c hyperbolē describere. iungatur ad; & ad e producatur, ita ut da sit aequalis ae: & per d ipsi ab aequalidistans ducatur df: pona turq; af aequalis fc: iuncta uero cd producatur ad b: & quadrato cb aequalē fiat rectangulum ex de, & eg. deinde producta ad circa ipsam per d hyperbole describatur, ita ut applicata ad diametrum possint rectangula adiacentia lineæ g; excedentiaq; figura ipsi deg simili. Quoniam igitur aequalidistans est df ipsi ba; & cf aequalis fa; erit cd ipsi db aequalis. ergo quadratum cb quadruplum est quadrati cd. atque est quadratum cb aequalē rectangulo deg.



Vtrumque

Vtrumque igitur quadratorum b d, d c quarta pars est figuræ, quæ lineis deg continetur. quare b a, a c descriptæ hyperbolæ asymptoti sunt.

I. huius

F E D . C O M M A N D I N V S .

Hoc problema ab Apollonio conscriptum non est, sed ab alio aliquo additum: quod ex Eutocij uerbis perspicue apparet: is enim in commentarijs in quartam propositionem secundi libri Archimedis de sphæra & cylindro ita scribit. ὡς δὲ δέδιξτον θεόντος σημείου περὶ τὰς διθέσιας αὐτοῦ πτωτούς γένεσιν περβολὴν, δεῖξον οὐκ αὐτὸν κατὰ τοὺς σκιώνας στοιχέοις. id est, quo autem modo oporteat per datum punctum circa datas asymptotos describere hyperbolē, demonstrabimus in hunc modum, quoniam id per se ipsum in conicis elementis non ponitur. subiungit postea Eutocius demonstrationem eandem, quæ hoc loco habetur, ut credibile sit, uel Eutocium ipsum, uel aliud ex Eutocio hoc problema inseruisse. Adde quod Pappus inter lemmata, quæ conscripsit in quintum librum conicorum Apollonij, idem problema per resolutionem, cōpositionemq; explicauit, quod minime fecisset, nisi ab ipso Apollonio illud fuisse omissum. sed Pappi lemma apponere libuit.

Duabus rectis lineis a b, b c positione datis: & dato puncto d; per d circa asymptotos a b, b c hyperbolēn describere.

Factum iam sit. ergo b est ipsius centrum: iungatur d b, & producatur, quæ diameter erit: ponaturq; ipsi d b æqualis b e. datum igitur est punctum b. quare & punctū e. dabitur, & diametri terminus: ducatur à puncto d ad lineā b c perpendicularis d f. ergo punctum f datum erit. Rursus ponatur ipsi b f æqualis f c. erit & c datum: & iuncta c d producatur ad a, quæ positione data erit. sed & positione data est a b. quare & ipsum a: est autem & c datum. ergo linea a c magnitudine dabitur: atque erit a d æqualis d c; propterea quod b f est æqualis f c. Itaque figuræ, quæ ad diametrum e d constituitur, sit d g rectum latus. erit utraque ipsarum a d, d c potestate quarta pars rectanguli eius, quod e d g continentur. sed & quarta pars est quadrati a c. rectangulum igitur e d g quadrato a c est æquale. datum autem est a c quadratum. ergo & datum rectangulum e d g: & data est e d. quare ipsa d g, & punctum g datur. Quoniam igitur positione datis duabus rectis lineis in plano e d, d g, quæ ad rectos inter se angulos constituuntur; & à dato puncto d facta est sectio hyperbole, cuius diameter qui dem est e d, uertex autem d punctum: & à sectione ad diametrum applicata in dato angulo a d b applicantur: & possunt spatia adiacentia ipsi d g, latitudinesq; habentia lineas ex diametro abscessas, quæ inter ipsas, & punctum d intericiuntur: & excedentia figura simili ei, quæ lineis e d g continentur: erit ipsa sectio positione data.

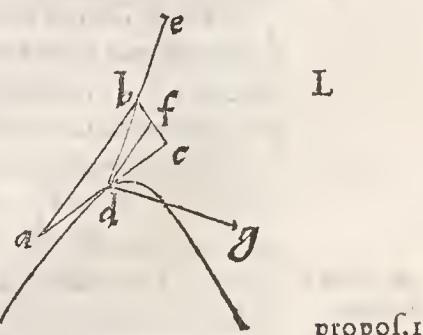
Componetur autem problema in hunc modum. Sint duæ rectæ lineæ a b, b c positione datæ: & datum punctum d: iunctaq; d b producatur ad e, ut sit b e ipsi d b æqualis: & ducatur perpendicularis d f, ponaturq; ipsi b f æqualis f c; & iuncta c d ad a producatur: atque ipsi e d aptetur ad rectos angulos d g, ita ut quadrato a c æquale sit rectangulum e d g: & describatur hyperbole circa diametrum d e, ut in resolutione dictum est. Dico iam factum esse quod proponebatur. Quoniam enim b f est æqualis f e, erit & a d ipsi d c æqualis. quare utraque ipsarum a d, d c potestate est quarta pars quadrati a c, hoc est rectanguli e d g, hoc est figuræ, quæ ad diametrum constituitur. demonstratum autem est in secundo libro conicorum lineas a b, b c ipsius hyperbolæ asymptotos esse.

C O M M E N T A R I V S .

Datum igitur est punctum b] Ex 25. libri Datorum: sunt enim a b, b c positione datæ.

Quare & punctum e dabitur] Ex 27. eiusdem libri.

Ducatur à puncto d ad lineam b c perpendicularis d f] Videtur hic locus corruptus esse: non enim ducenda est d f, ad ipsam b c perpendicularis, nisi quando lineæ a b, b c rectum an-



propos. i

A

B

C

M

APOLLONII PERGAEI

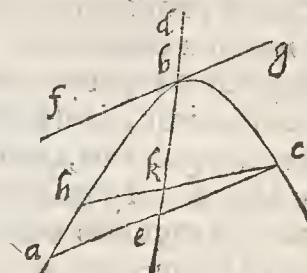
gulum continent: quippe cum necesse sit lineam df ipsi ab æquidistare, ut ex proxime dictis apparet. legendum igitur est hoc modo. Ducatur à punto d ad b c linea df , qua ipsi ab æquidistet. Et ita legendum erit infra: alioqui non sequeretur ad æqualem esse dc ; propterea quod bf sit æqualis fc .

- D Ergo punctum f datum erit] Ex 25. libri Datorum: nam & linea df positioe datur.
- E Ergo linea ac positione dabitur] Ex 26. eiusdem.
- F Erit utraque ipsarum ad, dc potestate quarta pars rectanguli eius, quod edg continetur] Desideratur in græco codice, τετραπτον, uel d.
- G Quare ex ipsa dg , & punctum g datur] Est enim ex 14. uel 17. sexti, ut ed ad ac , ita ac ad dg : & data est ac . ergo & ipsa dg estq; datum punctum d . quare & c dabitur.
- H 2. Datorū 26. Et possunt spatia adjacentia ipsi dg] In græco codice mendose legebatur ga .
- K Et ducatur perpendicularis df] Legendum, ut diximus, & ducatur df ipsi ab æquidistans.
- L Et describatur hyperbole circa diametrum de] Ex 53. primi libri huius.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO V.

Si parabolæ, uel hyperbolæ diameter lineam quandam bifariam fecet; quæ ad terminum diametri contingit sectionem æquidistans est lineæ bifariam sectæ.

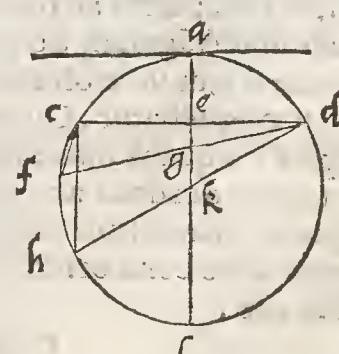
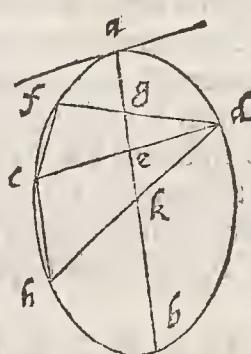
Sit parabole, uel hyperbole abc , cuius diameter de : & linea fbg sectionem contingat. ducatur autem quædam linea ae in sectione, faciens ae æqualem ec . Dico ac æquidistatem esse ipsi fg . nisi enim ita sit, ducatur per c ipsi fg æquidistans ch : & iungatur ha . Quoniam igitur parabole, uel hyperbole est abc , cuius diameter quidem de , contingens autem fg : atque ipsi fg æquidistat ch : erit ck æqualis kh . sed & ce ipsi ea est æqualis. ergo ah æquidistans est ke ; quod fieri non potest: producta enim cum ipsa bd conuenit.



THEOREMA V. PROPOSITIO VI.

Si ellipsis, uel circuli circumferentiaæ diameter lineam quandam non per centrum transeuntem bifariam fecet; quæ ad terminum diametri contingit sectionem, æquidistans erit bifariam sectæ lineæ.

Sit ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter ab : & ab lineam cd non transiunt per centrum bifariam fecet in e . Dico lineam, quæ ad a sectionem contingit, ipsi cd æquidistantem esse. non enim, sed si fieri potest, sit linea ad a contingentiæ æquidistantis df . æqualis igitur est dg ipsi gf . est autem & de æqualis ec . ergo cf ipsi ge æquidistat, quod est absurdum: si



- A 47. primi huius. ue enim punctum g centrum
- B 2. sexti. sit sectionis ab ; linea cf cum diametro ab conueniet, siue non sit, ponatur centrum k : iunctaq; dk producatur ad h ; & iungatur ch . Quoniam igitur dk æqualis est kh , & de ipsi ec ; erit ch æquidistans ab . sed & cf eidem æquidistat, quod est absurdum. ergo quæ ad a sectionem contingit, ipsi cd est æquidistans.

FED.

FED. COMMANDINVS.

Sive enim punctum g centrum sit sectionis a b, linea c f cum diametro a b conueniet: sive non sit.] Si linea ad a sectionem contingens non æquidistat ipsi c d, sit linea contingenti ad a æquidistans d g; & iungatur f c. ponatur autem primum g sectionis centrum esse. Itaque d g æqualis est g f: & est d e æqualis e c. ergo f c ipsi g e æquidistat: quod est absurdum: linea enim, quæ transit per centrum, contingenti ad a æquidistans, diameter est ipsi a b contingata: & propterea f c, quæ ellipsem uel circulum secat inter duas diametros, cum utrisque conueniet ex uigesima tertia primi huius. si uero g non sit centrum sectionis, idem absurdum sequetur: namque f c itidem inter duas diametros secans cum ipsis conueniat necesse est.

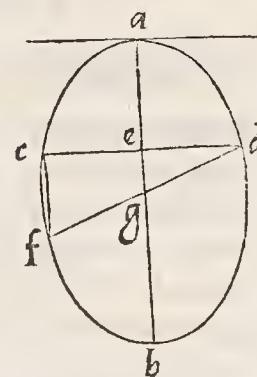
Ponatur centrum k: iunctaq; d k producatur ad h.] Si d f per centrum non transeat, sit centrum k; & ducta d k h iungatur. h c. erit d k æqualis k h. est autem & d e æqualis e c. quare h c æquidistat ipsi a b. sed eidem æquidistat c f. quod est absurdum. Quoniam enim f c cum c b, quæ est æquidistans a b conuenit; & cum ipsa a b necessario conueniet, ex secunda propositione primi libri Vitellionis. Adde quod aliud absurdum sequitur, uidelicet lineas h c, c f uni & eidem a b æquidistantes, etiam inter se æquidistare, quæ tamen in punto c conueniunt.

4. diff. secundarū.

B

30. primi huius.

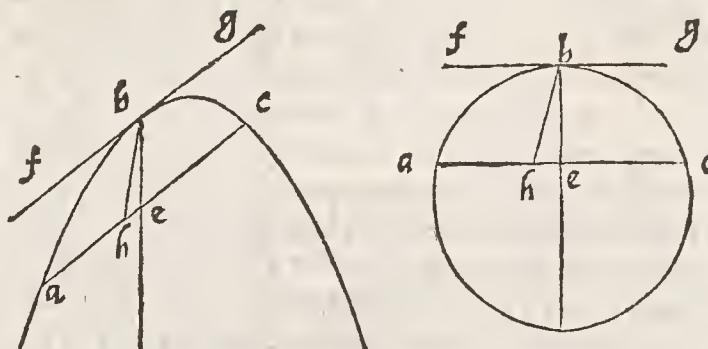
30. primi.



THEOREMA VI. PROPOSITIO VII.

Si coni sectionem, uel circuli circumferentiam recta linea contingat: & huic æquidistans ducatur in sectione: & bifariam diuidatur: quæ à tactu ad punctum lineam bifariam diuidens iungitur, sectionis diameter erit.

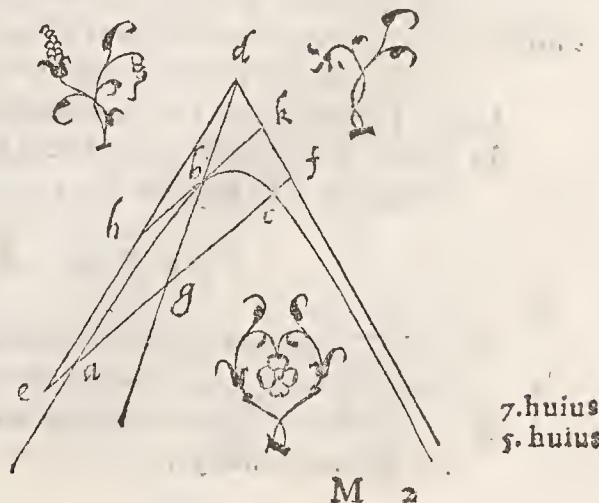
Sit coni sectio, uel circuli circumferentia a b c, quam contingat recta linea f g: & ipsi f g æquidistans ducatur a c: bifariamq; in e diuidatur: & iungatur b e. Dico b e sectionis esse diametrum. nō enim, sed si fieri potest, sit diameter b h. ergo a h ipsi h c est æqualis, quod est absurdum. est enim a e æqualis e c. non igitur b h diameter erit sectionis. similiter demonstrabimus nullam aliam, præterquam ipsam b e, diametrum esse.



THEOREMA VII. PROPOSITIO VIII.

Si hyperbolæ recta linea occurrat in duobus punctis, producta ex utraque parte cū asymptotis conueniet: & lineæ, quæ ex ipsa abscissæ inter sectionem, & asymptotos interciuntur, æquales erunt.

Sit hyperbole a b c, cuius asymptoti sint e d, d f, & ipsi a b c occurrat quædam recta linea a c. Dico a c productam ex utraque parte cum asymptotis conuenire. secetur enim a c bifariam in g: & iungatur d g. diameter igitur est sectionis. quare linea ad b contingens ipsi a c æquidistat. sit autem contin-



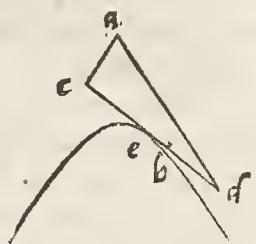
A P O L L O N I I P E R G A E I

3. huius gens h b k, quæ conueniet cum ipsis e d, d f. Quoniam igitur a c æquidistat k h: & k h
 2. primi conuenit cum k d, d h; & a c cum e d, d f conueniet. Itaque conueniat in punctis e f
 Vitell. est autem h b æqualis b k. ergo fg ipsi g e: & propterea fc ipsi a c æqualis erit.
 6. primi
 huius.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO IX.

Si recta linea asymptotis occurrens ab hyperbola bifariam secetur; in uno tantum punto sectionem contingit.

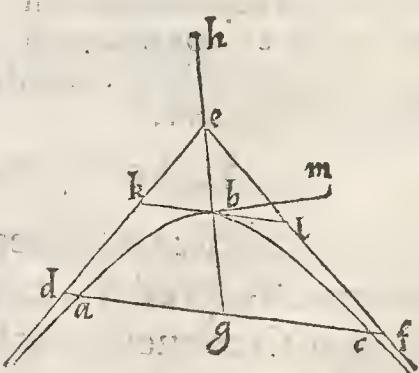
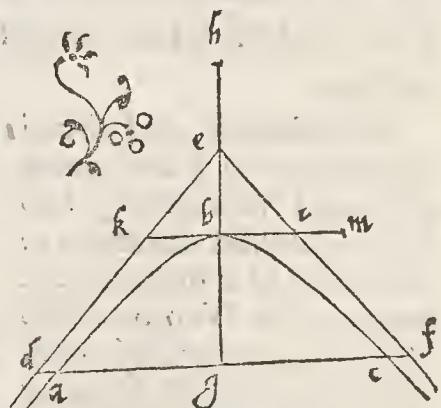
Recta enim linea c d occurrens asymptotis c a, a d secetur ab
 8. huius hyperbola bifariam in punto e. Dico c d in alio punto sectionem non contingere. si enim fieri potest, contingat in b. ergo c e
 æqualis est b d: quod est absurdum; posuimus enim c e ipsi e d
 æqualem esse. non igitur c d in alio punto sectionem contingit.



THEOREMA IX. PROPOSITIO X.

Si recta linea sectionem secans cum utraque asymptotorum conueniat; rectangulum contentum rectis lineis, quæ inter asymptotos & sectionem interiiciuntur; æquale est quartæ parti figuræ factæ ad diametrum, quæ æquidistantes ipsis ductæ lineæ bifariam diuidit.

- A. Si hyperbole a b c, cuius asymptoti d e, e f: & ducatur quædam recta linea d f sectionem, & asymptotos secans: diuidatur autem a c bifariam in g: iunctaq; g e, ponatur ipsi b e æqualis e h: & à punto b ducatur b m ad angulos rectos ipsi h e b. deinde fiat ut rectangulum h g b ad
- B. a g quadratum, ita linea h b ad b m. diameter igitur est b h: & b m rectum figuræ latus. Dico rectangulum d a f æquale esse quartæ parti figuræ, quæ lineis h b, b m continetur: & similiter eidem æquale rectangulum d c f. ducatur enim per b linea
- C. k b l sectionem contingens, quæ æquidistans erit ipsi
- D. si d f. Itaque quoniam demonstratum est, ut h b ad b m, ita esse quadratum e b ad b k quadratum; hoc
- E. est quadratum e g ad quadratum g d. Ut autem h b ad b m, ita rectangulum h g b ad quadratum a g;
- F. critur totum quadratum e g ad totum quadratum g d, ita ablatum rectangulum h g b ad ablatum quadratum g a. ergo reliquum quadratum e b ad reliquum rectangulum d a f est, ut quadratum e g ad quadratum g d; hoc est ut quadratum e b ad b k quadratum. æquale igitur est rectangulum d a f quadrato b k. similiter demonstrabitur & rectangulum
- G. d c f quadrato b l æquale. & est quadratum k b æ-
- H. quale quadrato b l. ergo & d a f rectangulum rectangulo d c f æquale crit.



F E D. C O M M A N D I N V S.

- A. ET ducatur quædam recta linea d f sectionem, & asymptotos secans.] Intelligendum est lineam d f sectionem in punctis a c secare.
- B. Diameter igitur est b h: & b m rectum figuræ latus.] Ex uigesima prima primi libri huius, sive eius conuersa.

Quæ

Quæ æquidistans erit ipsi d f.] Ex quinta huīus.

Itaque quoniam demonstratum est, ut h b ad b m, ita quadratum e b ad b k quadratum.] In prima huīus.

C

D

E

F

G

H

3 huius

Vt autem h b ad b m, ita rectangulum h g b ad quadratum a g.] Ex positione.

Erit ut totum quadratum e g ad totum quadratum g d.] Vide que scripsimus in secundam huīus.

Et est quadratum k b æquale quadrato b l.] Est enim linea k b æqualis ipsi b l, ex tercia huīus.

Ergo & d a f rectangulum rectangulo d c f æquale erit.] Ex quibus sequitur illud, quod demonstrare oportebat, uidelicet unum quodque rectangulorum d a f, d c f æquale esse quadrato k b, uel b l, hoc est quartæ parti figuræ, quæ lineis h b, b m continetur.

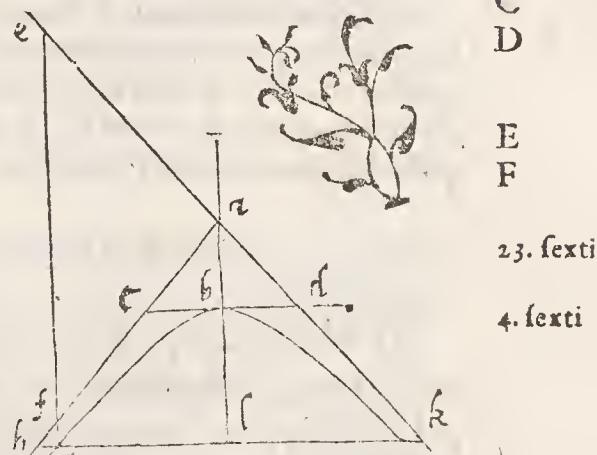
THEOREMA X. PROPOSITIO XI.

Si utramque linearum continentium angulum, qui deinceps est angulo hyperbolē continent, fecet recta linea; in uno tantum puncto cum sectione conueniet: & rectanguli constans ex iis, quæ interiiciuntur inter lineas angulum continent, & sectionem, æquale erit quartæ parti quadrati ex diametro, quæ secanti lineæ æquidistans dicitur.

Sit hyperbole, cuius asymptoti c a, a d: & producta d a ad e, per aliquod punctum e ducatur e f, quæ lineas c a, a c fecet. perspicuum est e f in uno tantum puncto cum sectione conuenire. nam quæ per a ipsi e f æquidistans dicitur, ut a b, secat angulum c a d; proptereaq; conueniet cum sectione: & ipsius diameter erit. quare e f cum sectione conuenit in uno tantum puncto. conueniat in g. Dico rectangulum e g f quadrato a b æquale esse. ducatur enim per g ordinatim h g l k. ergo quæ in puncto b sectionem contingit æquidistans est ipsi h g: sit autem c d. Itaque quoniam c b est æqualis b d; quadratum c b, hoc est rectangulum c b d ad b a quadratum proportionem habet compositam ex proportione c b ad b a; & ex proportione d b ad b a. sed ut c b ad b a, ita h g ad g f: & ut d b ad b a, ita k g ad g e. ergo proportio quadrati c b ad quadratum b a composita est ex proportione h g ad g f, & proportione k g ad g e. proportio autem rectanguli k g h ad rectangulum e g f ex eisdē proportionibus componitur. quare ut rectangulum k g h ad rectangulum e g f, ita quadratum c b ad quadratum b a: & permutando ut rectangulum k g h ad quadratum c b, ita rectangulum e g f ad quadratum a b. sed demonstratum est rectangulum k g h æquale quadrato c b. ergo & e g f rectangulum quadrato a b æquale erit.

E V T O C I V S.

IN aliquibus exemplaribus hoc theorema aliter demonstratur. Sit hyperbole, cuius asymptoti a b, b c: producaturq; in rectum b e d: & ducatur e f, ut contingit, secans lineas b d, b a. Dico e f cum sectione conuenire. Si enim fieri potest, non conueniat: & per b ipsi e f æquidistans ducatur b g. ergo b g diameter est sectionis. constituatur ad lineam e f parallelogrammum, quadrato b g æquale, excedens figura quadrata, quod sit e h f: & iuncta b h producatur. conueniet ea cum sectione. conueniat in k: & per k ducatur k a d æquidistans b g. ergo rectangulum d k a quadrato b g est æquale. & ideo æquale



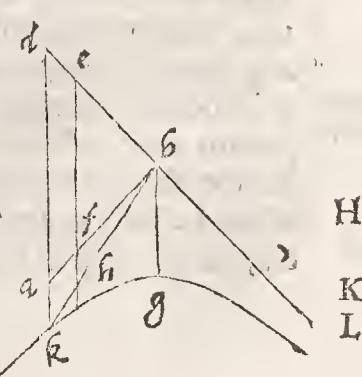
23. sexti

4. sexti

23. sexti

G

14. quinque



H

K

L

A P O L L O N I I P E R G A E I

^{26: primi} rectangulo e h f, quod est absurdum. constat igitur e f cum sectione conuenire, atque in uno tantum puncto, quoniam diametro b g est æquidistans.

F E D. C O M M A N D I N V S.

- A Si utraque linearum continentium angulum, qui deinceps est angulo hyperboleni continent.] Angulum hyperboleni continentem vocat Apollonius eum, quem asymptoti inter se constituunt: reliquum uero ex duobus rectis, eum qui deinceps est, appellat, qui quidem una asymptoton & altera producta continetur.
- B Proptereaq; conueniet cum sectione.] Ex secunda huius.
- C Et ipsius diameter erit.] Ex corollario quinquagesimæ primæ primi huius.
- D Quare e f cum sectione conuenit in uno tantum puncto.] Ex uigesima sexta primi huius.
- E Ergo quæ in puncto b sectione contingit, æquidistans est ipsi h g.] Ex quinta huius.
- F Itaque quoniam c b est æqualis b d.] Ex tertia huius.
- G Sed demonstratum est rectangulum k g h æquale quadrato c b.] In decima huius.

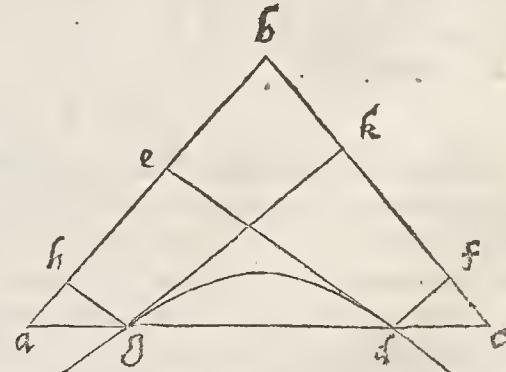
I N A L I A M D E M O N S T R A T I O N E M Q V A M A F F E R T E V T.

- H Constituatur ad lineam e f parallelogrammum quadrato b g æquale, excedens figura quadrata; quod sit e h f.] Ex uigesima nona sexti elementorum.
- K Conueniet ea cum sectione.] Ex secunda huius.
- L Ergo rectangulum d k a quadrato b g est æquale.] Ex ijs, quæ proxime dicta sunt. quare si quis hanc demonstrationem loco præcedentis esse uelit; necesse habebit illud ipsum simili ter demonstrare.
- M Quod est absurdum.] Post hæc uerba in græco codice non nulla desiderantur, qualia fortasse hæc sunt, linea enim d k maior est, quam e h; & k a maior, quam h f. Illud uero perspicue apparet. nam ut b k ad k d, ita est b h ad h e: & permuto ut k b ad b h, ita k d ad h e. Rursus ut b k ad k a, ita b h ad h f: permutoq; ut k b ad b h, ita k a ad h f. Sed est b k maior quam b h. maior igitur est d k, quam e h: & k a itidem maior, quam h f.

T H E O R E M A X I . P R O P O S I T I O X I I .

Si ab aliquo puncto eorum, quæ sunt in sectione ad asymptotos duæ rectæ lineæ in quibuslibet angulis ducantur: & ab altero puncto in sectione sumpto ducantur aliæ lineæ his ipsis æquidistantes: rectangulum ex æquidistantibus constans æquale est ei, quod fit ex iis, quibus illæ æquidistantes ducæ fuerant.

Sit hyperbole, cuius asymptoti a b, b c: & sumatur in sectione aliquod punctum d: atque ab eo ad lineas a b, b c ducantur d e, d f. Sumatur autem & alterum punctum g in sectione; per quod ducantur g h, g k ipsis d e, d f æquidistantes. Dico rectangulum e d f rectangulo h g k æquale esse. iungatur enim d g, & ad puncta a c producatur. Itaque quoniam æquale est rectangulum a d c rectangulo a g c; erit ut g a ad a d, ita d c ad c g. sed ut g a ad a d, ita g h ad d e: & ut d c ad c g, ita d f ad g k. quare ut g h ad d e, ita d f ad g k. rectangulum igitur e d f rectangulo h g k est æquale.

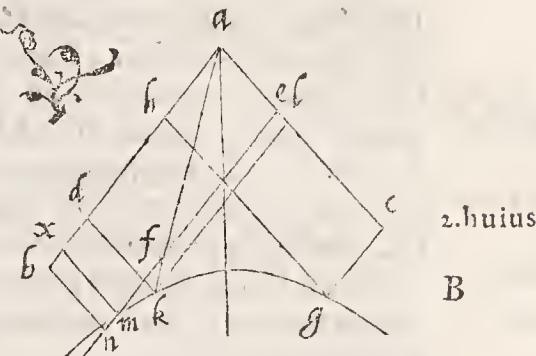


THEO.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

Si in loco asymptotis & sectione terminato, quædam recta linea ducatur, alteri asymptoton æquidistans; in uno punto tantum cuin sectione conueniet.

Sit hyperbole, cuius asymptoti $c a, a b$: sumaturq; aliquod punctum e : & per e ipsi $a b$ æquidistans duca tur $e f$. Dico $e f$ cum sectione conuenire. Si enim fieri potest, non conueniat: & sumatur punctum g in sectione, per quod ipsis $b a, a c$ æquidistantes ducantur $g c, g h$: & rectangulo $c g h$ æquale sit rectangulum $a e f$; iunctaq; $a f$, si producatur, cum sectione conueniet. conueniat in punto K : & per k ducantur $k l, k d$ ipsis $b a, a c$ æquidistantes. ergo rectangulum $c g h$ æqua le est rectangulo $l K d$. ponitur autem & rectangulo $a e f$ æquale. rectangulum igitur $d K l$, hoc est $a l k$ re ctangulo $a e f$ æquale erit: quod fieri non potest, si quidem $k l$ maior est, quam $e f$; & $l a$ maior, quam $a e$. quare $e f$ conueniet cum sectione. conueniat in m . Dico eam in alio punto non conuenire. nam si fieri potest, conueniat etiam in n ; & per $m n$ ipsis $c a$ æquidistantes ducantur $m x, n b$. ergo rectangulum $e m x$ rectangulo $e n b$ est equale: quod est absurdum. non igitur in alio punto cum sectione conueniet.

z. huius
B

F E D. C O M M A N D I N V S.

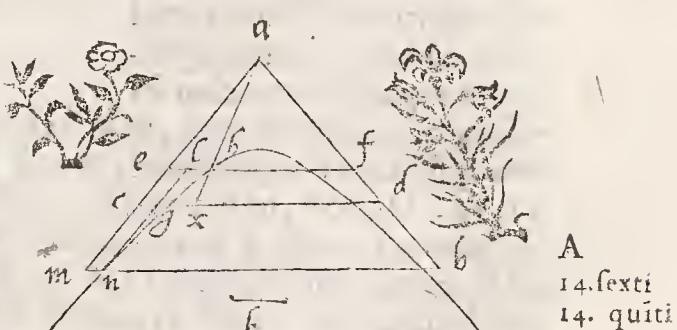
Si in loco asymptotis & sectione terminato, quædam recta linea ducatur.] Lo- A
cum intelligit extra sectionem, qui asymptotis & sectione ipsa circumscribitur.

Ergo rectangulum $c g h$ æquale est rectangulo $l k d$.] Ex præmissa. B

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIV.

ASYMPTOTI, & sectio in infinitum productæ ad se ipsas proprius accedunt: & ad interuallum perueniunt minus quolibet dato interuallo.

Sit hyperbole, cuius asymptoti $a b, a c$: & datum interuallum sit k . Dico asymptotos $a b, a c$ & sectionem productas ad se se proprius accedere: & peruenire ad interuallum minus interuallo k . Ducantur enim lineæ contingentes æquidistantes $e h f, c g d$: iungaturq; $a h$; & ad x producatur. Quoniam ergo rectangulum $c g d$ rectangulo $f h e$ est æquale; erit ut $d g$ ad $f h$, ita $h e$ ad $c g$. sed $d g$ maior est $f h$. ergo & $e h$ ipsa $c g$ est maior. similiter demonstrabimus eas, quæ deinceps sequuntur, minores esse. Itaque sumatur interuallum $e l$ minus interuallo k : & per l ipsis $a c$ æquidistans duca tur $l n$. ergo $l n$ cum sectione conueniet. conueniat in n : perq; n ducatur $m n b$ æqui distans $e f$. quare $m n$ est æqualis $e l$: & propterea interuallo k maior erit.

A
14. sexti
14. quinto

34. primi

Ex hoc manifestum est, lineas $a b, a c$ ad sectionem accedere pro prius, quam omnes aliæ asymptoti: & angulum $b a c$ minorem esse quo libet angulo, qui aliis eiusmodi lineis continetur. C D

A P O L L O N I I P E R G A E I

E V T O C I V S.

I N aliquibus exemplaribus illud aliter demonstratum inuenitur.

Asymptotos & sectionem peruenire ad interuallum minus quolibet interuallo dato.

8. quinti
14. sexti

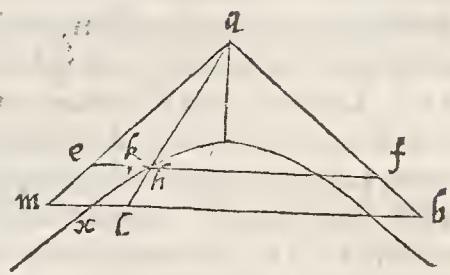
10. huius

4. sexti

8. quinti

14. huius

Iisdem enim manentibus, sumatur interuallum ex dato interuallo minus: fiatq; ut x e ad eh , ita ha ad al : & per l ipsi ef æquidistans ducatur mx , lb . Quoniam igitur xb ad hf maiorem proportionem habet, quam lb ad hf . Vt autem xb ad hf , ita he ad mx , propterea quod rectangulum fh e rectangulo b x m est æquale: habebit he ad mx maiorem proportionem, quam lb ad hf . sed ut lb ad hf , ita la ad ah : & ut la ad ah , ita he ad ek : quare he ad mx maiorem proportionem habet, quam he ad eK . minor igitur est mx , quam eK .

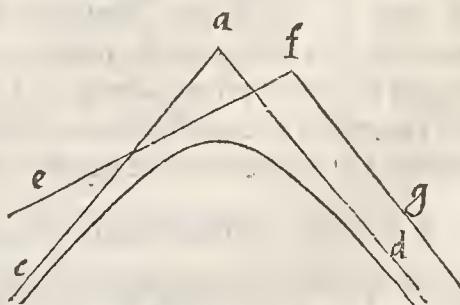
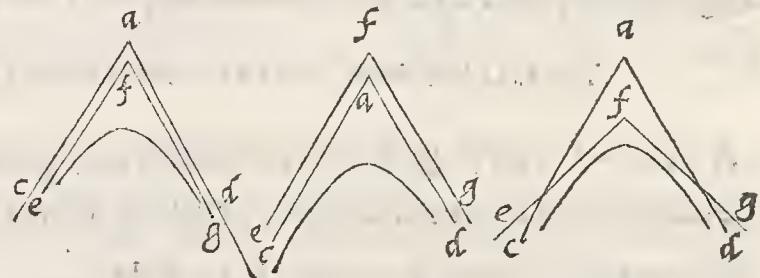


Inueniuntur in aliquibus codicibus etiam hæc theorematum, quæ à nobis tanquam superuacanea sublata sunt. Quoniam enim demonstratum est, asymptotos propius accedere ad sectionem, & ad interuallum peruenire, quolibet dato interuallo minus; superuacuum fuit hæc inquirere: quod neque demonstrationes alias habent, sed dumtaxat figurarum differentias. uerum ut ijs, qui in hæc inciderint, sententiam nostram aperiamus, exponantur hoc loco ea, quæ nos, ut superuacanea sustulimus.

Asymptoti, de quibus dictum est, propius accedunt ad sectionem, quam aliæ, si quæ sint asymptoti.

13. huius

Sit hyperbole, cuius asymptoti ca, ad . Dico ca ad ad sectionem accedere proprius, quam aliæ asymptoti, si quæ sint. Namque ut in prima figura, lineas ef, fg asymptotos esse non posse, manifeste constat: quod linea ef æquidistantis sit ca ; & fg ipsi ad ; demonstratum siquidem est eas; quæ in loco asymptotis & sectione terminato ducuntur, alteri asymptoto æquidistantes, cum sectione conuenire: si uero, ut in secunda figura apparet, ef, fg sint asymptoti, quippe quæ ipsis ca, ad æquidistant, tamen ca ad ad sectionem propius accedunt, quam ef, fg . Quod si, ut in tertia figura, ca, ad in infinitum producantur, ad sectionem propius accedunt, & ad interuallum perueniunt minus quolibet dato interuallo. sed ef, fg , quamquam in punto f , & intra angulum propinquiores sint sectioni, tamen productæ ab ipsa magis recedunt: interuallum enim, quo nunc distant, est quilibet alio interuallo minus. Rursus sint asymptoti ef, fg , ut in quarta figura, constat etiam hoc modo ca propinquorem esse sectioni, quam ef , siue ef æquidistantis sit ca , siue cum ipsa conueniat. & si quidem punctum, in quo conuenit cum ac , sit infra eam, quæ per f sectionem contingit, secabit ef sectionem ipsam; si uero sit in loco intermedio inter contingentem & angulum, non perueniet ad interuallum minus dato interuallo. quare ca propinquior est sectioni, quam ef : & ad



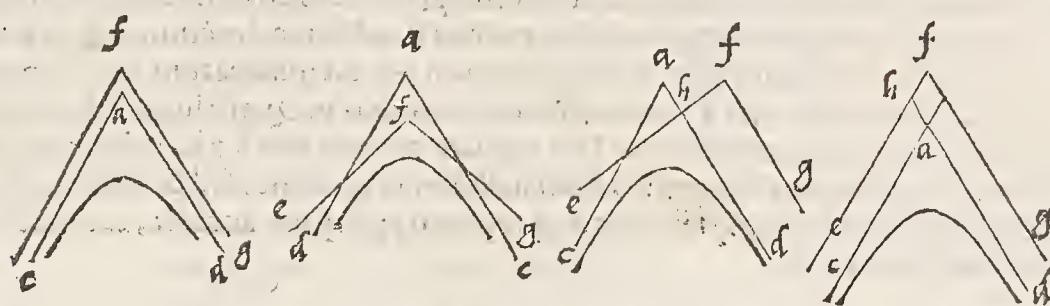
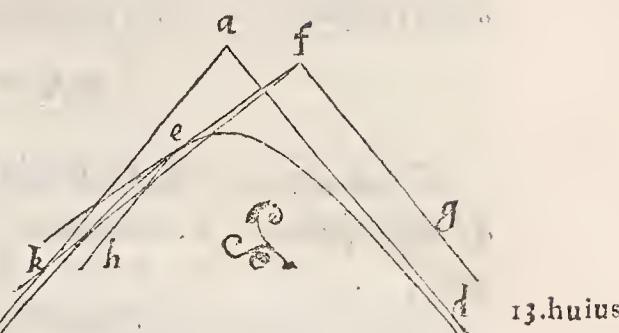
& ad propinquior, quam fg, per eadem, quæ diximus in tertia figura.

At uero lineam, quæ conuenit cum ac, infra eam, quæ per f ducta sectionem contingit, cum sectione ipsa conuenire, sic demonstrabitur.

Contingat fe sectionem in e: & punctum, in quo e f cum ca conuenit, sit supra fk. Dico fk conuenire cum sectione. ducatur enim per tactum e ipsi ca asymptoto æquidistans eh. ergo eh sectionem in punto e tantum secat. Itaque quoniam ac ipsi eh est æquidistans: & fk conuenit cum ac; & cum eh conueniat necesse est. quare & cum ipsa sectione.

Si est alter angulus rectilineus, qui hyperbolam continet, non est minor angulo hyperbolam continentem, de quo ante dictum est.

Sit hyperbole, cuius asymptoti ca, ad: aliæ uero asymptoti sint ef, fg. Dico angulum ad f non minorem esse angulo ad a. sint enim primum ef, fg ipsis ca, ad æquidistantes. ergo angulus ad f non est minor eo, qui ad a: si uero non sint æquidistan-



tes, ut in secunda figura, constat maiorem esse angulum ad f angulo ad a. Sed in tertia figura angulus fh a, eo qui ad a maior est; & qui ad f æqualis est angulo fh a. Denique in quarta figura angulus, qui ad uerticem, maior est angulo, qui itidem ad uerticem constituitur. non igitur angulus ad f angulo, qui ad a, minor erit.

F E D . C O M M A N D I N V S .

Quoniam ergo rectangulum cg d rectangulo fhe est æquale.] Ex decima huius: A utrumque enim est æquale quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum consistit.

Ergo in cum sectione conueniet.] Ex decima tertia huius.

Ex hoc manifestum est lineas ab, ac ad sectionem accedere proprius, quam omnes aliæ asymptoti.] Hoc demonstrauit Eutocius in commentarijs. asymptotos autem uocat etiam alias lineas, quæ cum sectione non conueniunt.

Et angulum bac minorem esse quolibet angulo, qui alijs eiusmodi lineis contineatur.] Non consentit hoc cum ijs, quæ tradit Eutocius: ostendit enim angulum, qui alijs eiusmodi lineis continetur, non esse minorem angulo bac. quare uel locus corrigendus est, uel intellige puncti, in quo aliæ asymptoti conueniunt idem esse, quod a, uel in ipsis asymptotis, uel etiam intra ipsas cotineri: ita enim fieri, ut angulus bac quolibet alio eiusmodi angulo sit minor. Illud autem, quod hoc loco demonstratur accidere asymptotis & sectioni, ut scilicet in infinitum productæ nō coeant, sed ad seiphas proprias accedant, & ad interuallum perueniant quolibet dato interuallio minus, accedit etiam duabus hyperbolis, quæ circa easdem asymptotos describuntur, quod Pappus demonstrare aggressus est in lemmatibus in quintum librum conicorum Apollonij. sed quoniam ea demonstratio ob temporum iniurias & depravata est, & manca; non inutile erit uerba ipsius latine redditum in-

N

APOLEONII PERIGRÆI

medium afferrre, ut quæ perobscura sunt explicemus; quæ uero ad demonstrationem desiderari uidentur, suppleamus. est enim res admirabilis, & diligent contemplatione dignissima.

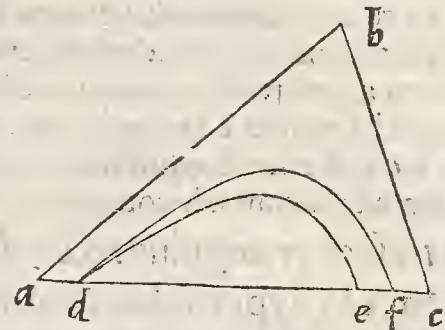
PAPPI LEMMA.

Circa asymptotos ab, bc hyperbolæ de, df describantur. Dico eas inter se non conuenire.

Si enim fieri potest, conueniant ad punctum d: & per d in sectiones ducatur rectæ linea ad e fc. erit propter df sectionem linea ad æqualis fc: & propter sectionem de erit ad æqualis ec. quare fc ipsi ce est æqualis. quod fieri non potest. non igitur sectiones inter se conueniunt.

Dico præterea eas, si in infinitum augentur, ad se se propius accedere, & ad minus interuallum peruenire.

- A B C Ducatur enim alia linea h k: & sit diameter, cuius terminus m. erit igitur ut rectâgulum m l n ad quadratum l x, ita transuersum figuræ latus ad latus rectum: ut autem E m o p rectanguluni ad quadratum o r, ita transuersum latus ad rectum. ergo ut rectâgulum m l n ad quadratum l x, ita rectangulum m o p ad quadratum o r: & permuto. rectangulum uero m l n maius est rectâgulo m o p. Quare linea x f maior erit F quam r s. atque est propter sectiones fd x æquale rectangulo k r h. minor igitur est G x d, quam h r. quare semper ad minus interuallum perueniunt. sed & illud facile constare potest: si enim utraque ipsarum ad asymptotos propius accedit, & ad se se propius accedant necesse est.



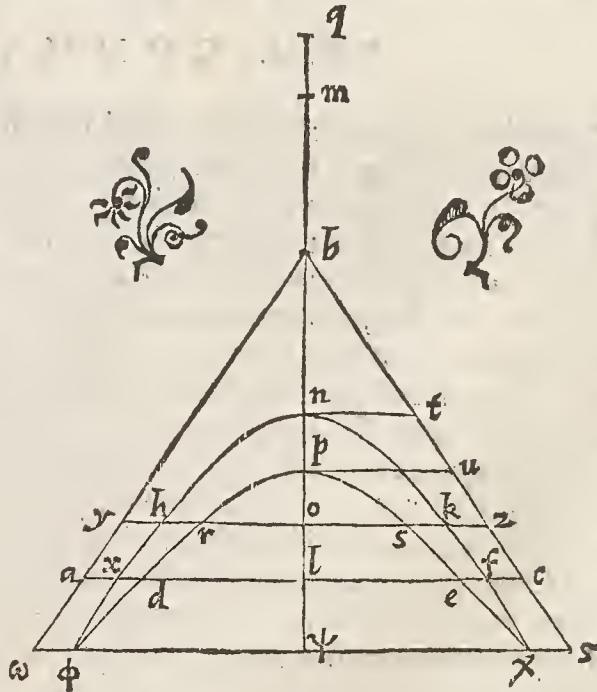
COMMENTARIVS.

A Ducatur enim alia linea h k.] Sint duæ hyperbolæ x n f, d p e circa easdem asymptotos ab, bc descriptæ, ut docetur in quarta propositione huius libri. & intelligantur rectæ lineæ ax d le fc, b r o s k ad earum diametrum b l ordinatim applicatae; quæ inter se æquidistant: utraque enim æquidistant lineæ in p uel n sectionem contingenti, ex quinta huius.

B Et sit diameter, cuius terminus ni.] Non potest idem terminus esse diametri utriusque sectionis. producatur enim l p n b diameter in puncta m q, ita ut sit mb æqualis ip si b n, & bq æqualis bp. erit punctum m terminus diametri sectionis xnf, & q terminus diametri sectionis dpe, quod b sit utriusque centrum. quare mirum uidetur Pappū uno, eodemq; puncto m uti pro termino utriusque diametri. nisi fortasse intelligamus duo puncta, qui termini sunt, eadem littera notari. quod nouum est, & inusitatum.

C Erit igitur ut rectangulum m l n ad quadratum l x, ita transuersum figuræ latus ad latus rectum.] Ex 21. primi libri huius.

D Ut autem m o p rectâgulum ad quadratum o r, ita transuersum latus ad rectum.] Hoc est ut rectangulum q o p ad quadratum o r, ita figuræ, quæ fit ad pq diametrum



metrum sectionis d p e transuersum latus ad rectum: alia enim sunt huius figuræ latera, atque ea, de quibus proxime dictum est: quamquam eandem inter se proportionem habeant. nam ut figuræ, quæ fit ad n m diametrum sectionis x n f transuersum latus ad rectum, ita est figuræ ad diametrum p q sectionis d p e transuersum latus ad rectum: quod facile demonstrabitur hoc modo. Ducatur linea n t sectionem x n f contingens in n: & ducatur p u, quæ sectionem d p e contingat in p. a qui distabunt n t, p u inter se se: utr. ique enim æquidistant lineæ a c, uel b k: & fient triangula b n t, b p u similia. ergo ut b n ad n t, ita b p ad p u: & ut quadratum b n ad n t quadratum, ita quadratum b p ad quadratum p u. sed ut quadratum b n ad quadratum n t, ita figuræ, quæ fit ad diametrum um transuersum latus ad rectum, ex ijs, quæ tradita sunt in prima huius: & eadem ratio ne ut quadratum b p ad quadratum p u, ita figuræ, quæ fit ad diametrum p q transuersum latus ad rectum. ergo ut figuræ ad diametrum n m transuersum latus ad rectum, ita figuræ ad p q transuersum latus ad rectum. ex quibus constat hyperbolas x n f, d p e inter se similes esse, itemq; alias, quæ cunque circa easdem asymptotos: hoc paeto describuntur.

Ergo ut rectangulum m l n ad quadratum l x, ita rectangulum m o p ad quadratum o r.] Sequitur enim ex iam dictis, ut rectangulum m l n ad quadratum l x, ita esse rectangulum q o p ad quadratum o r. quare & permutando ut m l n rectangulum ad rectangulum q o p, ita quadratum l x ad o x quadratum.

Rectangulum uero m l n maius est rectangulo m o p.] Hoc est rectangulum m l n maius rectangulo q o p. nam rectangulum m l n maius est rectangulo q l p. ergo rectangulo q o p multo maius erit; quod punctū o supra l sumatur. Illud autem ita demonstrabimus. rectangulum cuius m l n æquale est rectangulo m l, & quadrato n l; quorum quadratum n l est æquale duobus quadratis n p, p l, & ei, quod bis n p l continetur. similiter rectangulum q l p est æquale rectangulo q p l, & p l quadrato; quorum rectangulum q p l rursus est æquale tribus rectangulis, rectangulo scilicet contento lineis m n, p l; & contento q m, p l; & rectangulo n p l: quæ duo postrema rectangula sunt æqualia ei, quod bis n p l cōtinetur; est enim q m ipsi n p æqualis. Itaque sublatis itrinque communibus, nempe quadrato p l, & rectangulo, quod bis continetur n p l, relinquitur ex altera quidem parte rectangulum m n l unà cum quadrato n p; ex altera uero rectangulum contentum m n, & p l. sed rectangulum m n l est æquale duobus rectangulis, uidelicet rectangulo m n p, & ei, quod m n, & p l continetur. rectangulum m l n maius est, quād q l p, quadrato n p, & m n p rectangulo. Vt autem rectangulum m l n ad quadratum l x, ita rectangulum q l p ad quadratum l d: & permutando. ex quibus sequitur quadratum x l maius esse quadrato l d. ergo linea x l maior erit, quād l d: & tota x f maior, quād d e, & multo maior quād r s. Hæc eò spectare uidentur, ut ostendat sectione d p e intra ipsam x n f contineri. quod tamen absque his ex alijs, quæ in principio dicta sunt, satis constat. si enim punctum p, per quod sectio d p e transit, infra n sumitur; & sectiones inter se se conuenire non possunt: superuacancum quodammodo fuit in his tantopere immorari. Sed uereor, ne locus corruptus sit, ut Pappus aliud quoddam potius, quād hoc ostendere uolue rit: non enim ex dictis appetit lineam r k minorē esse, quād d f. quod ad propositum concludendum præmonstrare oportebat.

Atque est propter sectiones rectangulum f d x æquale rectangulo k r h.] Hæc nos ita restituimus: nam græcius codex habet, rectangulum f d x æquale rectangulo s r b: & mendose ut uidetur: rectangulum enim f d x est æquale rectangulo k r h, ut demonstrabimus: & ideo maius rectangulo s r b. Producatur b k ex utraque parte adeo, ut secet asymptoton a b in y, & asymptoton b c in z. Quoni. m igitur ut y b ad b a, ita y z ad a c, atque est y b minor, quād b a: erit & y z, quād a c minor. sed ex ijs, quæ proxime demonstrata sunt, a d minor est quād y r: & f c minor, quād k z; asymptoti enim & sectio productæ ad seiphas propius accidunt. quare si ex linea y z demandatur y r, k z; & ex a c demandatur a d, f c: relinquitur r k multo minor quād d f. Itaque propter sectionem d p e rectangulum y r z æquale est rectangulo a d c; utraque enim sunt æqualia quadrato p u, ex decimali huius: & propter sectionem x n f rectangulum y b z est æquale rectangulo a x c; quod utraque sint æqualia quadrato n t. rectangulum uero y b z unà cum rectangulo b r k est æquale rectangulo y r z, & rectangulum a x c unà cum rectangulo x d f æquale rectangulo a d c; quod idem Pappus demonstrauit in lemmatibus huius libri, lemma tertio. quare si à rectangulo y r z auferatur rectangulum y b z, relinquitur rectangulum b r k: & si à rectangulo a d c auferatur rectangulum a x c, relinquitur x d f rectangulum: ac propter ea rectangulum b r k rectangulo x d f est æquale. Vt igitur r k ad d f, ita est x d ad b r. sed r k minor ostensa est, quād N 2

5 huius
4. sexti
22

1. secundi

1. secundi

1. secundi

1. secundi

1. secundi

G

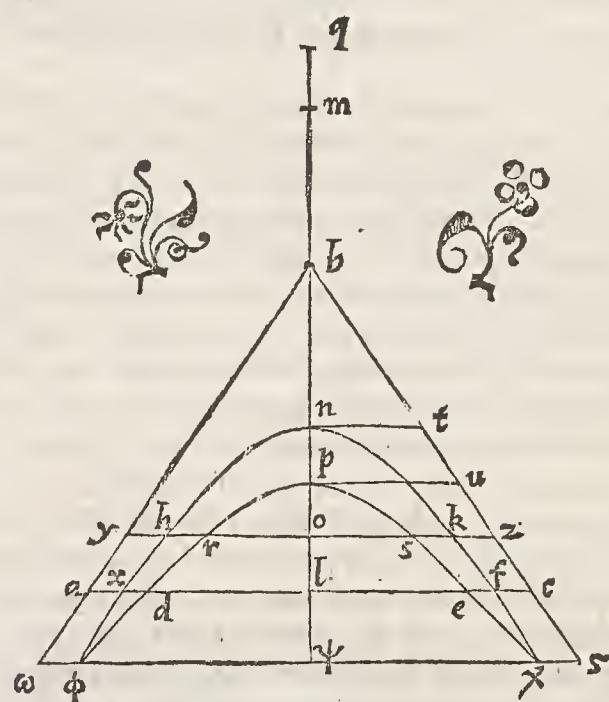
4. sexti
14. quarti

14. sexti

A P O L L O N I I P E R G A E I

$d f$. ergo & $x d$ quam $b r$ minor erit.

H Quare semper ad minus interuallum perueniunt] Non solum ad minus interuallum perueniunt, sed ad interuallum quolibet dato interuallo minus. producantur enim sectiones una cum asymptotis, quo usque interuallum, quod intericitur inter asymptotos, & sectionem d p e, sit dato interuallo minus; quod quidem fieri posse ex 14. huius apparet. erit tunc interuallum inter sectiones interiectum multo minus interuallo dato. & quamquam haec sectiones in infinitum producantur, nunquam tamen inter se conueniunt, ut à Rappo superius est demonstratum: & ex proxime traditis alter demonstare possumus in hunc modum. si enim fieri potest, conueniant in $\phi \chi$: & ducatur linea $\phi \chi$ diametrum secans in \downarrow , quæ primum æquidistet lineis $a c$, $y z$, ut sit ad diametrum $b \downarrow$ ordinatim applicata. Eodem modo, quo supra demonstrabimus rectangulum $m \downarrow n$ maius esse reactangulo $q \downarrow p$: & ut reactangulum $m \downarrow n$ ad quadratum $\phi \downarrow$, ita reactangulum $q \downarrow p$ ad idem $\phi \downarrow$ quadratum: & permutando reactangulum $m \downarrow n$ ad reactangulum $q \downarrow p$, ut quadratum $\phi \downarrow$ ad semetipsum. ergo reactangulum $m \downarrow n$ æquale est reactangulo $q \downarrow p$. sed et maius: quod est absurdum.



ALITER. Si sectiones conueniant in $\phi \chi$, producatur linea $\phi \chi$ usque ad asymptotos in puncta $\omega \varsigma$. erit reactangulum $\omega \phi \varsigma$ propter sectionem $x n f$ æquale quadrato $n t$: & propter sectionem $d p e$ æquale quadrato $p u$. quare quadratum $n t$ quadrato $p u$ æquale erit. Itaque quoniam ut quadratum $n t$ ad quadratum $p u$, ita quadratum $n b$ ad quadratum $b p$; erit & quadratum $n b$ æquale quadrato $b p$: & ideo linea $n b$ linea $b p$ æqualis. quod itidem est absurdum. non igitur haec sectiones inter se conueniunt. Quod si linea $\phi \chi$ non æquidistet lineis $a c$, $y z$: dividatur bifariam in puncto \downarrow , & iuncta \downarrow b producatur ad $m q$: fecet autem hyperbolas $d p e$, $x n f$ in punctis $p n$: & ab ipsis ducantur $p u$, $n t$ sectiones contingentes, quæ lineis $a c$, $y z$ æquidistabunt, ex quinta huius: fiatq; $b m$ æqualis $b n$, & $b q$ æqualis $b p$. erit $n m$ sectionis $x n f$: & $p q$ sectionis $d p e$ diameter transuersa. quare similiter, ut supra, demonstrabimus nullo modo fieri posse, ut haec sectiones inter se conueniunt.

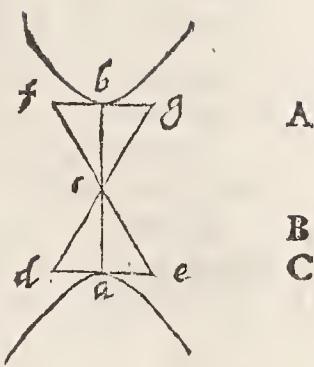
K Sed & illud facile constare potest, si enim utraque ipsarum ad asymptotos proprius accedit, & ad se se proprius accedant necesse est.] Vide quomodo haec ratio necessitatem habeat: posset enim quis dicere utramque sectionem accedere quidem proprius ad asymptotos, sed tamen pari interuallo, ita ut semper inter se æquidistent.

T H E O R E M A X I V I T . P R O S I T I O X V .

Oppositarum sectionum asymptoti communes sunt.

Sint

Sint oppositæ sectiones, quarum diameter $a b$, & centrum c . Dico sectionum $a b$ asymptotos communes esse. Ducantur enim per puncta $a b$ lineaæ $d a e$, $f b g$, quæ sectiones continent. æquidistantes igitur sunt $d a e, f b g$. Abscindantur lineaæ $d a$, $a e$, $f b$, $b g$, ita ut cuiusque earum quadratum æquale sit quartæ partis figuræ, quæ ad diametrum $a b$ constituitur. ergo $d a, a e, f b, b g$ inter se sunt æquales. iungantur $c d, c e, e f, c g$. perspicuum igitur est $d c, c g$ in eadem recta linea contineri; itemq; $e c, c f$; propterea quod æquidistantes sunt $d a e, f b g$. Itaque quoniam hyperbole est, cuius diameter $a b$; contingens autem $d e$; & unaquæque linearum $d a, a e$ potest quartam partem figuræ, quæ ad $a b$ constituitur: erunt $d c, c e$ asymptoti. & eadem ratio ne ipsius b sectionis asymptoti erunt $f c, c g$. oppositarum igitur sectionum asymptoti communes sunt.



D

F E D . C O M M A N D I N V S .

Aequidistantes igitur sunt $d a e, f b g$.] Utraque enim æquidistat linea, quæ ad diametrum $a b$ ordinatim applicantur.

Ergo $d a, a e, f b, b g$ inter se sunt æquales.] Ex 14. primi huius. nam transuersum latus $a b$ est utriusque commune, & recta figuræ latera inter se æqualia.

Perspicuum igitur est $d c, c g$ in eadem recta linea contineri: itemq; $e c, c f$, propterea quod æquidistantes sunt $d a e, f b g$.] Quoniam enim $d a e, f b g$ inter se æquidistant, erit angulus $d a c$ angulo $g b c$ æqualis. linea uero $a c$ est æqualis $c b$: & $d a$ ipsi $g b$. quare & basis $d c$ basi $c g$, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt. angulus igitur $a c d$ est æqualis angulo $b c g$. sed duo anguli $d c a, d c b$ sunt æquales duobus rectis. itemq; $g c b, g c a$. quare reliquis ex duobus rectis, angulus $d c b$ est æqualis reliquo $a c g$. Duo igitur anguli $d c a, a c g$ duabus rectis æquales erunt. & idcirco $d c, c g$ in eadem recta linea continentur. Eodem quoque modo $e c, c f$ in eadem recta linea contineri demonstrabimus.

Erunt $d c, c e$ asymptoti.] Ex prima huius.

29. primi
4
13

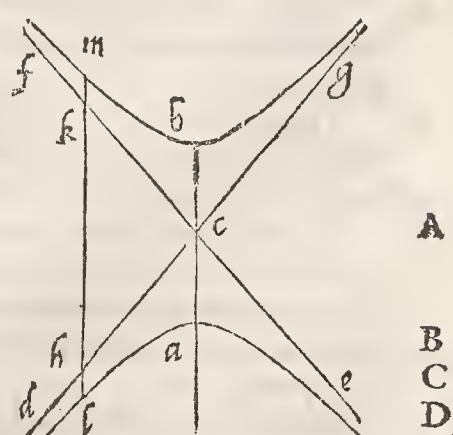
14. primi

D

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVI.

Si in oppositis sectionibus, quædam recta linea ducatur, secans utramque linearum continentium angulum, qui deinceps est angulo sectiones continent: cum utraque oppositarum in uno tantum puncto conueniet: & linea, quæ ex ipsa abscissæ inter asymptotos, & sectiones intericiuntur, æquales erunt.

Sint oppositæ sectiones $a b$, quarum quidem centrum c ; asymptoti uero $d c g, e c f$: & ducatur quædam recta linea $h k$, quæ utramque $d c, c f$ fecet. Dico $h k$ productam cum utraque sectione in uno tantum puncto conuenire. Quoniam enim sectionis a asymptoti sunt $d c, c e$; & ducta est quædam recta linea $h k$, secans utramque continentium angulum, qui deinceps est angulo sectionem continent, uidelicet $d c f$: producta $h k$ cum sectione a conueniet; & similiter cum sectione b . conueniat in punctis $l m$: & per c ipsi $l m$ æquidistantes ducatur $a c b$. æquale igitur est rectangulum $k l h$ quadrato $a c$; & rectangulum $h m k$ quadrato $c b$. quare & $k l h$ rectangulum æquale est rectangulo $h m k$: & idcirco linea $h l$ linea $k m$ est æqualis.



A P O L L O N I I P E R G A E I

F E D . C O M M A N D I N V S .

A PRODVCTA h k cum sectione a conueniet; & similiter cum sectione b.] Ex una decima huius.

B Aequale est igitur rectangulum k l h quadrato a c; & rectangulum h m k quadrato c b.] Ex eadem.

C Quare & k l h rectangulum est æquale rectangulo h m k.] Quoniam enim linea a linea c b est æqualis, quod c sit sectionis centrum; erit & quadratum a c quadrato c b æquale.

D Et idcirco linea h l linea k m est æqualis.] Illud nos hoc lemmate demonstrabimus.

Sit recta linea a b, in qua sumantur duo puncta c d: siq; rectangulum d a c æquale rectangulo c b d. Dico lineam a c ipsi b d æqualem esse.

Si enim fieri potest, sit a c maior, quam b d: & addita utriusque communi c d, erit a d maior, quam c b: & propterea rectangulum d a c maius rectangulo c b d: sed & æquale: quod est absurdum. linea igitur a c ipsi b d est æqualis.

ALITER. Possimus etiam recta demonstratione ut i hoc modo.

14-sexti 9. quinti. Quoniam enim rectangulum d a c rectangulo c b d est æquale, erit ut a d ad d b, ita b c ad c d: & componendo ut a b ad b d, ita b a ad a c. ergo linea a c ipsi b d æqualis erit.

T H E O R E M A X V I . P R O P O S I T I O X V I I .

O P P O S I T A R V M sectionum, quæ coniugatae appellantur, asymptoti communes sunt.

Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatae appellantur, quarum diametri coniugatae a b, c d; & centrum e. Dico earum asymptotos communes esse. ducantur enim linea

A sectiones in punctis a, b, c, d, contingentes, quæ sint f a g, g d h, h b k, k c f ergo pa-

B ralleogrammum est f g h k. Itaq; si jungantur f e h, k e g, erunt

C f e h, k e g rectæ lineæ, & diametri ipsius parallelogrammi,

D quæ à punto e bifariam secabuntur. & quoniam figura, quæ

E ad diametrum a b constituitur, æqualis est quadrato c d: &

F est c e æqualis c d: unumquodque quadratorū f a, a g, k b,

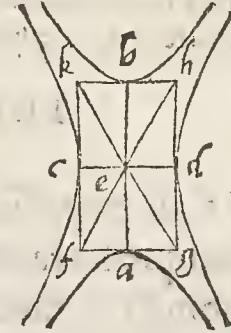
G b h erit quarta pars figuræ, quæ constituitur ad a b. ergo

f e h, k e g sectionum a b asymptoti sunt. similiter demon-

strabimus sectionum c d easdem esse asymptotos. oppositarū

igitur sectionum, quas coniugatas dicimus, asymptoti com-

munes sunt.



F E D . C O M M A N D I N V S .

A ERGO parallelogrammum f g h k.] Aequidistant enim f g, k b lineis, quæ ad a b diametrum ordinatim applicantur. quare & inter se. & eadem ratione k f, b g inter se æqui-

distant.

B Erunt f e h, k e g rectæ lineæ, & diametri ipsius parallelogrammi.] Hoc demonstra-

mus in quintam decimam huius, uidelicet f e h in eadem recta linea contineri, & similiter k e g.

C QVAE à punto e bifariam secabuntur.] Hoc etiam eodem in loco demonstravimus.

D Et quoniam figura, quæ ad diametrum a b constituitur, æqualis est quadrato c d.]

Quoniam enim linea c d sectionum a b secunda diameter est, coniugata ipsi a b, medium propor-

tuum habet inter figurarum latera, ex diffinitione secundæ diametri. quare ut a b ad c d, ita c d

ad rectum figuræ latus: & idcirco rectangulum, quod fit ex a b, & latere recto, quadrato c d

est æquale.

E Et est c e æqualis c d.] Aliter enim non esset secunda diameter.

F Vnumquodque quadratorum f a, a g, k b, b h erit quarta pars eius figuræ.] Nā

cum

cum c d æquidistet fg, kb, & ab ipsis fk, gh; erunt lineaæ fa, kb æquales ce; & ag, bb ipsi 34. primi
cd. quare uniuscuiusque quadratum quarta pars est quadrati cd, hoc est figuræ eius, quæ ad ab 20. sexti
constituitur.

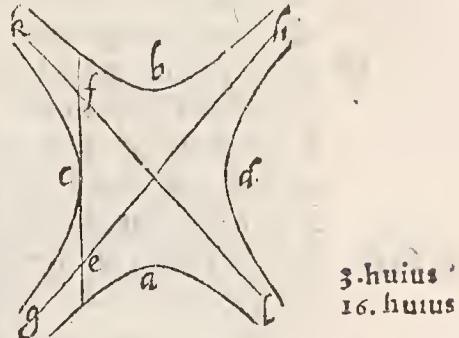
Ergo se h, K e g sectionum ab asymptoti sunt.] Ex prima huius.

G

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVIII.

Si uni oppositarum sectionum, quæ coniugatae dicuntur, occurrat recta linea; & producta ad utrasque partes extra sectionem cadat: cum utraque sectionum, quæ deinceps sunt, in uno tantum punto conueniet.

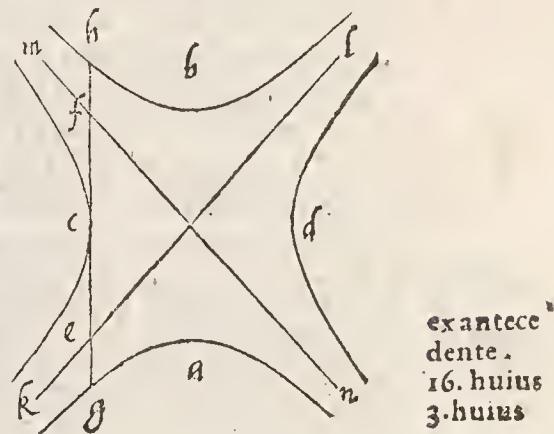
Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatae dicuntur ab cd; & ipsi c occurrat recta linea ef, quæ producta ad utrasque partes extra sectionem cadat. Dico ef cum utraque sectione ab conuenire in uno tantum punto. sint enim gh, kl sectionum asymptoti. ergo ef secabit utramque gh, kl: & propterea cum sectionibus ab in uno tantum punto conueniet.



THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XIX.

Si in oppositis sectionibus, quæ coniugatae appellantur, ducatur recta linea, quamvis ipsarum contingens; cum sectionibus, quæ deinceps sunt, conueniet: & ad tactum bifariam secabitur.

Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatae dicuntur ab cd: & sectionem c contingat recta linea ef. Dico ef productam conuenire cum sectionibus ab: & ad punctum c bifariam secari. Nam ipsani quidem conuenire cum ipsis ab manifeste patet. Itaque conueniat in punctis gh. Dico cg ipsi ch esse æqualem: ducantur enim sectionum asymptoti kl, mn. æquales igitur sunt eg, fh: Itemq; ce, cf. ergo & tota cg toti ch æqualis erit.



THEOREMA XIX. PROPOSITIO XX.

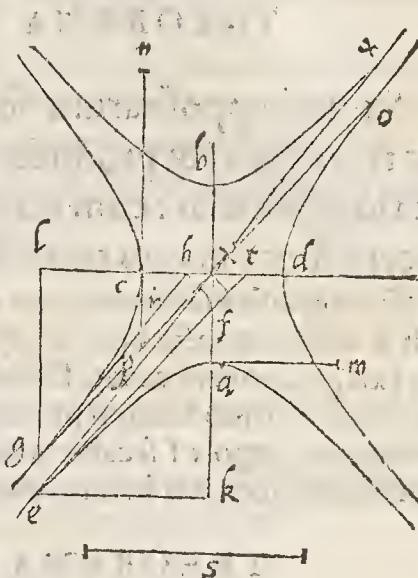
Si unam oppositarum sectionum, quæ coniugatae appellantur, recta linea contingat; & per ipsarum centrum ducantur duæ lineaæ, una quidem per tactum, altera uero contingenti æquidistans, quoisque occurrat uni earum sectionum, quæ deinceps sunt: recta linea, quæ in occursu sectionem contingit, æquidistans erit lineaæ per tactum, & centrum ductæ; quæ uero per tactus & centrum ducentur, oppositarum sectionum coniugatae diametri erunt.

Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatae appellantur, quarum diametri coniugatae sint ab, cd; centrum x: & sectionem a contingat recta linea ef, quæ producta conueniat cum ex in t: & iuncta ex ad x producatur. deinde per x ducatur ipsi ef æquidistans xg: & per g contingens sectionem hg. Dico hg ipsi x e æquidistare: & go ex coniugatas diametros esse. applicentur enim ordinatim ek, gl, cr p.; lineaæ uero,

A

A P O L L O N I I P E R G A E I

- B iuxta quas possunt applicatae, sint a m, c n. Quoniam igitur, ut b a ad a m, ita est n c
 C ad c d: & ut b a ad a m, ita rectangulum $\chi k f$ ad quadratum k e: ut uero n c ad c d,
 ita quadratum g l ad rectangulum $\chi l h$: erit ut rectangulum $\chi k f$ ad quadratum k e,
 ita quadratum g l ad rectangulum $\chi l h$. Sed rectangulum $\chi k f$ ad k e quadratum
 proportionem compositam habet ex proportione
 χk ad K e, & ex proportione f k ad k e: & quadra-
 tum g l ad rectangulum $\chi l h$ proportionem habet
 23. sexti compositam ex proportione g l ad l χ & propor-
 tione g l ad l h. proportio igitur composita ex propor-
 tione χk ad k e, & proportione f K ad k e eadem
 est, quæ componitur ex proportione g l ad l χ , &
 D proportione g l ad l h. quarum quidem propor-
 f k ad K e eadem est, quæ g l ad l χ ; lineæ enim e k,
 k f, se æquidistant ipsis χl , l g, g χ . reliqua igitur pro-
 portio χk ad k e eadem erit, quæ g l ad l h. Quòd
 6. sexti cum circa æquales angulos, qui ad χl , latera propor-
 tionalia sint; triangulum e k χ simile erit triangulo
 g h l, & æquales habebit angulos, sub quibus eiusdem
 rationis latera subtenduntur. ergo æqualis est angu-
 29. primi lus e χ k angulo l g h. est autem & totus k χ g æqua-
 lis toti l g χ . quare reliquus e χ g reliquo h g χ est
 E æqualis; ac propterea linea e χ ipsis g h æquidistant.
 F Itaque siat ut p g ad g r, ita h g ad lineam, in qua s. erit linea s dimidia eius, iuxta
 quam possunt, quæ ad diametrum o g applicantur in sectionibus c d. Sed a b sec-
 G num secunda diamcter est c d, cum qua conuenit ipsa e t. rectangulum igitur ex t χ &
 k e æquale est quadrato c χ : si enim à puncto e ipsis k χ æquidistantem duxerimus, re-
 ctangulum, quod fit ex t χ , & linea, quæ inter χ & æquidistantem interiicitur, quadra-
 H K to c χ æquale erit. quare ut t χ ad k e, ita t χ quadratum ad quadratum χ c. ut autem
 L M t χ ad k e, ita t f ad f e; hoc est triangulum t χ f ad triangulum e χ f. & ut quadratum
 N t χ ad quadratum χ c, ita triangulum t χ f ad triangulum X c p; hoc est ad triangulum
 g h X. Vt igitur triangulum t X f ad triangulum e X f, ita t X f triangulum ad triangu-
 9. quinti. lum g h X: & ideo triangulum g h X æquale est triangulo X e f. habet autem & angu-
 O lum h g X angulo X e f æqualem; quoniam e χ quidem æquidistant g h; & e f ipsis g X.
 15. sexti ergo latera quæ sunt circa æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent;
 16. cftq; ut g h ad e X, ita e f ad g X. rectangulū igitur h g X æquale est rectangulo X e f.
 P Itaque quoniam ut linea s ad h g, ita r g ad g p: & ut r g ad g p, ita X e ad e f; æquidi-
 stant enim. quare ut s ad h g, ita X e ad e f. Vt autem s ad h g, sumpta X g commu-
 1emin 22 decimi ni altitudine, ita est rectangulum ex s & X g ad rectangulum h g X. & ut X e ad e f,
 ita quadratum X e ad rectangulum X e f. Vt igitur rectangulum ex s & X g ad re-
 ctangulum h X g, ita X e quadratum ad rectangulum X e f: & permutoando ut rectan-
 gulum ex s & g X ad quadratum X e, ita rectangulum h g X ad rectangulum X e f. Sed æquale est rectangulum h g X rectangulo X e f. ergo rectangulū ex s & g X æqua-
 le est quadrato X e: & rectangulum ex s & g X quarta pars est figuræ, quæ ad g o con-
 stituitur; nam & g X est dimidia ipsius g o, & s dimidia eius, iuxta quam possunt: qua-
 dratum uero e X quarta pars est quadrati e x, quod e X æqualis sit X x. ergo quadra-
 tum e x æquale est figuræ ad g o constitutæ. similiter demonstrabimus & quadratum
 g o figuræ, quæ fit ad e x, esse æquale. ex quibus sequitur, ut e x, g o oppositarum se-
 ctionum a b, c d diametri coniugatae sint.



F E D . C O M M A N D I N V S .

- A Deinde per χ ducatur ipsis e f æquidistantes χ g.] Intelligendum g X productam sectio-
 ni occurrere in o puncto. Apollonius præctum, in quo recta linea sectioni, uel alteri linea occurrit
 σύμπτωσιν uocat, nobis occursum latine liceat appellare.

Quo-

Quoniam igitur, ut $b \alpha$ ad $a m$, ita est $n c$ ad $c d$.] Hoc ita demonstrabimus. sint oppositae sectiones, quae coniugatae appellantur, quarum diametri coniugatae $a b, c d$; centrum e ; & asymptoti fb, gk : iunganturq; fag, gdh , $hb \chi, k \chi c f$: sit autem sectionis a rectum latus am , & sectionis c rectum latus cn . Dico ut $b \alpha$ ad $a m$, ita esse $n c$ ad $c d$. Quoniam enim ut $b \alpha$ ad $a m$, ita est quadratum $e a$ ad quadratum af , quod in prima propositione ostensum fuit: & eadem ratione, ut $n c$ ad $c d$, ita quadratum fc ad quadratum ce . sed ut quadratum $e a$ ad quadratum af , ita est fc quadratum ad quadratum ce ; quod $e a, fc$ aequales sint; itemq; aequales af, ce . ergo ut $b \alpha$ ad $a m$, ita $n c$ ad $c d$.

Et ut $b \alpha$ ad $a m$, ita rectangulum χkf ad quadratum χe .]

Ex 37. primi huius.

Quarum quidem proportio fk ad $k e$ eadem est, quae gl ad $l \chi$; lineæ enim $e k, k f, f e$ ipsis $\chi l, l g, g \chi$ aequidistant.] Cum enim $g \chi$ aequidistet ef ; & lg ipsis $k f$; erit angulus efk aequalis angulo $g \chi k$, hoc est angulo χgl : angulus autem $e k f$ aequalis est ipsis χlg , quod & $e k$ aequidistet $l \chi$. reliquus igitur angulus reliquo est aequalis: & triangulum fk e triangulo $gl \chi$ simile. quare ut fk ad $k e$, ita gl ad $l \chi$.

Ac propterea linea $e \chi$ ipsis gh est aequidistans.] Ex 28. primi. sed hoc etiam ex secundo lemmate Pappi constare potest.

Erit linea s dimidia eius, iuxta quam possunt, quae ad diametrum og applicatur.] Ex 51. primi huius.

Rectangulum igitur ex $e \chi$ & kg aequaliter est quadrato $c \chi$. si enim à punto e ipsis $k \chi$ aequidistantem duxerimus, rectangulum, quod fit ex $t \chi$, & ea, quae &c.] Ex 38. primi huius.

Quare ut $t \chi$ ad ke , ita $t \chi$ quadratum ad quadratum χc .] Quoniam enim rectangulum ex $t \chi$ & ke aequaliter est quadrato χc ; erunt tres lineæ $t \chi, \chi c, ke$ proportionales. ergo ut $t \chi$ ad ke , ita quadratum $t \chi$ ad χc quadratum, ex corollario 2c. sexti.

Vt autem $t \chi$ ad ke , ita tf ad fe .] Ex 4. sexti, propter similitudinem triangularium K $tf \chi, efk$.

Hoc est triangulum $t \chi f$ ad triangulum $e \chi f$.] Ex prima sexti.

Et ut quadratum $t \chi$ ad quadratum χc , ita triangulum $t \chi f$ ad triangulum χcp] Rursus cum tres lineæ proportionales sint $t \chi, \chi c, ke$; erit triangulum $t \chi f$ ad triangulum χcp , ut $t \chi$ ad ke ; sunt enim ea triangula inter se similia, quod $p \chi$ aequidistet ft . ut autem $t \chi$ ad ke , ita $t \chi$ quadratum ad quadratum χc . triangulum igitur $t \chi f$ ad triangulum χcp , est ut quadratum $t \chi$ ad χc quadratum.

Hoc est ad triangulum $gk \chi$.] Est enim triangulum $gh \chi$ triangulo χcp aequaliter, quod probatum est in secunda demonstratione 43. primi huius.

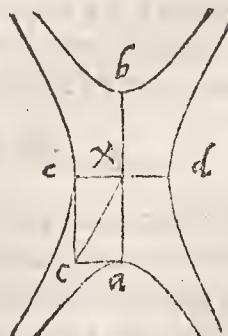
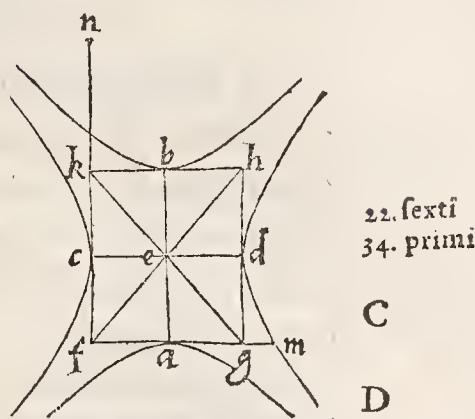
Habet autem & angulum $hg \chi$ angulo χef aequaliter, quoniam $e \chi$ quidem aequidistat gh , & ef ipsis $g \chi$.] Angulus enim $bg \chi$ est aequalis angulo $g \chi e$, hoc est ipsis χef .

Et ut rg ad gp , ita χe ad ef , aequidistant enim.] Ex quarta sexti, nam triangularis rgp , χef similia sunt, quod etiam χf ipsis rp aequidistet.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Iisdem positis ostendendum est punctum, in quo contingentes lineæ conueniunt, ad unam asymptoton esse.

Sint oppositæ sectiones, quae coniugatae appellantur; & eorum diametri $a b c d$: ducanturq; contingentes $a e, ec$. Dico punctum e ad asymptoton esse. est enim quadratum $c \chi$ aequaliter quartæ parti figuræ, quae ad ab constituitur: quadrato autem $c \chi$ aequaliter est quadratum $a e$. ergo quadratum $a e$ quartæ parti dictæ figuræ erit aequaliter. Itaque iungatur $e \chi$. asymptotos



O

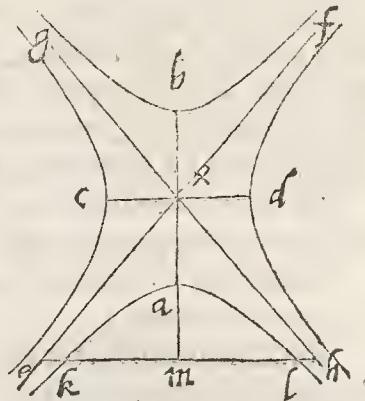
A P O L L O N I I P E R G A E I

igitur est χ : & propterea punctum e ad ipsam asymptoton necessario consistit.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXII.

Si in oppositis sectionibus, quæ coniugatæ appellantur, ex centro ad quamvis sectionem ducatur recta linea; & huic æquidistans altera ducatur, quæ cum una ex sectionibus, quæ deinceps sunt, & cum asymptotis conueniat: rectangulum constans ex portionibus lineæ ductæ inter sectionem, & asymptotos interiectis, quadrato lineæ, quæ ex centro ducitur, æquale erit.

Sint oppositæ sectiones, quæ coiugatæ appellantur a b c d; quarum asymptoti e f, g h: & ex centro χ ducatur quædam recta linea χ c d: & huic æquidistans ducatur e k l h, quæ & sectionem, quæ deinceps est, & asymptotos secet. Dico rectangulum e k h quadrato c χ æquale esse. secetur enim k l bifariā in m; & iuncta m χ producatur. diameter igitur est a b ipsarum a b sectionum. Et quoniā linea, quæ in punto a sectionem contingit, æquidistans est ipsi e h: erit e h ad diametrum a b ordinatim applicata. centrum autem est χ . ergo a b, c d coniugatæ sunt diametri: propterea q; quadratum c χ æquale est quartæ partis figuræ, quæ ad a b constituitur. sed quartæ parti dictæ figuræ æquale est rectangulum h k e. rectangulum h k e quadrato c χ æquale erit.



5. huius

20. huius

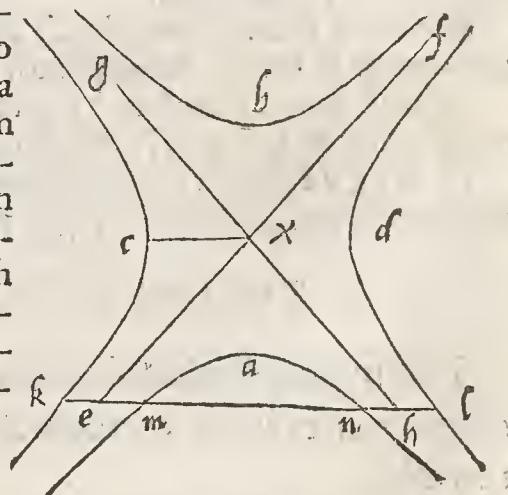
10. huius

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIII.

Si in oppositis sectionibus, quæ coniugatæ appellantur, ex centro ducatur quædam recta linea ad quamvis sectionem; & huic æquidistans ducatur, quæ cum tribus, quæ deinceps sunt, sectionibus conueniat: rectangulum constans ex portionibus lineæ ductæ inter tres sectiones interiectis, duplum erit quadrati eius lineæ, quæ ex centro ducitur.

Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatæ appellantur a b, c d: quarum centrum sit χ : & à punto χ ad quamvis sectionem ducatur quædam recta linea χ c: atque huic æquidistans sit k l, quæ cum tribus deinceps sectionibus conueniat. Dico rectangulum k m l quadrati c χ duplum esse. ducan-

- A tur enim asymptoti sectionum e f, g h. ergo quadratum c χ æquale est utriusque rectangulorum h m e, h k e. rectangulum autem h m e unâ cum rectangulo h k e æquale est rectangulo l m k; propterea quod extremæ lineæ sunt æquales. rectangulum igitur l m k quadrati c χ duplum erit.
- B



E V T O C I V S.

- B Rectangulum autem h m e unâ cum rectangulo h k e æquale est rectangulo l m k; propterea quod extremæ lineæ sunt æquales.] Sit recta linea l k: & sit l h æqualis e k; & h n ipsi e m: ducantur autem à punctis m k perpendiculares lineæ m x, k o: ita ut m x sit æqualis m k, & k o æqualis k e; & compleantur parallelogramma x h, b a. Itaque quoniam m x æqualis est m k, hoc est p o: & l h æqualis k e, hoc est k o: erit h a parallelogrammum parallelo-

grammo

grammo mo æquale. commune apponatur xh . totum igitur parallelogrammum lx æquale est duobus parallelogrammis xh, mo ; hoc est ho , pr. est autem parallelogrammum lx , quod continetur lmk : & parallelogrammum ho continetur hke ; & parallelogrammum pr, hme . sed licet & aliter idem demonstrare.

Secetur mn bifariam in s . constat igitur & lk in s bifariam secari, & rectangulum hke æquale esse rectangulo lek , quod hk sit æqualis le . Et quoniam lk secatur in partes æquales in s , & in partes inæquales in e ; erit rectangulum lek una cum quadrato cs æquale quadrato sk . quadratum autem es rectangulo hme una cum quadrato sm est æquale. ergo quadratum sk æquale est rectangulo lek , hoc est hke , & rectangulo hme una cum quadrato sm . eadē ratione erit quadratum sk æquale rectangulo lmk , & quadrato sm . commune auseatur quadratum sm . reliquum igitur rectangulum hke una cum rectangulo hme est æquale rectangulo lmk .

F E D. C O M M A N D I N V S.

Ergo quadratum cx æquale est utriusque rectangulorum hme, hke .] Est enim ex antecedenti propositione rectangulum hme æquale quadrato cx : & ex undecima huius rectangulum hke eidem quadrato cx est æquale.

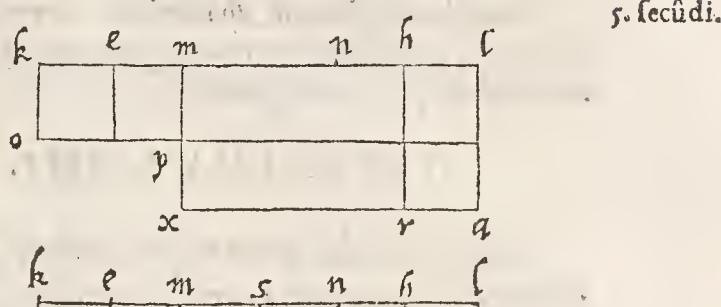
Rectangulum autem hme una cum rectangulo hke æquale est rectangulo lmk , propterea quod extremæ lineæ sunt æquales.] Hoc appareat ex tertio & quarto lemmate Pappi, quamquam in tertio aliter concludat. ostendit enim rectangulum lek una cum rectangulo hme æquale esse rectangulo lmk . sed cum lh, ke sint æquales, rectangulum hke æquale est ipsi lek . quare sequitur rectangulum hke una cum rectangulo hme æquale esse rectangulo lmk . Eutocius secundam demonstrationem ex Pappo sumpsit. Nos uero priusquam in lemmata Pappi, uel Eutocij commentarios incideremus, illud ex prima secundi libri elementorum in hunc modum demonstrauimus.

Iisdem quæ supra manentibus dico rectangulum hme una cum rectangulo hke æquale esse rectangulo lmk . est enim rectangulum hke æquale rectangulo mk , una cum eo, quod fit ex hme & ke . commune apponatur rectangulum hme . ergo rectangula hme, hke æqualia sunt rectangulis hme, mk , una cum eo, quod fit ex hme & ke . Rursus rectangulum lmk æquale est rectangulo hme una cum eo, quod ex lh , & mk constat, hoc est rectangulo ekm : est enim ek æqualis lh . quorum quidem rectangulum hme est æquale rectangulo hme , una cum eo, quod fit ex hme & ke . ergo rectangulum lmk æquale est rectangulis hme, ekm , una cum eo, quod fit ex hme , ke : quibus quidem æqualia erant rectangula hme, hke . rectangulum igitur hme una cum rectangulo hke æquale est rectangulo lmk .

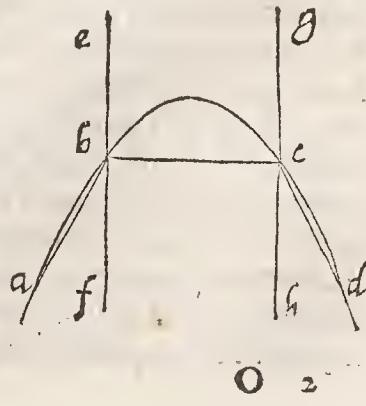
THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

Si parabolæ duæ rectæ lineæ occurrant, utraque in duobus punctis: & nullius ipsarum occursum alterius occursibus contineatur: conuenient inter se se extra sectionem.

Sit parabole $abcd$, cui duæ rectæ lineæ ab, cd occurrant; ita ut nullius ipsarum occursus alterius occursibus contineatur. Dico eas productas inter se conuenire. Duocantur enim per b, c diametri sectionis eb, fg, gh . æquidi-



5. secundi.



A P O L L O N I I P E R G A E I

stantes igitur sunt: & utraque sectionem in uno tantum punto secat. Itaque iuncta
b c anguli e b c, g c b duobus rectis sunt æquales: & idcirco lineaæ b a, d c angulos duo
bus rectis minores efficiunt. ergo inter se se extra sectionem conuenient.

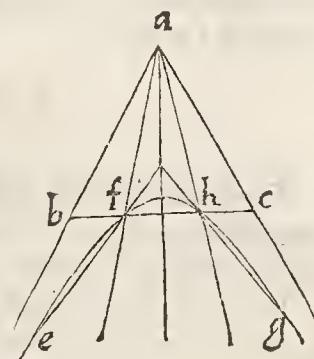
E V T O C I V S.

*Animaduertendum est Apollonium συμπτώσεις, hoc est occurſus, appellare puncta, in quibus
lineæ a b, c d sectioni occurſunt. et obſeruare oportet, ut puncta extra ſe ſe poſita ſint. eadem eti. m
eueniant in ipſis contingentibus.*

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si hyperbolæ occurſant duæ rectæ lineaæ, utraque in duobus punctis; nullius autem ipsarum occurſus alterius occurſibus contineatur: conuenient quidem inter ſe ſe extra sectionem, ſed tamen intra angulum, qui hyperbolæ continent.

Sit hyperbole, cuius asymptoti a b, a c: & duæ rectæ lineaæ e f, g h sectioni occurſant, ita ut nullius ipsarum occurſus occurſibus alterius contineatur. Dico e f g h productas extra sectionem quidem, ſed tamen intra angulum b a c inter ſe couenire. iunctæ enim a f, a h producantur; & iungatur f h. Itaque quoniam e f, g h productæ ſecant angulos a f h, a h f; & ſunt dicti anguli duobus rectis minores; conuenient inter ſe ſe extra sectionem quidem, ſed tamen intra angulum b a c. Similiter demonſtrabimus e f, g h inter ſe conuenire, etiam ſi ſectionem contingant.



F E D. C O M M A N D I N V S.

Similiter demonſtrabimus e f, g h inter ſe conuenire, etiam ſi ſectionem contingat]

Conuenire ſcilicet intra angulum asymptotis contentum, quod quidem etiam patere potest ex collario trigesimæ primæ primi huius linea enim, quæ hyperbolæ contingit, ſi producatur ſecat diametrum inter uerticem & centrum ſectionis. Idem quoque euenire perſpicuum eft, ſi altera quidem linea ſectionem contingat, ut altera uero in duobus punctis ſecet.

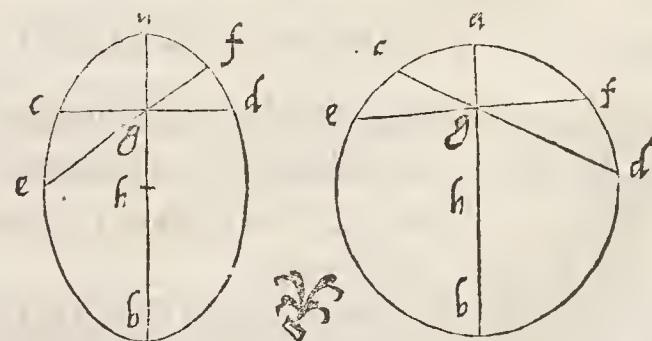
THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXVI.

Si in ellipſi, uel circuli circumferentia duæ rectæ lineaæ non tranſeunt per centrum ſe inuicem ſecent; bifariam ſe ſe non ſecabunt.

Si enim fieri potest, in ellipſi, uel circuli circumferentia duæ rectæ lineaæ c d, e f non tranſeuntes per centrum ſe bifariam ſecent in g: ſitq; h centrum ſectionis: & iuncta g h ad a b puncta producatur. Quoniam igitur a b diameter eft, ipsam e f bifariam ſecans linea, quæ ad a ſectionem contingit, & quidi

6. huius

30. primi ſtans erit e f. Similiter demonſtrabimus eandem etiam ipſi c d æquidistare. ergo e f æquidistat c d, quod eft absurdum. non igitur e f, c d ſe ſe bifariam ſecant.

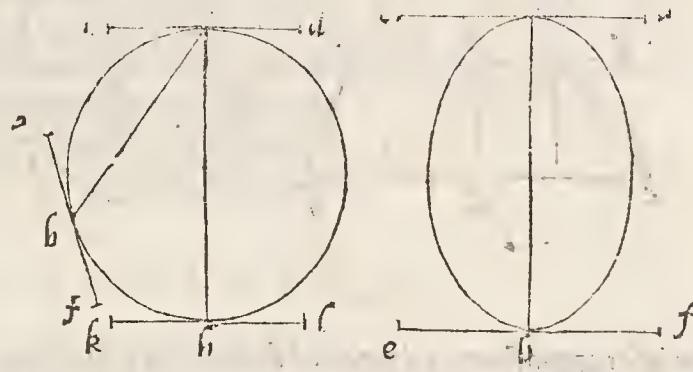


THEO

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVII.

Si ellipsis, vel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingant: & si quidem ea, quæ tactus coniungit per centrum transeat sectionis: contingentes lineæ sibi ipsis æquidistantabunt: si minus, conuenient inter se se ad easdem centri partes.

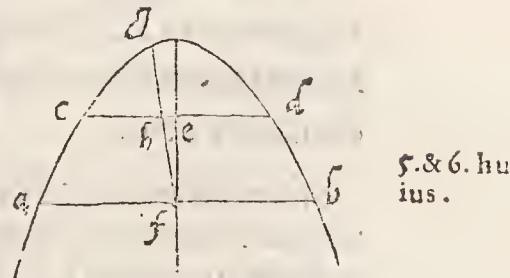
Sit ellipsis, vel circuli circumferentia ab, quam contingant duæ rectæ lineæ cd, eb: iungaturq; ab: & primo transeat per centrum. Dico cd ipsis ef æquidistantem esse. Quoniam enim ab diameter est sectionis: & cd in puncto a ipsam contingit; erit cd æquidistans lineis, quæ ad diametrum ab ordinatim applicantur: & simili ratione ef erit eisdem æquidistans. ergo cd æquidistat ef. Si uero ab per centrum non transeat, ut apparet in secunda figura, ducatur ah diameter: & per h contingens kl ipso c d. quare ef producta ad easdem partes centri, in quibus est ab, cum cd conueniet.



THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVIII.

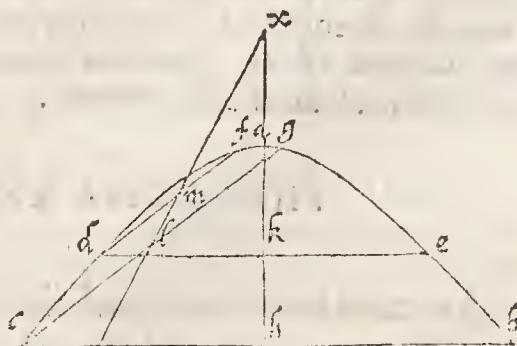
Si in coni sectione, vel circuli circumferentia duas lineas æquidistantes recta linea bifariam fecerit, diameter erit sectionis.

In sectione enim coni duæ lineæ æquidistantes ab, cd in punctis ef bifariam secentur: & iuncta ef producatur. Dico ef sectionis diameter esse. Si enim non est, sit ghf diameter, si fieri possit. ergo quæ in puncto g contingit sectionem, æquidistans est ipsis ab. quare & ipsis cd. est autem gh diameter. ergo ch, hd æquales sunt, quod est absurdum: posuimus enim ce æqualem ed. non igitur gh diameter est sectionis. similiter demonstrabimus neque aliam quamquam esse diameter, præterquam ipsam ef. ergo ef sectionis diameter erit.

5. & 6. hu
ius.

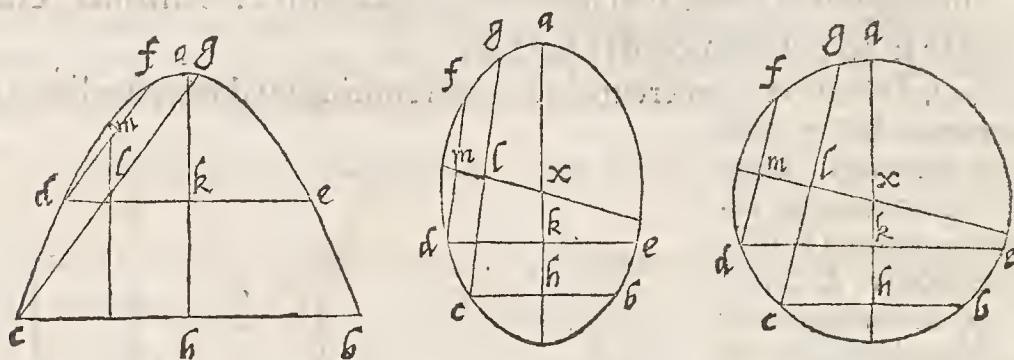
E V T O C I V S.

NON inutile erit data in plano curua linea, inuestigare utrum circuli circumferentia sit, vel alia ex coni sectionibus; an uero ab his ipsis diuersa. Itaque sit abc; & oporteat speciem ipsius inuestigare. sumantur in linea aliqua puncta cd, per quæ ducantur intra ipsam lineæ æquidistantes cb, de: & rursus ab ipsis punctis aliæ æquidistantes ducantur cg, df: bifariamq; secentur; cb, de quidem in hk punctis; cg, df uero in lm; & iungantur hk, lm. si igitur omnes, quæ ipsis cb æquidistant, à linea hk; & quæ æquidistant cg ab ipsa ml bifariam dividantur; erit abc una ex coni sectionibus, cuius diametri hk, ml; si minus, non erit. Sed quæ sit ex quatuor comperiemus, lineas hk, lm in infinitum producentes utraque ex parte; vel enim æquidistant, & est parabole: vel ad partes quidem hl inter se conuenient.



A P O L L O N I I P E R G A E I

& est ellipsis, aut circulus: uel ad alteras partes, & est hyperbole. ellipsem uero à circulo distinguemus ex puncto, in quo conueniunt h k, m l, quod est centrum. si enim ab eo ad lineam ductæ sunt æquales, constat ab c circuli circumferentiam esse; sin minus, ellipsis. Possimus autem &



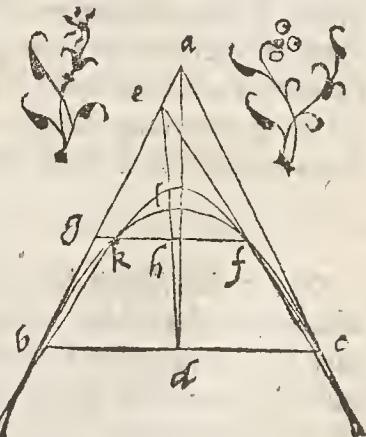
aliter ipsas cognoscere ex ijs, quæ ad diametrum ordinatim applicantur, uidelicet c b, d k. nam si fuerit ut quadratum c b ad quadratum d k, ita b a ad a k, parabole erit; At si c b quadratum ad quadratum d k maiorem quidem habuerit proportionem, quam b a ad a k, hyperbole; si uero minorem, ellipsis. Sed etiam ex lineis contingentibus easdem discernere licebit, si ea, quæ superius dicta sunt, ipsis inesse in memoriam redigemus.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXIX.

Si coni sectionem, uel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in idem punctum conueniant; & ab eo ad punctum, quod lineam tactus coniungentem bifariam secat, alia linea ducatur; sectionis diameter erit.

Sit coni sectio, uel circuli circumferentia, quam contingant rectæ lineæ a b, a c, in punctum a conuenientes: & ducta b c secetur bifariam in d: & iungatur a d. Dico a d diametrum esse sectionis. Si enim fieri potest, sit d e diameter: & iungatur c e, quæ sectionem ipsam secabit. Secet autem in f: & per f ipsi c d b ducatur æquidistans f h g. Itaque quoniam c d æqualis est d b, erit & f h ipsi h g æqualis. Sed linea, quæ in l contingit sectionem, æquidistans est b c: & est f g eidem æquidistans. ergo f g æquidistat lineæ sectionem in punto l contingenti: & idcirco f h est æqualis h k; quod fieri minime potest. non igitur diameter est d e. Similiter demonstrabimus, præter ad nullam aliam esse diametrum.

ex demōstratis in
6. primi
huius.
5. huius

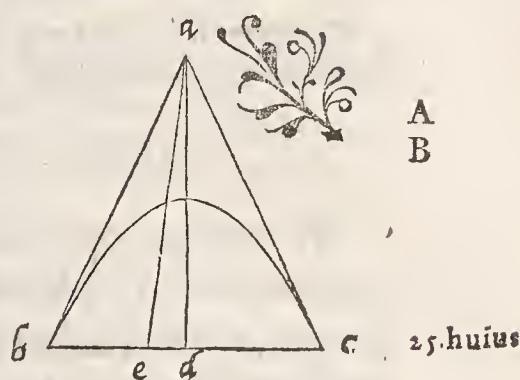


THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXX.

Si coni sectionem, uel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in unum punctum conueniant: diameter, quæ ab eo punto ducitur, lineam tactus coniungentem bifariam secabit.

Sit

Sit coni sectio, uel circuli circumferentia b c : & ducantur duæ rectæ lineæ b a, a c ipsam contingentes, quæ conueniant in a: & iuncta b c per a ducatur sectionis diameter a d. Dico b d ipsi d c æqualem esse. non enim, sed si fieri potest, sit b c æqualis e c: & iungatur a e. ergo a e diameter est sectionis. est autem & a d: quod est absurdum. Si enim sectio est ellipsis, punctum a, in quo conueniunt diametri, centrum erit sectionis extra ipsam: quod fieri non potest. si uero sit parabola, diametri ipsius inter se se conuenient: quod si hyperbole, quoniam lineæ b a, a c sectioni occurrunt, & unius occursus alterius occursu non continetur; conuenient inter se se intra angulum hyperbolæ continentem. sed & in ipso angulo; centrum enim ponitur, cum d a, a e diametri sint: quod est absurdum. non igitur b c e c æqualis erit.

A
B

25. huius

F E D . C O M M A N D I N V S .

Ergo a e diameter est sectionis.] Ex antecedente.

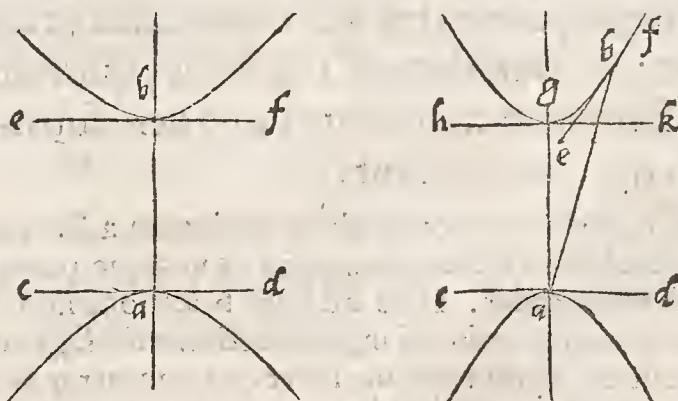
Est autem & a d: quod est absurdum.] Nam si sint duæ diametri a c, a d, sequitur absurdum in omnibus coni sectionibus. in parabola enim sequitur diametros inter se se conuenire, quas æquidistantes esse constat. sed in reliquis, quoniam diametri in centro conueniunt, erit a ipsarum centrum. quare in ellipsi & circulo centrum extra ponitur, quod fieri non potest. In hyperbola uero cum lineæ b a, a c ipsam contingant, conuenient quidem extra, sed tamen intra angulum, qui hyperbolæ continent. atqui conueniunt in ipso angulo, uidelicet in eius centro: quod itidem est absurdum.

A
B

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXI.

Si utramque oppositarum sectionum duæ rectæ lineæ contingant; & si quidem ea, quæ tactus cuniungit, per centrum transeat, contingentes lineæ æquidistantes erunt; si minus, conuenient inter se se ad easdem partes centri.

Sint oppositæ sectiones a b: & ipsas contingant c a d, e b f: linea uero, quæ ex a ad b dicitur, primum transeat per centrum sectionum. Dico c d ipsi e f æquidistantem esse. Quoniam enim oppositæ sectiones sunt, quæ rūm diameter a b: & unam earum cōtingit linea c d in puncto a: quæ per b ipsi c d æquidistans dicitur, sectionem contingit autem e f. ergo c d ipsi e f est æquidistans. sed non transeat per centrum, quæ ex a ad b dicitur: sitq; sectionū diameter a g: & h k sectionem in g contingat. ergo h k æquidistans est ipsi c d. Et quoniam hyperbolæ duæ rectæ lineæ contingunt e f, h k; conuenient inter se se. est autem h k ipsi c d æquidistans. quare & c d, e f productæ inter se conuenient necesse est, & ad easdem centri partes.

25. huius
z. primi
Vitell.

A P O L L O N I I P E R G A E I

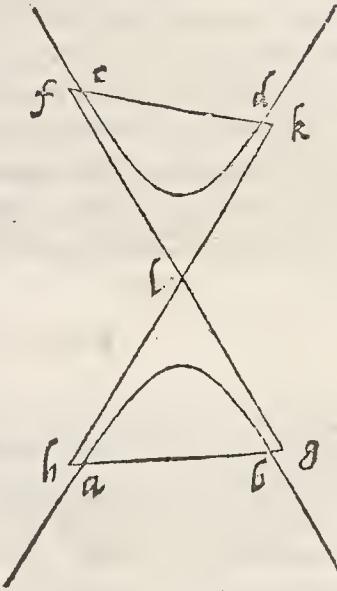
F E D . C O M M A N D I N V S.

Quæ per b ipsi c d æquidistans ducitur, sectionem continget.] Illud uero nos demonstrauimus in commentarys in 44. primi huius.

T H E O R E M A X X I . P R O P O S I T I O X X I I .

S I utriusque oppositarum sectionum rectæ li
neæ occurrant, ipsas uel in uno puncto conti
gentes, uel in duobus secantes; & productæ in
ter se conueniant: punctum, in quo conueniunt,
erit in angulo, qui deinceps est angulo sectio
nem continenti.

- A** Sint oppositæ sectiones, quas uel in uno puncto con
tingant, uel in duobus secantibus rectæ lineæ a b, c d. & pro
ductæ inter se conueniant. Dico punctum, in quo con
ueniunt, esse in angulo, qui deinceps est angulo sectio
nem continenti. sint enim sectionum asymptoti f g, h k.
ergo ab producta asymptotis occurret. occurrat in h g
punctis. & quoniam ponimus lineas c d, h g inter se con
uenire, necesse est ut conueniant in locum, qui est sub
s. huius B angulo h l f, uel k l g. similiter idem demonstrabitur, etiam si a b, c d sectiones con
tingant.



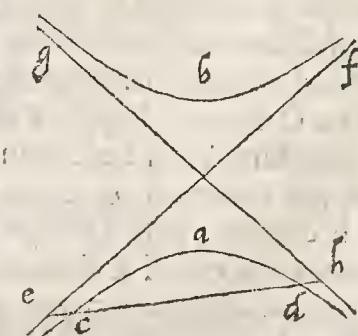
F E D . C O M M A N D I N V S.

- A** Dico punctum, in quo conueniunt, esse in angulo, qui deinceps est angulo sectio
nem continenti.] In angulo intellige in loco, qui est sub lineis angulum continentibus.
B Similiter idem demonstrabitur, etiam si a b, c d sectiones contingant.] Nam quam
quam contingant sectiones, tamen asymptotis occurrent ex tertia huius. idem quoque sequetur, si
altera contingat sectionem, altera in duobus punctis fecet.

T H E O R E M A X X I I . P R O P O S I T I O X X I I I .

S I uni oppositarum sectionum recta linea occurrens, & producta
ex utraque parte extra sectionem cadat; cum altera sectione non con
ueniet; sed transibit per tres locos; quorum unus quidem est sub an
gulo sectionem continentem; duo uero sub iis an
gulis, qui deinceps sunt.

- A** Sint oppositæ sectiones a b: & sectionem a fecet qua
dam recta linea c d; ita ut producta ex utraque parte ex
tra sectionem cadat. Dico c d cum b sectione non con
uenire. ducantur enim asymptoti sectionum e f, g h. ergo
c d producta asymptotis occurret. non occurret autem
in aliis punctis, quam in e h. ergo non conueniet cum se
ctione b: & per tres locos transibit. si enim cum utraque
s. huius B oppositarum sectionum conueniret, nulli ipsarum in duo
bus punctis occurreret, propter ea, quæ superius demon
strata sunt.



FED.

F E D . C O M M A N D I N V S .

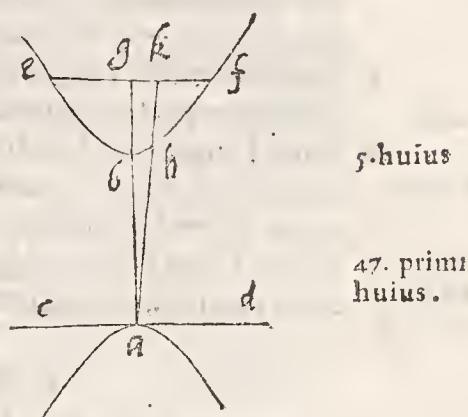
Non occurret autem in aliis punctis. quam in e h.] Alioqui sequeretur, ut duarum re- A
ctarum linearum ijdem termini essent, quod est absurdum.

Si enim cum utraque oppositarum sectionum conueniret, nulli ipsarum in duobus B
punctis occurreret.] Nam linea, quæ secat utramque continentium angulum, qui deinceps est
angulo sectiones continenti, cum utraque oppositarum sectionum in uno tantum punto conuenit, ex
16. huius. Idem etiam eveniet, si linea c d sectionem contingat, quoniam producta cum utraque a-
symptoton conueniet, ex tertii huius; & reliqua similiter demonstrabuntur.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIV.

Si unam oppositarum sectionum recta linea contingat: & huic æqui-
distans ducatur in altera sectione; quæ à tactu ad medium lineæ æquidi-
stantis dicitur, oppositarum sectionum diameter erit.

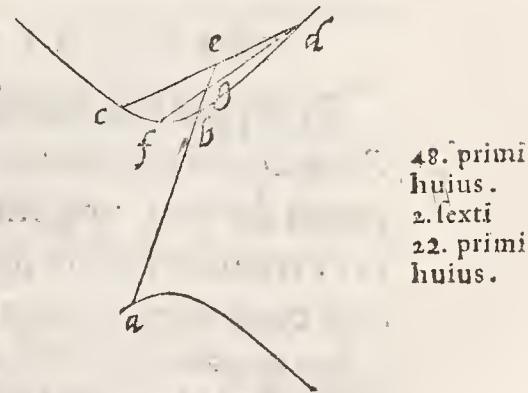
Sint oppositæ sectiones a b, quarum unam, uidelicet a co-
tingat in a punto recta linea c d: ipsiæ c d æquidistans
ducatur e f in altera sectione: & secta e f in g bifariam,
iungatur a g. Dico a g oppositarum sectionum diametrū
esse. si enim fieri potest, sit diameter a h k. ergo quæ in h
sectionem contingit, æquidistans est ipsiæ c d. sed & c d ipsiæ
e f est æquidistans. quare ea, quæ contingit sectionem, æ-
quidistat e f: & propterea e k ipsiæ k f est æqualis: quod
fieri non potest. est enim e g æqualis g f. non igitur a h
diameter est oppositarum sectionum. ex quibus manifeste
constat a b ipsarum diameter esse.



THEOREMA XXXIV. PROPOSITIO XXXV.

Si diameter in una oppositarum sectionum rectam lineam bifariam
fecerit: quæ in termino diametri contingit alteram sectionem; lineæ bifariam
sectæ erit æquidistans.

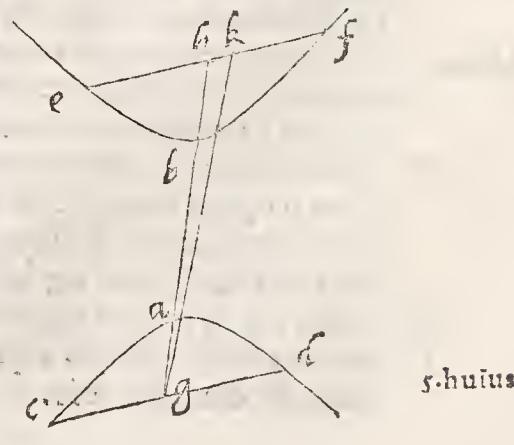
Sint oppositæ sectiones a b, quarum diameter a b in b
sectione rectam lineam c d bifariam fecerit in e. Dico li-
neam, quæ in punto a sectionem contingit, ipsiæ c d æqui-
distantem esse. si enim fieri potest, sit lineæ in a contingen-
ti æquidistans d f. ergo d g ipsiæ g f est æqualis. sed & d e
æqualis est e c. æquidistat igitur c f ipsiæ e g: quod est ab-
surdum; producta enim c f cum ipsa e g conueniet. quare
neque d f lineæ ad a contingenti est æquidistans, neque
alia quæpiam præter ipsam c d.



THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XXXVI.

Si in utraque oppositarum sectionum rectæ
lineæ inter se æquidistantes ducantur: quæ ipsarum
medium coniungit, oppositarum sectionum
diameter erit.

Sint oppositæ sectiones a b: in quarum utraque ducan-
tur rectæ lineæ c d, e f inter se æquidistantes: & in punctis
g h bifariam secantur: & iungatur g h. Dico g h dia-
meter esse oppositarum sectionum. si enim non est, sit g k.
ergo quæ in a sectiones contingit, ipsiæ c d est æquidistans:



A P O L L O N I I P E R G A E I

& idcirco ipsi e f. æquales igitur sunt e k, k f. quod fieri non potest: quoniam & e h, h f sunt æquales. ergo g k non est diameter oppositarum sectionum. quare relinquitur g h ipsarum diameter esse.

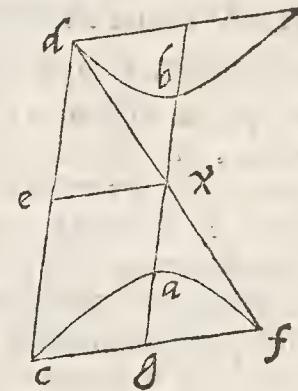
THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XXXVII.

Si oppositas sectiones recta linea secet, non transiens per centrum; quæ à medio ipsius ad centrum ducitur oppositarum sectionum diameter erit, quæ recta appellatur; transuersa uero diameter, ipsi coniugata est ea, quæ à centro ducitur æquidistans lineæ bifariam sectæ.

Sint oppositæ sectiones a b: & ipsas secet recta linea c d, non transiens per centrum, quæ bifariam in e diuidatur: sitq; sectionum centrum χ : & iungatur χ e: & per χ ipsi c d æquidistans ducatur a b. Dico a b, e χ diametros esse coniugatas oppositarum sectionum. ducta enim d χ ad f

A producatur; & iungatur c f. æqualis igitur est d χ ipsi χ f. est autem & d e æqualis e c. ergo e χ , c f inter se æquidistant. Itaque producatur b a ad g. & quoniā d χ , χ f sunt

B æquales, & e χ , g f æquales erunt. & propterea ipsæ c g, g f. ergo quæ ad a sectionem contingit, æquidistans est c f. quare & ipsi e χ . lineaæ igitur a b, e χ oppositarum sectionum coniugatae diametri erunt.



F E D. C O M M A N D I N V S.

A Aequalis igitur est d χ ipsi χ f.] Ex 30. propositione primi huius.

B Et quoniā d χ , χ f sunt æquales, & e χ , g f æquales erunt.] Cum enim e χ , c f æquidistant, erit triangulum d e χ simile triangulo χ g f. quare ut d χ ad χ e, ita χ f ad g: & permutando ut d χ ad χ f, ita e χ ad g f. æqualis igitur est e χ ipsi g f.

C Et propterea ipsæ c g, g f.] Nam & c g eidem e χ est æqualis, ex trigesima quarta primi elementorum.

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XXXVIII.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineaæ contingant, in unum punctum conuenientes: quæ ab eo punc̄to ad medium lineaæ tactus coniungentis ducitur, oppositarum sectionum diameter erit, quæ recta uocatur; transuersa uero, ipsi coniugata, quæ per centrum ducitur, lineaæ tactus coniungenti æquidistantis.

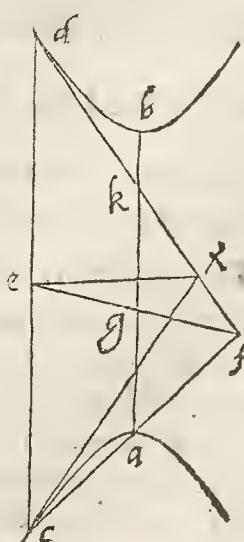
Sint oppositæ sectiones a b, quas rectæ lineaæ c χ , χ d contingant: & ducta c d bifariam diuidatur in e: & iungatur e χ . Dico e χ diameter rectam esse; transuersam uero, ipsiæ coniugatam, quæ per centrum ducitur lineaæ c d æquidistans. sit enim

s. huius A diameter e f, si fieri potest: & sumatur quodvis punctum f. ergo d χ ipsi e f occurret. occurrat in f puncto, & iungatur c f. con-

B ueniet igitur c f cum sectione. conueniat autem in a: & per a ducatur a b, quæ lineaæ c d sit æquidistans. Itaque quoniam e f diameter est, secans c d bifariam: & ipsiæ æquidistantes lineaæ bifariam secabit. quare a g ipsi g b est æqualis. sed cum c e sit æ-

C qualis e d; erit in triangulo c f d linea a g æqualis g k. ex quo

D sequitur & g k ipsi g b æqualem esse: quod fieri non potest. non igitur e f diameter erit.



F E D.

F E D . C O M M A N D I N V S .

Ergo d x ipsi e f occurrit.] Si enim à puncto d linea ordinatim applicetur in b sectione, A
æquidistant lineæ e f. quare & d X ipsi e f occurrat necesse est, ex secundi propositione Vitel-
lionis.

Conueniet igitur c f cum sectione.] Nam cum c X contingat sectionem, linea c f ean- B
dem necessario secabit, ex 32. primi huus.

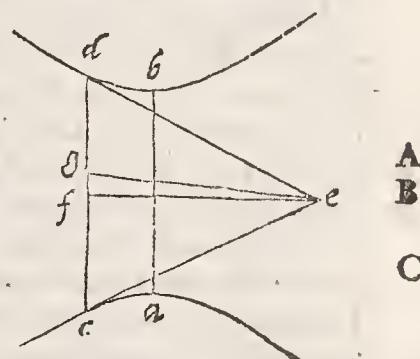
Erit in triangulo c f d linea a g æqualis g b.] Vide quæ scripsimus in sextam primi C
huus.

Non igitur e f diameter erit.] Deest hoc loco principalis conclusio, quam nos supplere de- D
bemus: ex his enim necessario colligitur, lineam e X oppositarum sectionum diametrum rectum es-
se. at uero transuersam esse eam, quæ per centrum dicitur ipsi c d æquidistans, demonstrabimus, ut
in antecedenti propositione.

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XXXIX.

Si oppositas sectiones contingant duæ rectæ lineæ in unum punctum conuenientes; quæ per punctum illud, & per centrum ducitur, linea tactus coniungentem bifariam secabit.

Sint oppositæ sectiones a b, quas duæ rectæ lineæ c e, d
contingant: & iuncta c d ducatur diameter e f. Dico c f
ipsi f d esse æqualem. si enim non ita sit, secetur c d bifari-
am in g: & iungatur g e. ergo g e diameter est. sed & e f
est diameter. punctum igitur e centrum erit: idcircoq; li-
neæ, quæ contingunt sectiones, in centro ipsarum conue-
nient: quod est absurdum. constat ergo c f ipsi f d æqua-
lem esse.



F E D . C O M M A N D I N V S .

Ergo g e diameter est.] Ex antecedenti propositione.

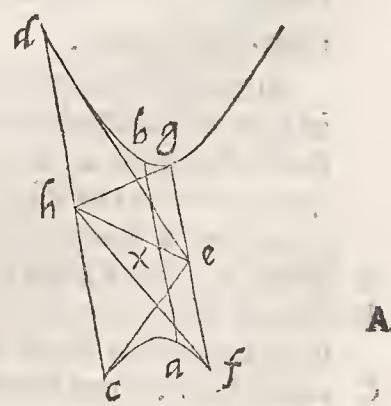
Punctum igitur e centrum erit.] Centrum enim est, in quo oppositarum sectionum dia- B
metri conueniunt.

Quod est absurdum.] Si quidem lineæ, quæ contingunt oppositas sectiones, extra centrum C
earum conueniunt, uidelicet in angulo, qui deinceps est angulo sectiones continent; ut constat ex
trigesima secunda huus.

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XL.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes in unum conueniant: & per ponendum, in quo conueniunt, linea ducatur, tactus coniungenti æquidistans, & sectionibus occurrentes: quæ ab occurribus ad medium lineæ tactus coniungentis ducuntur, sectiones ipsas contingunt.

Sint oppositæ sectiones a b, quas duæ rectæ lineæ c e, d
contingant: iungaturq; c d: & per e ducatur f e g ipsi
c d æquidistans. secta autem c d bifariam in h, iungantur
f h, h g. Dico f h, h g sectiones contingere. ducatur enim
e h. ergo e h recta diameter est, transuersa uero, ipsi con-
iugata, quæ per centrum dicitur æquidistans c d. Itaque
sumatur centrum x, & ducatur a x b ipsi c d æquidistans.



A P O L L O N I I P E R G A E I

- ergo h e, a b coniugatæ diametri sunt. atque ordinatim applicata est c h ad secundam
 B diametrum; & c e sectionem contingit, secundæ diametro occurrens. re&tangulum
 igitur e x h æquale est quadrato dimidiæ secundæ diametri; hoc est quartæ parti figu
 ræ, quæ ad a b constituitur. & quoniam fe ordinatim applicatur; & iungitur fh, per
 C spicuum est fh contingere sectionem a. similiter & g h contingere sectionem b. linea
 igitur fh, h g sectiones a b necessario contingunt.

F E D. C O M M A N D I N V S.

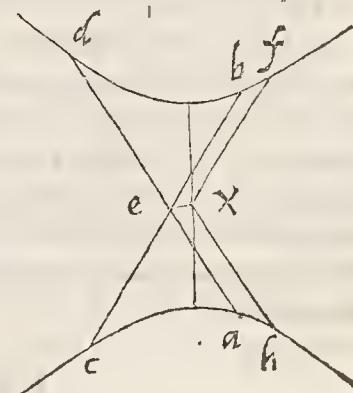
- A Ergo e h recta diameter est, transuersa uero ipsi coniugata.] Ex 38. huius.
 B Rectangulum igitur e x h æquale est quadrato dimidiæ secundæ diametri.] Ex 38.
 primi huius.
 C Perspicuum est fh contingere sectionem a.] Ex ijs, quæ nos demonstrauimus in com
 mentarijs 38. primi huius.

THEOREMA XL. PROPOSITIO XLI.

Si in oppositis sectionibus duæ rectæ lineæ se inuicem secent, non transeuntes per centrum, se se bifariam non secabunt.

Sint oppositæ sectiones a b, in quibus duæ rectæ lineæ c b, a d per centrum non transeuntes, se inuicem secent in e. Dico eas bifariam se se non secare. si enim fieri potest, se cent se se bifariam: sitq; x ipsarum centrum. & iungatur

- A e x. ergo e x diameter est. ducatur per x lineæ b c æquidistantes.
 B stans x serit x f diameter ipsi e x coniugata. quæ igitur in f sectionem contingit, est æquidistantes e x. Eadem ratione si ducatur h x æquidistantes a d, quæ in h contingit sectionem ipsi e x erit æquidistantes. ergo quæ contingit sectione in f æquidistantes est lineæ in h contingenti, quod
 C fieri non potest: conueniunt enim inter se se, ut iam demonstratum est. non igitur c b, a d per centrum non transeuntes se se bifariam secant.



F E D. C O M M A N D I N V S.

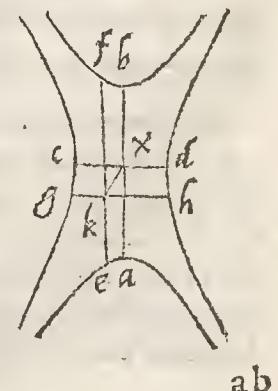
- A Ergo e X diameter est.] Ex 37. huius.
 B Erit X f diameter ipsi e X coniugata.] Ex eadem.
 C Conueniunt enim inter se se, ut iam demonstratum est.] Cum enim linea tactus fb contingens non transeat per centrum, quæ sectionem contingit in f, non æquidistantes lineæ in h contingenti, sed cum ea conueniet ad easdem partes centri, ex 34. primi huius.

THEOREMA XLI. PROPOSITIO XLII.

Si in oppositis sectionibus, quæ coniugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ se inuicem secent, non transeuntes per centrum; bifariam se se non secabunt.

Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatæ appellantur a b, c d: & in ipsis duæ rectæ lineæ e f, g h non transeuntes per centrum se inuicem secent in k. Dico e f, g h se se bifariam non secare. si enim fieri potest, secent se bifariam: & sit X sectionum centrum. ducatur autem a b æquidistantes e f: & c d ipsi g h æquidistantes; & iungatur

- A k X. ergo k X, a b coniugatæ diametri sunt. & similiter coniugatæ sunt diametri k X, c d, quare linea contingens sectionem in a æquidistantes lineæ in c contingenti: quod fieri non potest:
 C conueniunt enim inter se se, quoniam contingens in c sectiones



$a b$ secat: & contingens in a secare ipsas $c d$. patet igitur eas conuenire in locum, qui D est sub angulo $a X c$. non igitur $e f, g h$ per centrum non transeuntes, se se bifariā secāt.

F E D. C O M M A N D I N V S.

E R G O $k \chi, ab$ coniugatæ diametri sunt.] Ex trigesima septima huius. A

Quare linea contingens sectionem in a æquidistat lineæ in c contingenti.] Nam B
quaæ in a sectionem contingit, æquidistans est ipsi $k \chi$: & similiter quaæ contingit in c eidem est
æquidistans. quæ autem æquidistant uni & eidem, & inter se æquidistant. linea igitur contin- 30. primi
gens sectionem in a æquidistat ei, quæ in ipso c contingit.

Conueniunt enim inter se se, quoniam contingens in c sectiones $a b$ secat: & con- C

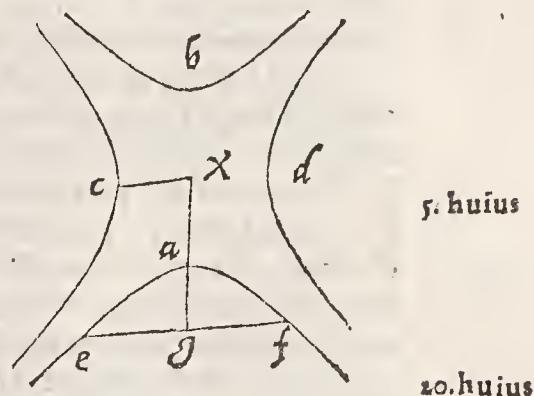
tingens in a secat ipsas $c d$.] Ex decima nona huius. D

Patet igitur eas conuenire in locum, qui est sub angulo $a \chi c$.] Conueniunt enim ad D
eam asymptoton, quæ inter $a \chi c$ interiicitur, ex nigesima prima huius.

THEOREMA XLII. PROPOSITIO XLIII.

S i unam oppositarum sectionum, quæ coniugatæ appellantur recta linea in duobus punctis secet: & a centro duæ lineæ ducantur, una quidem ad medium lineæ secantis, altera uero ipsi æquidistans: erunt hæ oppositarum sectionum coniugatæ diametri..

Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatæ appellantur $a b, c d$: & sectionem a quædam recta linea secet in duobus punctis $e f$: & $e f$ bifariam diuidatur in g . sit autem X sectionum centrum: iungaturq; $X g$: & $c X$ ipsi $e f$ æquidistans ducatur. Dico $a X, X c$ coniugatas diametros esse. Quoniam enim diameter est $a X$, & lineam $e f$ bifariam secat; quæ in a contingit sectionem æquidistans est ipsi $e f$. quare & ipsi $c X$. & quoniam oppositæ sectiones sunt, & unam ipsarum, uidelicet a quædam recta linea in a contingit; a centro uero X ducuntur duæ lineæ, una quidem $X a$ ad tactum, altera uero $c X$ contingentiæquidistans: erunt $a X, X c$ sectionum coniugatæ diametri: hoc enim superius demonstratum est.

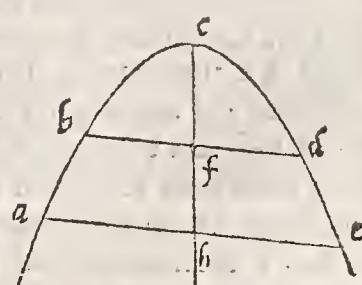


PROBLEMA II. PROPOSITIO XLIV.

D A T A coni sectione diametrum inuenire.

Sit data coni sectio, in qua puncta $a b c d e$: & oporteat ipsius diametrum inuenire. Itaque factum iam fit; & diameter fit $c h$: ducatis autem ordinatim lineis $d f, e h$, & productis; erit $d f$ æqualis $f b$; & $e h$ ipsi $h a$. si igitur ordinabimus $b d, a e$, ut sint positione æquidistantes; data erunt puncta $h f$, quare & $h f c$ positione data erit.

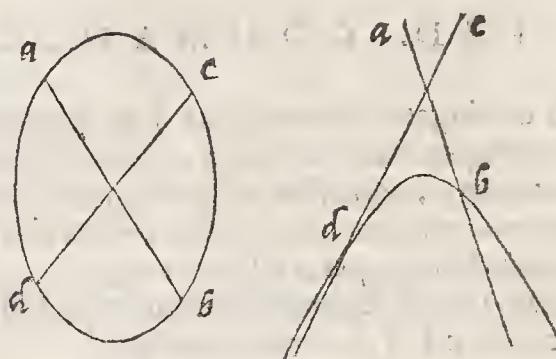
Componetur autem in hunc modum. sit data coni sectio, in qua $a b c d e$ puncta: ducanturq; lineæ $b d, a e$ inter se æquidistantes: & in punctis fh bifariam diuidantur. ergo iuncta fh diameter erit sectionis. Eadem ratione & infinitas diametros inueniemus.



APOLLONII PERGAEI
PROBLEMA III. PROPOSITIO XLV.

DATA ellipsi,
uel hyperbola ce-
trum inuenire.

Hoc autem mani-
feste constat. Si enim
duae sectionis dia-
metri a b, c d ducantur;
punctum, in quo se-
secant, centrum erit
sectionis, ut positum
iam est.



PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XLVI.

DATA coni sectione axem inuenire.

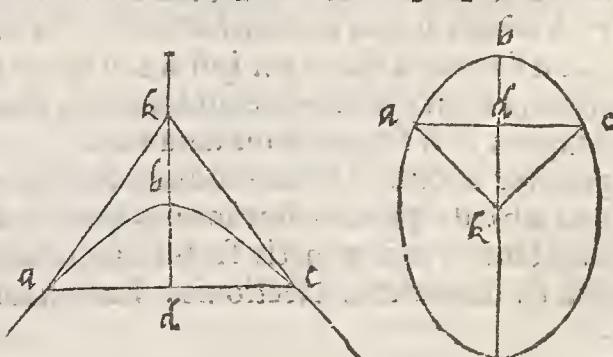
Sit coni sectio data primum parabole, in qua puncta f c e. Itaque oportet ipsius axem inuenire. Ducatur enim diameter a b: & si quidem a b sit axis, factum erit, quod proponebatur; sin minus, ponatur iam factum esse: & sit axis c d. ergo c d ipsi a b est æquidistans: & quæ ad ipsam ducuntur perpendiculares bifariam diuidit. Sed perpendiculares ad c d, & ad ipsam a b perpendiculares sunt. ergo c d bifariam diuidit perpendiculares, quæ ad a b ducuntur. si igitur ordinabimus e f perpendicularem ad a b, erit ea positione data: & idcirco e d æqualis d f. quare punctum d datum erit. dato autem d puncto, & ducta d c, quæ lineæ a b po-
sitione datae sit æquidistans; erit & ipsa d c positione data.

Componetur autem in hunc modum. sit data sectio pa-
rabole, in qua puncta f c e: ducaturq; diameter a b: & b e
ad ipsam perpendicularis, quæ ad f producatur. si ergo
e b sit æqualis b f, perspicuæ constat a b axem esse: sin mi-
nus, diuidatur e f in d bifariam: & ipsi a b æquidistans
ducatur c d. erit utique c d sectionis axis; est enim dia-
meter æquidistans; hoc est diameter, quæ lineam e f & bifari-
am, & ad rectos angulos diuidit. Datae igitur pàrabolæ axis inuentus est c d. Ita-
que patet unum esse parabolæ axem. nam si alius axis sit, ut a b, erit ipsi c d æquidi-
stans, & secabit e f. quare & bifariam secabit. ergo b e est æqualis b f, quod fieri non
potest.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XLVII.

DATA hyperbola, uel ellipsi axem inuenire.

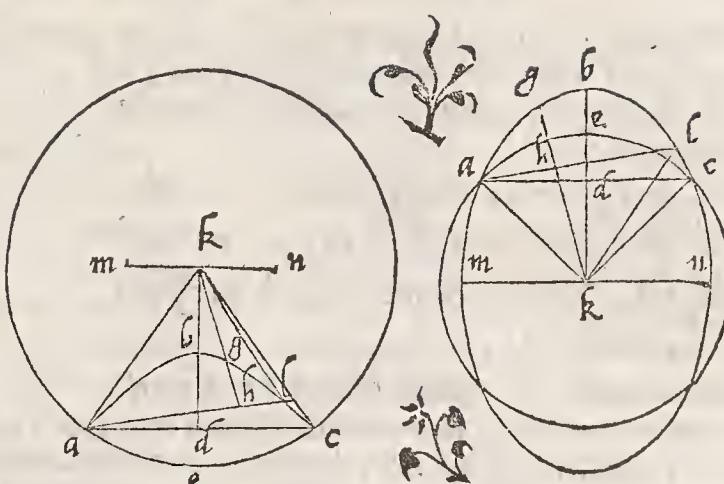
Sit hyperbole, uel ellipsis a b c; & oporteat ipsius axem inuenire. Sit iam inuentus:
& sit K d: centrum uero sectionis sit k. ergo k d lineas, quæ ad ipsam ordinatim ap-
plicantur, bifariam, & ad rectos angulos secant. Itaque ducatur perpendicularis c d a;
& k a, k c iungantur. Quo-
niā igitur c d æqualis est d a;
& c K ipsi K a est æqualis. ergo si punctum K datum sit,
erit linea c k data. quare ex
centro k & interculo c k cir-
culus descriptus, & per ipsum
a transbit, & erit positione
datus. est autem & a b c sectio
data positione e. ergo & pun-
ctum a. sed & c est datum. da-



ta igitur positione linea ca : & est cd ipsi da æqualis. ergo punctum d datur: sed & ipsum K . linea igitur dk positione data erit. Componeatur autem hoc modo, sit data hyperbole, uel ellipsis abc : & sumpto k . ipsius centro, in sectione sumatur quod uis punctum c & ex centro k , inter uallop; k c circulus describatur ce . a . ducta uero ca bifariam fecetur in d : & iungatur k c , k d , k a : & Kd ad b producatur. Itaque quoniam ad est æqualis dc : & dk communis: erunt duæ lineæ cd , dk duabus ad , dk æquales: & basis Ka æqualis basi kc . quare linea kd ipsam ad bifariam, & ad rectos angulos secat: & idcirco kd est axis. ducatur per K ipsi ca æquidistans m n . ergo m n est axis sectionis ipsi b K coniugatus.

26. libri
datorum
7.

82. primi



THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLVIII.

His autem demonstratis, reliquum est, ut ostendamus non esse alios axes ipsarum sectionum.

Si enim fieri potest, sit axis aliis x g . ergo ducta perpendiculari ah , ex iis, quæ supra diximus, erit ah æqualis hl . quare & ak ipsi kl . sed & ipsi kc . sunt igitur x l , Kc inter se æquales. quod est absurdum. At uero circulum aec non occurere sectioni in alio puncto inter ac , in hyperbola quidem perspicuum est: sed in ellip si, ducantur perpendiculares cr, ls . & quoniam Kc est æqualis kl , ex centro enim sunt & quadratum ck quadrato kl æquale. quadrato autem kc æqualia sunt quadrata cr, ls . & qr : & quadrato kl æqualia quadrata ls, sk . ergo quadrata cr, ls quadratis ls, sk æqualia erunt. quo igitur differt quadratum cr à quadrato ls , eo quadratum sk differt à quadrato kr . Rursus quoniam rectangulum mrn unà cum quadrato rk æquale est quadrato xm : rectangulum autem msn unà cum quadrato sk eidem km quadrato est æquale: erit rectangulum mrn unà cum quadrato rk æquale rectangulo msn unà cum sk quadrato. ergo quo differt quadratum sk à quadrato kr , eo rectangulum mrn differt à rectangulo msn . sed demonstratum est, quo quadratum sk differt à quadrato kr , eo differre cr quadratum à quadrato ls . quo igitur differt quadratum cr à quadrato ls , eo rectangulum mrn à rectangulo msn differt. Itaque cum applicatæ sint, cr, ls ; erit ut quadratum cr ad rectangulum mrn , ita quadratum ls ad rectangulum msn . demonstratum autem est in utrisque eundem esse excessum. ergo quadratum cr rectangulo mrn est æquale: & quadratum ls æquale rectangulo msn . circulus igitur est linea lc m . quod est absurdum. posuimus enim ellipsum esse.

A

47. primi

B

5. secundi

D

C

E

F

E V T O C I V S.

Quo igitur differt quadratum cr à quadrato ls , eo quadratum sk differt à quadrato kr .

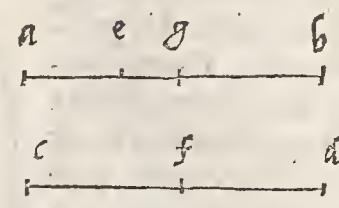
B

Sint duæ magnitudines æquales ab, cd : & diuidantur in partes inæquales in punctis e, f . Dico quo differt ae à cf , eo eb differre af .

A P O L L O N I I P E R G A E I

Ponatur ipsi $c f$ aequalis $a g$. ergo $e g$ est excessus magnitudinum $a g, a c$; hoc est $c f, a e$: est enim $a g$ aequalis $c f$. sed & ab ipsi $c d$. reliqua igitur $g b$ reliqua $f d$ est aequalis. quare $e g$ est excessus ipsarum $e b, b g$; hoc est $e b, f d$.

Sed sint quatuor magnitudines $a e, e b, c f, f d$: & differat $a e$ à $c f$ eo, quo $e b$ differt ab $f d$. Dico utraque $a e, e b$ utrisque $c f, f d$ aequalia esse.



Ponatur rursus $a g$ aequalis $c f$. ergo $e g$ est excessus magnitudinum $a e, c f$. eodem autem differunt $a e, c f, e b, f d$. aequales igitur sunt $g b, f d$. sed & $a g, c f$ aequales. ergo ab ipsi $c d$ aequalis erit. perspicuum igitur est, si prima excedat secundam, magnitudine aliqua; & eadem magnitudine tertia quartam excedat: primam & quartam, secundam & tertiam aequales esse iuxta arithmeticam proportionem. Itaque his positis, si sit ut prima ad tertiam, ita secunda ad quartam: prima quidem tertiae aequalis erit: secunda uero quartae. potest enim hoc in alijs demonstrari, propterea quod in uigesimo quinto theoremate quinti libri elementorum Euclidis demonstratum est, si quatuor magnitudines proportionales sint, primam & quartam reliquis duabus maiores esse.

F E D . C O M M A N D I N V S .

- A Et quoniam $k c$ est aequalis $K l$, ex centro enim sunt.] Nam si ponamus utraque puncta $c l$ esse in ellipsi & circulo, erunt linea $k c, k l$ ex circuli centro: & idcirco inter se aequales.
- C Quo igitur differt quadratum $c r$ à quadrato $s l$, eo rectangulum $m r n$ à rectangulo $m s n$ differt.] Ex his sequitur per ea, quæ Eutocius hoc loco demonstrauit, quadratum $c r$ una cum rectangulo $m s n$ aequaliter esse quadrato $s l$ una cum $m r n$ rectangulo.
- D Itaque cum applicatae sint $c r, l s$, erit ut quadratum $c r$ ad rectangulum $m r n$, ita quadratum $l s$ ad rectangulum $m s n$.] Ex uigesima prima primi huic: quadratum enim $c r$ ad rectangulum $m r n$ eam proportionem habet, quam figuræ rectum latus ad transuersum, & eandem habet quadratum $l s$ ad rectangulum $m s n$. quare sequitur, ut quadratum $c r$ ad $m r n$ rectangulum, ita esse quadratum $l s$ ad rectangulum $m s n$.
- E Ergo quadratum $c r$ rectangulo $m r n$ est aequaliter.] Si enim fieri potest, non sit aequaliter quadratum $c r$ rectangulo $m r n$. & cum quadratum $c r$ ad rectangulum $m r n$ eandem proportionem habeat, quam quadratum $l s$ ad $m s n$ rectangulum; erit ex uigesima quinta quinti elementorum quadratum $c r$ una cum rectangulo $m s n$, uel maius, uel minus quadrato $s l$ una cum rectangulo $m r n$: quod est absurdum; supra enim demonstrauimus ea inter se se aequalia esse.
- F Circulus igitur est lineam $l c m$.] Ex 2. lemmate Pappi in primum librum, & ex ijs, quæ Eutocius in quintam propositionem primi libri demonstrauit.

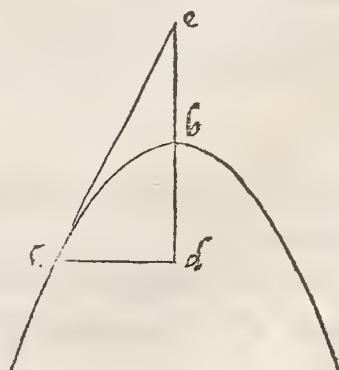
P R O B L E M A VI . P R O P O S I T I O X L I X .

D A T A coni sectione, & puncto non intra sectionem dato, ab eo rectam lineam ducere, quæ sectionem contingat.

Sit data coni sectio primum parbole, cuius axis $b d$: & oporteat à puncto non intra sectionem dato rectam lineam ducere, ut ante propositum est. Itaque datum punctum uel est in linea, uel in axe, uel in loco, quod extra relinquitur. sit primum in linea, quod sit a : positione naturæ factum esse: & sit linea $a e$ ducatur autem

- A B perpendicularis $a d$, quæ positione data erit: & erit $b e$ aequalis $b d$. at $b d$ est data. data igitur est $b e$: estq; punctum b datum. ergo & punctum e . sed datum quoque
- C D cit a punctum. linea igitur $a e$ positione data erit.

Componetur autem in hunc modum. Ducatur ex puncto a perpendicularis $a d$: ponaturq; $b e$ ipsi $b d$ aequalis: & iungatur $a e$. linea igitur $a e$ sectionem con-



contingere manifesto constat: Sit rursus punctum e in axe datum: ducaturq; iam sit linea a e sectionem contingens: & perpendicularis ducatur ad. ergo b e est æqualis b d: & est data b e. quare & b d. sed datum est b punctum. ergo & d datum erit. quod cum da perpendicularis sit, & positione erit data. quare & punctum a. sed & e datum. linea igitur a e positione data erit.

Componetur uero in hunc modum. ponatur ipsi b e æqualis b d: & à punto d ducatur da ipsi e d perpendicularis: iungaturq; a e. manifestum est lineam a e contingere sectionem. sed & illud constat si datum punctum sit idem, quod b, lineam, quæ ab eo perpendicularis ducitur, sectionem ipsam contingere.

Sit datum punctum c, & factum iam sit, quod proponebatur: sitq; linea ca contingens: & per c ducatur cf æquidistans axi, hoc est ipsi b d. ergo cf positione data est: & à punto a ad cf ordinatim applicetur af. erit cg æqualis gf: & g est datum. datum igitur erit & ipsum f. ordinatim autem applicatur fa, hoc est æquidistans ei, quæ in g sectionem contingit. data igitur est fa positione: & idcirco punctum a datum. sed & punctum c. ergo ca positione data erit.

Componetur autem hoc modo. ducatur per c ipsi b d æquidistans cf: ponaturq; fg æqualis gc: & ei, quæ in g contingit sectionem, æquidistans ducatur fa: & ac iungatur. perspicuum igitur est lineam ac facere illud, quod faciendum proponebatur.

Sit rursus hyperbole, cuius axis cb d, centrum h, & asymptoti he, hf: punctum uero datum, uel in sectione erit, uel in axe, uel intra angulum lineis eh f contentum; uel in loco, qui deinceps est; uel in una asymptoton continentium sectionem; uel in loco intermedio inter contarentes angulum ad uerticem eius, qui lineis fh e comprehenditur.

Itaque sit primum in sectione, ut a: factumq; iam sit, & linea ag sectionem contingat. ducatur autem perpendicularis ad: & bc sit transuersum figuræ latutus. erit ut cd ad db, ita cg ad gb. sed proportio cd ad db est data, quod utraque data sit. proportio igitur cg ad gb erit data. & est data bc. quare & g datum. sed & ipsum a. ergo ag positione data erit.

Componetur autem sic. Ducatur à punto a perpendicularis ad: & proportio cg ad gb eadem sit, quæ cd ad db: & iungatur ag. patet igitur lineam ag contingere sectionem.

Rursus sit datum punctum g in axe: & factum iam sit: ducaturq; contingens ag: & ad perpendicularis. erit eadem ratione, ut cg ad gb, ita cd ad db: & data est cb d. ergo punctum d datum. est autem da perpendicularis. quare & positione data erit: & est seccio data positione. datum igitur est a punctum. sed & ipsum g. ergo ag positione dabitur. Componetur autem hoc modo. ponantur alia eadem: & fiat proportio cd ad db eadem, quæ est cg ad gb: & ducatur da perpendiculari, iungatur a g. constat igitur lineam ag facere illud, quod proponebatur: & à punto g ad partes oppositas alteraduci lineam, quæ sectionem contingat.

Iisdem positis, sit datum punctum k in loco, qui intra angulum e h f continetur: & oporteat ab eo punto lineam ducere, quæ sectionem contingat. ponatur iam factum esse: & sit linea contingens ka: iungatur autem kh, & producatur adeo, ut ipsi l h sit æqualis hn. omnia igitur data erunt. quare & ipsa hn. Itaque ordinatim applicetur am ad mn. erit ut n k ad kl, ita nm ad

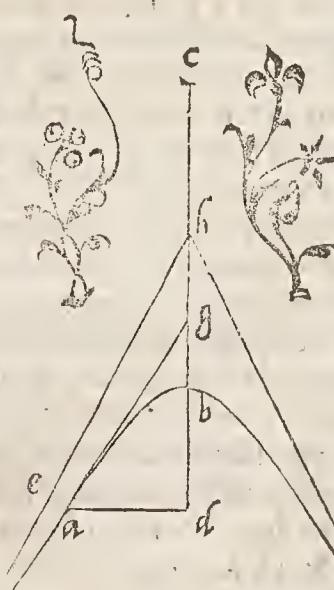
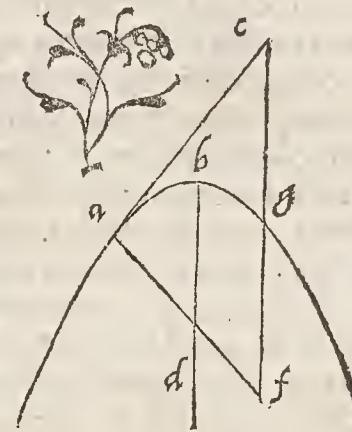
F

G H

35. primi
huius.

K

L



M

N

O

36. primi
huius.34. primi
huius.

Q

A P O L L O N I I P E R G A E I

m l. proportio autem n k ad k l est data. data igitur erit & proportio n m ad m l. estq; punctum l datum. ergo & m; & ordinatim applicata est m a, æquidistans ei quæ in l sectionem contingit. quare & m a datur positione. at positione datur sectio a l b. ergo & punctum a. sed & k datur. data igitur erit linea a k.

Componetur autem hoc modo. ponantur alia eadem: & sit datum punctum k: iunctaq; k h producatur: & sit h n æqualis l h. fiat autem ut n k ad k l, ita n m ad m l: & ei, quæ in l sectionem contingit, æquidistans ducatur m a; & k a iungatur. ergo k a contingit sectionem. & manifestum est ab eodem punto k ad partes oppositas alteram lineam duci, quæ sectionem contingit.

Iisdem positis sit punctum f datum in una asymptoton continentium sectionem: oporteatq; à puncto f ducere lineam, quæ sectionem contingat. Itaque ponatur factum esse: & sit linea contingens f a e: & per a ducatur a d ipsi e h æquidistans.

P erit h d æqualis d f, quoniam & f a ipsi a e est æqualis: & data est f h: ergo & punctum d datum. data quoque erit positione d a, quæ per d ducitur æquidistans ipsi h e positione data: & sectio data est positione. ergo & punctum a. sed & f datum. linea igitur f a e positione data erit.

Componetur autem hoc pacto. sit sectio a b, cuius asymptoti e h, h f: & datum pūctum f sit in una asymptoton sectionem continentium: secuta autem f h bifariam in d, ducatur per d linea d a ipsi h e æquidistans: & iungatur f a. Quoniam igitur f d est æqualis d h: & f a ipsi a e æqualis erit. quare ex iis, quæ demonstrata sunt, linea f a sectionem contingit.

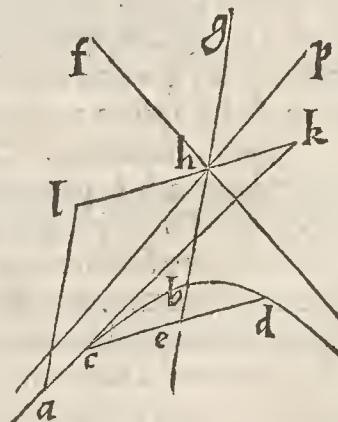
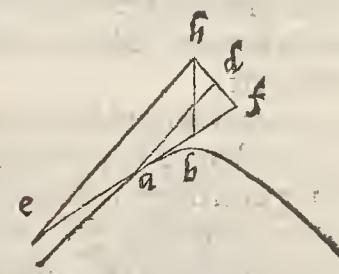
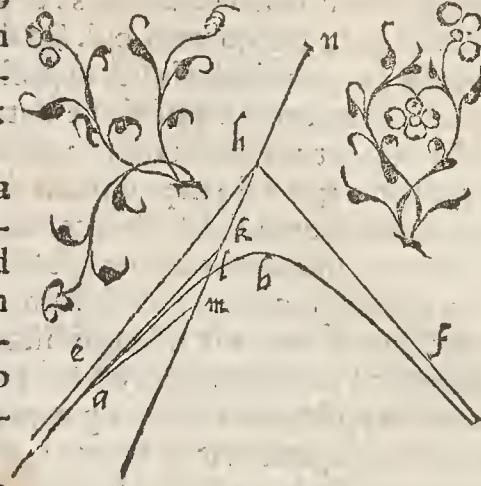
Iisdem positis sit datum punctum k in loco, qui deinceps est angulo sectionem continentis: & oporteat ab ipso k lineam ducere, quæ contingat sectionem. Itaque factum iam sit: & sit linea k a: iunctaq; k h producatur. erit ea positione data. si igitur in sectione sumatur punctum c, &

per c ducatur c d ipsi k h æquidistans: erit c d data positione. at si c d bifariam secetur in e; iunctaq; h e producatur; & positione data erit, diameter scilicet ipsi k h coniugata. ponatur h g æqualis b h: & per a ducatur a l æquidistans b g. Quoniam igitur k l, b g coniugata diametri sunt, & a k sectionem contingit: ipsiq; b g æquidistans

R ducta est a l: erit rectangulum K h l æquale quartæ partis figuræ, quæ ad b g constituitur. quare & ipsum datum erit. est autem K h data. ergo & h l. sed & positione. estq; datum punctum h. ergo & l. & cum per l ducta sit l a æquidistans b g positione data, ipsa quoque positione dabitur. At sectio etiam datur positione. quare & a punctum. sed & k. ergo linea a k positione data erit.

Componetur autem sic. ponantur alia eadem: sitq; datum punctum k in loco, quæ diximus: & iuncta k h producatur. sumpto autem in sectione puncto c, ducatur c d ipsi k h æquidistans: & c d bifariam in e secetur: iunctaq; e h producatur: & ipsi b h ponatur æqualis h g. ergo g b transuersa diameter est, ipsi k l h coniugata. deinde ponatur quartæ partis figuræ, quæ est ad b g, æquale rectangulum k l h: perq; l ipsi b g

S æquidistans ducatur l a: & k a iungatur. linea igitur k a sectionem contingit per conversionem trigesimi octauis theorematis primi libri. At si in loco inter f h p interie-



cto

cto aliquod punctum detur, quod propositum est, fieri non potest. linea enim contingens secabit g h. quare & utriusque ipsarum f h, h p occurret; quod est absurdum, ex ijs, quæ in 31. theoremate primi libri, & in tertio huius demonstrata sunt.

Iisdem positis sit sectio data ellipsis: datum uero punctum in sectione a. & oporteat ab ipso a ducere lineam, quæ sectionem contingat. Itaque ponatur factum esse: sitq; linea contingens a g: & ab a ad b c axem ordinatim applicetur a d. erit punctum d datum: & ut c d ad d b, ita erit c g ad g b. sed proportio c d ad d b est data. ergo & 36. primi
huius. proportio c g ad g b data erit: & idcirco punctum g. sed & a. quare & a g erit positione data.

Componetur autem hoc pacto. ducatur perpendicularis a d: & c g ad g b proportio eadem sit, quæ proportio c d ad d b: iungaturq; a g. constat igitur a g sectionem contingere, quemadmodum & in hyperbola. 34. primi
huius.

Sit rursus datum punctum k, à quo oporteat contingentem lineam ducere. Ita que factum iam sit: & sit linea k a: ductaq; k l h ad h centrum producatur in n. erit ea positione data. quod si a m ordinatim applicetur, erit ut n k ad k l, ita n m ad m l. proportio autem n k ad k l est data. ergo & data proportio n m ad m l. quare & punctum m: & applicata est m a; æquidistat enim lineæ in l contingenti. ergo m a positione dabitur: & idcirco punctū a. sed & ipsum K est datum. linea igitur k a positione data erit.

Compositio autem eadem est, quæ supra.

F E D . C O M M A N D I N V S

Quæ positione data erit.] Ex 30. propositione libri Datorum Euclidis.

Et erit b e æqualis b d.] Ex 35. primi huius.

Ergo & punctum e.] Ex 27. libri Datorum.

Linea igitur a e positione data erit.] Ex 26. eiusdem.

Lineam igitur a e sectionem contingere manifesto constat.] Ex 33. primi huius.

Ergo b e est æqualis b d.] Ex 35. eiusdem.

Ergo & d datum.] Ex 27. libri Datorum.

Quod cum d a perpendicularis sit, & positione data erit.] Ex 29. eiusdem.

Sed & illud constat, si datum punctum sit idem quod b.] Ex 17. primi huius.

Ergo c f positione data erit.] Ex 28. libri Datorum.

Erit ut c d ad d b, ita c g ad g l.] Ex 36. primi huius.

Et est data b c. quare & g datum.] Quoniam enim linea b c data in datam proportionem dividitur, erunt & c g, g b datae ex septima libri Datorum, & est datum punctum c. ergo & g erit datum ex 27. eiusdem.

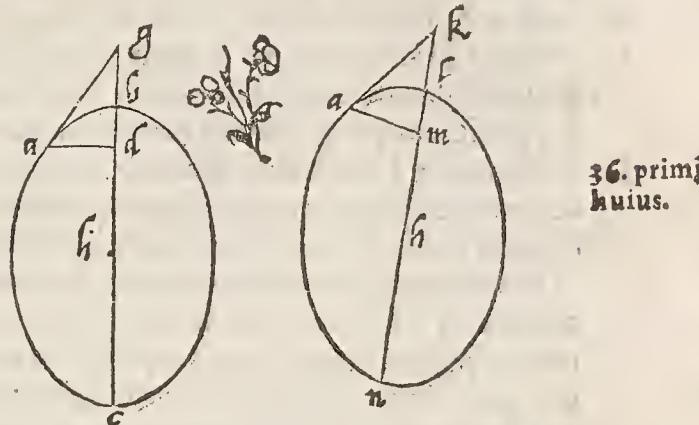
Patet igitur lineam a g contingere sectionem.] Ex 34. primi huius.

Erit h d æqualis d f, quoniam & f a ipse a e est æqualis.] Nam cum f a sit æqualis a e ex tertia huius, & f d ipse d h æqualis erit, ex secunda sexti elementorum.

Quare ex ijs, quæ demonstrata sunt, linea f a sectionem contingit.] Ex 9. huius.

Erit rectangulum k h l æquale quartæ parti figuræ, quæ ad b g constituitur.] Est enim ex 38. primi huius, rectangulum k h l æquale quadrato, quod fit ex dimidia secundæ diametri, hoc est æquale quartæ parti figuræ ad b g constitutæ; quoniam secunda diameter medianam proportionem obtinet inter figuræ latera, ex diffinitione secundæ diametri.

Linea igitur k a sectionem contingit per conuerzionem trigesimi octauij theorematis.] Hunc locum nos restituisimus, etenim in græco exemplari numerus theorematis deerat, si de eius demonstrationem in commentarijs, quæ nos in 38. primi huius conscripsimus.



A
B
C
D
E
F
G
H
K
L
M
N

O
P

Q
R

S

APOLLONII PERGAEI
PROBLEMA VII. PROPOSITIO L.

Data sectione coni, lineam contingentem ducere, quæ cum axe ad partes sectionis angulum faciat, dato angulo acuto æqualem.

Sit coni sectio primum parabole, cuius axis $a b$. Itaque oportet lineam ducere, quæ sectionem contingentat, & cum $a b$ faciat angulum ad partes sectionis, dato angulo acuto æqualem. ponatur factum esse: & sit linea $c d$. datus igitur est $b d c$ angulus. ducatur perpendicularis $b c$. est autem angu-

- A lus, qui ad b datus. quare data est proportio $d b$ ad $b c$. sed $d b$ ad $b a$ proportio est data. proportio igitur $a b$ ad $b c$ data erit.
- B & datus angulus, qui ad b . ergo & $b a c$ an-
- C gulus est datus. & est ad lineam $b a$, quæ da-
- D tur positione; & ad datum punctum a . li-
- E nea igitur $c a$ positione dabitur. at sectio data est positione. ergo pūctum c datum;
- F & linea $c d$ sectionem contingit. quare & positione data erit.

Componetur autem problema hoc modo. sit data coni sectio primum parabole, cuius axis $a b$: datus autem angulus acutus, qui lineis $e f$ continetur: sumptoq; in linea $e f$ punto e , ducatur perpendicularis $e g$: & $f g$ in h bifariam secetur: & iungatur $h e$. deinde angulo $g h e$ æqualis constituitur angulus $b a c$: & ducta perpendiculari $b c$, linea $b a$ ponatur æqualis $a d$: & $c d$ iungatur. ergo linea $c d$ sectionem contingit. Dico angulum $c d b$ angulo $e f g$ æqualem esse. Quoniam enim est ut $f g$ ad $g h$, ita $d b$ ad $b a$: & ut $h g$ ad $g e$, ita $a b$ ad $b c$: erit ex æquali ut $f g$ ad $g e$, ita $d b$ ad $b c$. sed anguli, qui ad $g b$ recti sunt. angulus igitur f angulo d est æqualis.

- G E Sit sectio hyperbole: ponaturq; iam factum esse, & linea $c d$ sectionem contingat. sumpto autem χ sectionis centro, iungatur $c \chi$: & $c e$ perpendicularis ducatur. ergo data est proportio rectanguli $\chi e d$ ad quadratum $e c$: eadem enim est, quæ trans-
- H uersi lateris ad rectum. proportio autem quadrati $c e$ ad quadratum $e d$ est data: quod datus sit uterque an-
- I gularum $c d e$, $d e c$. quare & rectanguli $\chi e d$ ad qua-
- J dratum $e d$ proportio data erit. & idcirco proportio
- K χe ad $e d$. sed angulus qui ad e est datus. ergo & qui ad χ . & ad lineam χe positione datam, & ad datum pun-
- L ctum χ ducta est χc in dato angulo. ergo & χc posi-
- M tione dabitur. data est autem & ipsa sectio positione. qua-
- N re & c pūctum: & ducta est $c d$ contingens. linea igitur $c d$ positione erit data. Ita-
- O que ducatur $f \chi$ sectionis asymptotos. ergo $c d$ producta asymptoto occurret. occur-
- P rat in f . erit $f d e$ angulus angulo $f \chi d$ maior: & propterea in compositione proble-
- Q matis oportebit datum angulum acutum maiorem esse, quam sit dimidius eius, quem asymptoti continent.

Componetur autem problema hoc modo. Sit data hyperbole, cuius axis quidem $a b$, asymptotos autem χf : & da-

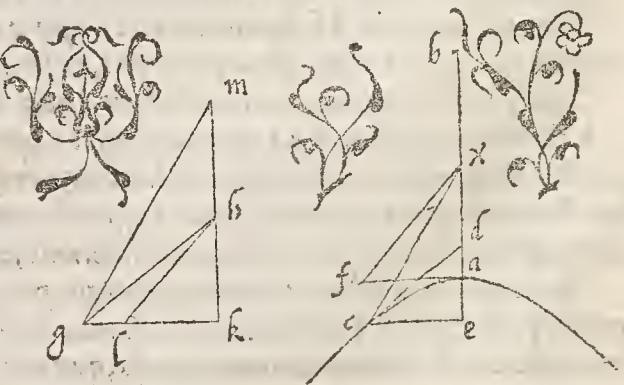
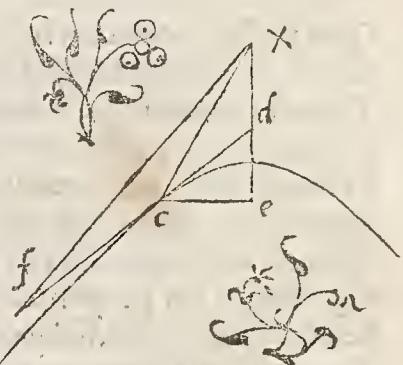
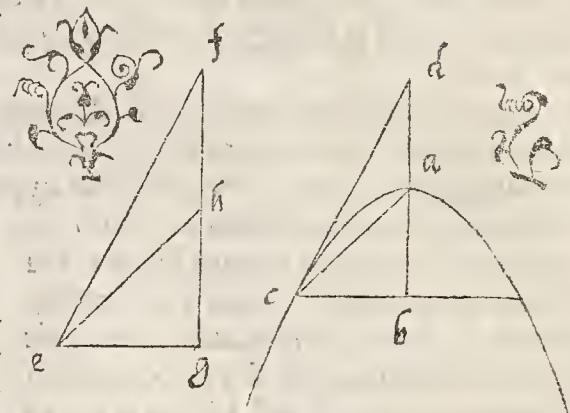
tu

s angulus acutus $k h g$, qui sit maior angulo $a \chi f$; sitq; angulo $a \chi f$ æqualis angulus $k h l$: & a punto a ad rectos an-

gulos ipsi $a b$ ducatur $a f$: in linea uero $g h$ sumatur aliquod punctum g , à quo ad $h k$ perpendicularis ducatur $g k$. Quo-

niam igitur angulus $f \chi a$ angulo $l h k$ est

O æqualis; & anguli ad $a \chi$ recti sunt: erit



ut

ut χa ad $a f$, ita $h k$ ad $k l$: & $h k$ ad $k l$ maiorem proportionem habet, quam ad $k g$. ergo & χa ad $a f$ maiorem proportionem habet, quam $h k$ ad $k g$: & idcirco quadratum χa ad $a f$ quadratum maiorem habet, quam quadratum $h k$ ad quadratum $k g$. Ut autem quadratum χa ad quadratum $a f$, ita transuersum figuræ latus ad rectum. quare transuersum figuræ latus ad rectum maiorem proportionem habet, quam quadratum $h k$ ad quadratum $k g$. si igitur fiat ut quadratum χa ad quadratum $a f$, ita aliud quoddam ad quadratum $K g$; erit illud quadrato $h k$ maius. sit rectangulum $m k h$: & iungatur $g m$. Itaque quoniam quadratum $m k$ maius est rectangulo $m k h$, habebit quadratum $m K$ ad quadratum $K g$ maiorem proportionem, quam rectangulum $m k h$, ad idem $k g$ quadratum, hoc est maiorem, quam quadratum χa ad quadratum $a f$. Quod si rursus fiat, ut quadratum $m k$ ad quadratum $k g$, sic quadratum χa ad aliud quoddam: erit id minus quadrato $a f$: & recta linea, quæ a χ ad sumptum punctum ducitur, triangula similia efficiet: ac propterea angulus $f \chi a$ angulo $g m k$ erit maior. ponatur angulo $g m k$ æqualis angulus $a \chi c$. ergo χc sectionem secat. secet in c : & a c ducatur $c d$ sectionem contingens: & $c e$ perpendicularis. triangulum igitur $c \chi e$ simile est triangulo $g m k$. quare ut quadratum χe ad quadratum $e c$, ita quadratum $m k$ ad quadratum $K g$. est autem ut transuersum figuræ latus ad rectum, ita rectangulum $\chi e d$ ad quadratum $e c$: & rectangulum $m k h$ ad quadratum $k g$: & conuertendo, ut quadratum $c e$ ad rectangulum $\chi e d$, ita quadratum $k g$ ad rectangulum $m k h$. ex æquali igitur ut quadratum χe ad rectangulum $\chi e d$, ita quadratum $m k$ ad rectangulum $m k h$: proptereaq; ut χe ad $e d$, ita $m k$ ad $k h$. Sed ut $c e$ ad $e \chi$, ita erat $g k$ ad $k m$. quare rursus ex æquali ut $c e$ ad $e d$, ita $g K$ ad $k h$: & sunt anguli, qui ad $e k$ recti. angulus igitur ad d angulo $g h k$ est æqualis.

8. quint.

P

8. quint.

Q

R

S

4. & 11. se-

xti.

T

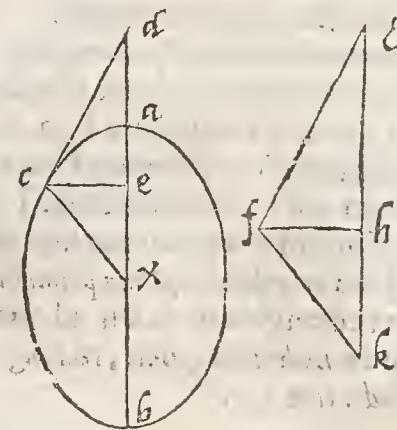
V

6. sexti

37. 1. hu-

ius.

8. datorū

41. dato-
rum.

Sit sectio ellipsis, cuius axis $a b$: & oporteat lineam ducere, quæ sectionem continat; & cum axe ad partes sectionis faciat angulum dato angulo acuto æqualem. Itaque factum sit: & sit linea $c d$. ergo angulus $c d a$ est datus: & ducatur perpendicularis $c e$. proportio igitur quadrati $d e$ ad quadratum $e c$ data est. Sit sectionis centrum χ : & iungatur $c \chi$. erit proportio quadrati $c e$ ad rectangulum $d e \chi$ data: eadem enim est, quæ proportio recti lateris ad transuersum. ergo dabitur proportio quadrati $d e$ ad rectangulum $d e \chi$: & idcirco proportio $d e$ ad $e \chi$. proportio autem $d e$ ad $e c$ est data. data igitur & proportio $c e$ ad $e \chi$. sed angulus, qui ad e rectus est. ergo datus angulus ad χ , qui quidem est ad lineam positione datum, & ad datum punctum. quare datum erit punctum c : & linea $c d$ à dato punto ducitur, & sectionem contingit. ergo positione data erit.

Componetur autem problema hoc modo. sit datus angulus acutus $f g h$: sumaturq; in linea $f g$ punctum f . & $f h$ perpendicularis ducatur. deinde fiat ut rectum latus ad transuersum, ita quadratum $f h$ ad rectangulum $g h k$. & iungatur $k f$. sit autem sectionis centrum χ : & angulo $h k f$ æqualis angulus constituatur $a \chi c$: & ducatur $c d$, sectionem contingens. Dico lineam $c d$ facere illud, quod proponebatur; uidelicet angulum $c d e$ angulo $f g h$ æqualem esse. Quoniam enim ut χe ad $e c$, ita $x h$ ad $h f$; erit ut quadratum χe ad quadratum $e c$, ita $k h$ quadratum ad ipsum $h f$. est autem & ut quadratum $c e$ ad rectangulum $d e \chi$, ita quadratum $f h$ ad rectangulum $g h k$: utraque enim proportio eadem est, quæ recti lateris ad transuersum. quare ex æquali ut quadratum χe ad rectangulum $\chi e d$, ita quadratum $k h$ ad rectangulum $k h g$. ergo ut linea χe ad $e d$, ita est $k h$ ad $h g$. estq; ut χe ad $e c$, ita $k h$ ad $h f$. ex æquali igitur ut $d e$ ad $e c$, ita $g h$ ad $h f$. quod cum circa rectos angulos latera proportionalia sint, angulus $c d e$ angulo $f g h$ est æqualis. linea igitur $c d$ facit illud, quod propositum fuerat.

6. sexti

A P O L L O N I I P E R G A E I

F E D . C O M M A N D I N V S .

- A** QVARE data est proportio db ad bc .] Cum enim anguli cdb , dbc dati sint, erit & bcd reliquias ex duobus rectis datus. quare ex quadragesima propositione libri datorum Euclidis, triangulum dcb dabitur specie: & propterea laterum ipsius proportio data erit.
- B** Proportio igitur ab ad bc data erit.] Ex octaua propositione libri datorum, utraque enim ipsarum ab , bc ad eandem db proportionem habet datam.
- C** Et datus angulus, qui ad b . ergo & ba c angulus est datus.] Ex quadragesima prima eiusdem libri, datur namque triangulum abc specie. ergo & reliqui ipsius anguli dabuntur.
- D** Linea igitur ca positione dabitur.] Ex uigesima nona eiusdem libri.
- E** Angulus igitur f angulo d est æqualis.] Ex sexta sexti elementorum.
- F** Proportio igitur quadrati ce ad quadratum ed est data, quod datus sit uterque angulorum cde , dec .] Datus est enim angulus cde , itemq; dec , qui est rectus. ergo & reliquis ecd ; & triangulum $dc e$ specie dabitur, ex quadragesima propositione datorum. data est igitur proportio lateris ce ad ed : & idcirco ex quinquagesima eiusdem, quadrati ce ad quadratum ed proportio data sit necesse est.
- G** Quare & rectangle χe ad ed ad quadratum ed proportio data erit.] Ex octaua eiusdem, data est enim utriusque proportio ad quadratum ec .
- H** Et idcirco proportio χe ad ed .] Eadem namque est, quæ rectangle χe ad quadratum ed , ex prima sexti elementorum, uel ex lemmate in 22. decimi.
- K** Sed angulus, qui ad e est datus, ergo & qui ad χ .] Quoniam enim proportio χe ad ed est data: & data proportio ce ad ed , ex ijs, quæ supra dicta sunt: erit ex octaua datorum χe ad ec proportio quoque data: & est datus angulus ad e rectus. ergo triangulum χec specie datur, ex quadragesima prima eiusdem, & propterea reliqui ipsius anguli dati erunt.
- L** Ergo & χc positione dabitur.] Ex uigesima nona eiusdem.
- M** Ergo cd producta asymptoto occurret.] Ex tertia huius.
- N** Erit fd e angulus angulo $f\chi d$ maior.] Ex decima sexta primi elementorum.
- O** Erit ut χa ad $a f$, ita $h K$ ad $K l$.] Ex quarta sexti, sequitur enim ex iam dictis triangulum $f\chi a$ triangulo $g b k$ simile esse.
- P** Ut autem quadratum χa ad quadratum af , ita transuersum figuræ latus ad rectum.] Ex demonstratis in prima huius.
- Q** Itaque quoniam quadratum mk maius est rectangle mkh .] Nam ex prima secundi quadratum mk æquale est rectangle mkh , & rectangle kmh .
- R** Et propterea angulus $f\chi a$ angulo gmk maior erit.] Hoc etiam ex sexto lemmate Pappi manifestò constare potest: cum mk ad kg maiorem habeat proportionem, quam χa ad $a f$.
- S** Ergo χc sectionem secat.] Ex secunda huius.
- T** Est autem & ut transuersum latus ad rectum, ita rectangle χed ad quadratum ec .] Ex trigesima septima primi huius.
- V** Et rectangle mkh ad quadratum kg .] Ex ijs, quæ superius ostensa sunt. quare sequitur ex undecima quinti, rectangle χed ad quadratum ec ita esse, ut rectangle mkh ad quadratum kg .

P R O B L E M A V I I I . P R O P O S I T I O L I .

D A T A sectione coni, lineam contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum, dato angulo acuto æqualem.

Sit data coni sectio primum parbole, cuius axis ab : & datus angulus h . Itaque oportet ducere lineam, quæ parabolam contingat; & cum diametro, quæ per tactum ducitur, contineat angulum æqualem dato angulo h . factum iam sit: & linea contingens sit cd , quæ quidem cum diametro ec per tactum ducta faciat angulum ecd , angulo

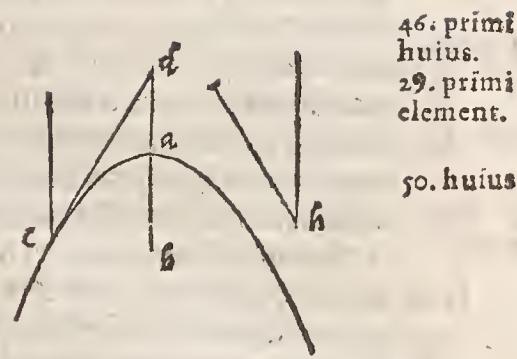
gulo h æqualem: & axi in punto d occurrat. Quoniam igitur ad æquidistat e c, angulus ad c angulo e c d est æqualis: & datus est angulus e c d; est enim æqualis angulo h. ergo & ad c angulus datus erit.

Componetur autem hoc modo. Sit parabole, cuius axis ab: & datus angulus h. Ducatur linea cd sectionem contingens, quæ cum axe faciat angulum cda æqualem angulo h: & per c ducatur ec ipsi ab æquidistans. Itaque quoniam angulus h angulo ad c est æqualis: angulus autem ad c est æqualis angulo ecd: & h angulus angulo ecd æqualis erit.

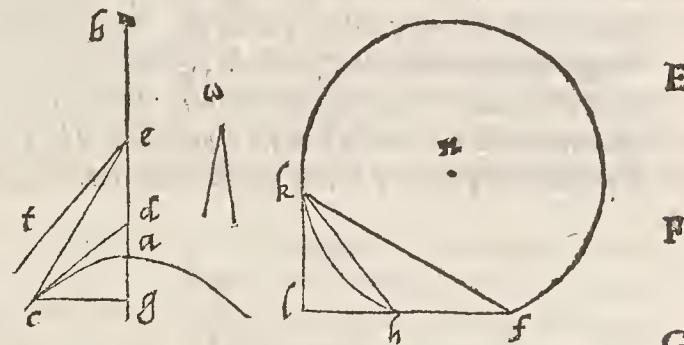
Sit sectio hyperbole, cuius axis ab, centrum e, & asymptotos et: datus autem angulus acutus sit ω: & linea cd sectionem contingat: iungaturq; ce faciens illud, quod propositum est: & cg perpendicularis ducatur. Itaque proportio transuersi lateris ad rectum data est: quare & data proportio rectanguli egd ad quadratum cg. exponatur recta linea data fh: & in ipsa circuli portio describatur, suscipiens angulum æqualem angulo ω: quæ quidem portio semicirculo maior erit: & ab aliquo pun-

to eorum, quæ sunt in circumferentia, uidelicet à punto k ducatur perpendicularis kl, faciens proportionem rectanguli flh ad quadratum lk eandem, quæ est transuersi lateris ad rectum: & iungantur fk, K h. quoniam igitur angulus fk h est æqualis angulo ecd: est autem ut transuersum latus ad rectum, ita & rectangulum egd ad quadratum cg: & rectangulum flh ad quadratum lk: erit triangulum lkf triangulo ceg simile:

& triangulum fhk simile triangulo edc. quare angulus kfh angulo ced est æqualis. Componetur autem hoc modo. sit data hyperbole ac, cuius axis ab, centrum e; & asymptotos et. datus autem angulus acutus sit ω: & data proportio transuersi lateris ad rectum sit eadem, quæ lineæ ϕχ ad χu: & ϕu in y bifariam secetur. deinde exponatur data recta linea fh: & in ipsa circuli portio maior semicirculo describatur, quæ suscipiat angulum æqualem angulo ω: sitq; fk h. sumatur autem circuli centrum n; à quo ad fh perpendicularis ducatur no: & no secetur in p, ita ut np ad po eandem habeat proportionem, quam yu ad ux: & per p ipsi fh æquidistans ducatur px: & à k ad fh productam perpendicularis Kl ducatur. deinde iungantur fk, K h: producaturq; lk ad ni: & ab n ad km ducatur nx perpendicularis. æquidistat igitur nx ipsi fh: proptereaq; ut np ad po, hoc est yu ad ux, ita xk ad kl: & antecedentium dupla, ut ϕu ad ux, ita m k ad kl: componendoq; ut ϕχ ad χu, ita ml ad lk. sed ut ml ad lk, ita rectangulum mlk ad quadratum lk. Ut igitur ϕχ ad χu, ita rectangulum mlk ad quadratum lk: hoc est rectangulum flh ad lk quadratum: ut autem ϕχ ad χu, ita transuersum latus ad rectum. ergo ut rectangulum flh ad quadratum lk, ita transuersum latus ad rectum. ducatur à punto a linea at ad rectos angulos ipsi ab. & quoniam ut quadratum ea ad quadratum at, ita est transuersum latus ad rectum: & ut transuersum latus

46. primi
huius.29. primi
element.

50. huius



E

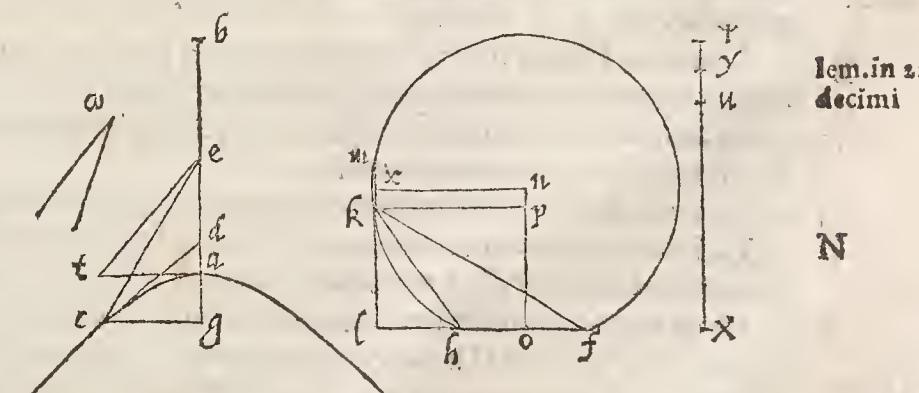
F

G

H

K

33. tertii,

28. primi
L MIem. in 22
decimi

N

O

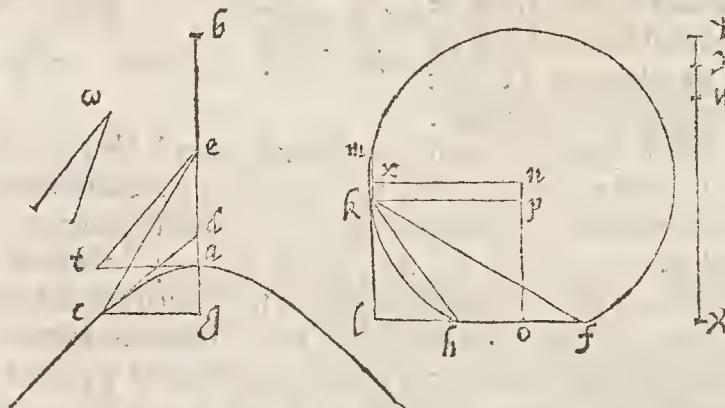
ducatur à punto a linea at ad rectos angulos ipsi ab. & quoniam ut quadratum ea ad quadratum at, ita est transuersum latus ad rectum: & ut transuersum latus

A P O L L O N I I P E R G A E I

- ad rectum**, ita rectangulum flh ad quadratum lk : quadratum autem fl ad lk quadratum maiorem proportionem habet, quam rectangulum flh ad quadratum lk : habebit quadratum fl ad quadratum lk maiorem proportionem, quam quadratum ea ad quadratum at. & sunt anguli ad al recti: angulus igitur f angulo e minor erit.
- Q** Itaque constituatur angulus aec aequalis angulo lfk . ergo linea $e c$ sectioni occurret. occurrat in punto c : & à c ducatur cd contingens sectionem; & cg perpendicularis. erit ut transuersum latus ad rectum, ita rectangulum egd ad quadratum cg . Ut igitur rectangulum flh ad quadratum lk , ita rectangulum egd ad quadratum cg : ideoq; triangulum Kfl triangulo ceg est simile: & triangulum KhI simile triangulo cdg : & kfh ipsi ced . quare ecd angulus angulo $fk h$, hoc est ipsi ω est aequalis. si uero transuersi lateris ad rectum proportio sit aequalis ad aequale; linea kI circum fkh continget: & à centro ad k ducta aequidistans erit fh ; & ipsa problema efficiet.

F E D. C O M M A N D I N V S.

- A** ITAQYE proportio transuersi lateris ad rectum data est.] Quoniam enim positione data est et asymptotos, si à punto a ducatur ad rectos angulos ipsi $a e$ linea at , quæ asymptoto in t occurrat; erit at data: & data proportio a ad at . quare & proportio quadrati a ad quadratum at ; hæc autem eadem est, quæ transuersi lateris ad rectum, ex demonstratis in prima huius: quanquam data hyperbola, & latere eius transuerso, statim transuersi lateris ad rectum proportio data erit absque asymptotis: sunt enim asymptoti recto latere quodammodo posteriores. Sit hyperbole ca , cuius transuersum latus ab : & sumpto in sectione quovis punto c , ducatur ad b & ordinatim linea cg . erit cg data: & data ag , & gb . quoniam igitur datæ sunt bg , ga , &



Iem in 12 decimi earum proportio dabitur, hoc est proportio rectanguli $bg a$ ad quadratum ga : estq; data cg . ergo & data proportio ag ad gc . & idcirco quadrati ag ad quadratum gc . proportio igitur rectanguli $bg a$ ad quadratum cg data erit, quæ est transuersi lateris ad rectum, ex uigesima prima primi huius.

B Quare & data proportio rectanguli egd ad quadratum cg .] Eadem enim est, quæ transuersi lateris ad rectum, ex trigesima septima primi huius.

C Et in ipsa circuli portio describatur, suscipiens angulum aequalem angulo a .] Ex trigesima tertia tertij elementorum.

D Quæ quidem portio semicirculo maior erit.] Ex trigesima prima eiusdem tertij.

E Faciens proportionem rectanguli flh ad quadratum lk eandem, quæ est transuersi lateris ad rectum.] Quomodo hoc fiat, mox apparebit, in problematis compositione.

F Est autem ut transuersum latus ad rectum, ita & rectangulum egd ad quadratum cg : & rectangulum flh ad quadratum lk .] Quare ex undecima quinti sequitur rectangulum flh ad quadratum lk ita esse, ut rectangulum egd ad quadratum gc . proportio autem rectanguli flh ad quadratum lk componitur ex proportione fl ad lk , & proportione hl ad lk : & proportio rectanguli egd ad quadratum gc componitur ex proportione eg ad gc , & dg ad gc . ergo proportio composita ex proportionibus fl ad lk , & hl ad lk eadem est, quæ componitur

ponitur ex proportionibus eg ad gc, & dg ad gc.

Erit triangulum k fl triangulo c eg simile: & triangulum f h K simile triangulo G edc.] Est enim fl ad lk, ut eg ad gc: quod postea demonstrabimus. Cum igitur circa aequales angulos lg latera proportionalia sint: triangulum fl K simile erit triangulo eg c. quare angulus ad f angulo ad c est aequalis: & angulus f K l angulo e c g. erat autem & f K h angulus aequalis angulo e c d. ergo & reliquus h K l reliquo dc g aequalis: & triangulum K fh simile triangulo c ed. Itemq; triangulum h k l triangulo dc g.

At uero fl ad lk ita esse, ut eg ad gc, hoc modo demonstrabimus. si enim fieri potest, sit proportio fl ad lk maior, quam eg ad gc: erit hl ad lk proportio minor, quam dg ad gc, quoniam proportio composita ex proportionibus fl ad lk, & hl ad lk eadem est, quae componitur ex proportionibus eg ad gc, & dg ad gc: quod supra ostensum est. Itaque fiat ut eg ad gc, ita ml ad lk. erit ml minor, quam fl. Rursus fiat ut hl ad lk, ita og ad gc. eadem ratione minor erit og, quam dg. Quoniam igitur ml ad lk eadem habet proportionem, quam eg ad gc: & sunt anguli ad lg recti inter se aequales: triangulum ml k triangulo eg c simile erit. rursus quoniam og ad gc eadem proportionem habet, quam hl ad lk, erit & triangulum og c simile ipsi hl k. angulus igitur eg aequalis est angulo m K l: & angulus og c aequalis angulo hl k. ergo reliquo eo reliquo m k h aequalis erit. quod fieri non potest: ponebatur enim angulus e c d aequalis angulo f x h: & est angulus e c d maior angulo e c d. quare multo maior est angulo m K h. idem sequetur absurdum, si proportio fl ad lk ponatur minor, quam eg ad gc. ex quibus constat fl ad lk eadem habere proportionem, quam eg ad gc.

Quare angulus k fl angulo c ed est aequalis.] Hunc locum nos ita eorrexiimus, in græco enim exemplari legebatur. οτε οτινον ζωνια, τοντοτινων εγδ, hoc est, quare angulus f x h, videlicet angulus w angulo c ed est aequalis, & mendose, ut opinor. concluderet enim, quod antea posuerat: esset q; eadem conclusio in resolutione, & compositione problematis, quod est absurdum.

Et asymptotos et.] Hæc nos addidimus, quæ in græco exemplari non erant: sed tamen desiderari uidebantur.

Proptereaq; ut np ad po, hoc est du ad ux, ita xk ad kl.] Quoniam enim nx, p K L aequaliter distat ipsi fh, & inter se aequaliter distabunt: aequaliter autem & no, xl. quod utraque ad fh sit perpendicularis. quare np k x, po lk parallelogramma sunt. & ideo xk est aequalis np, & kl ipsi po.

Et antecedentium dupla, ut du ad ux, ita mk ad kl.] Nam cum sit ut yu ad ux, ita xk ad Kl: ut autem du ad yu, ita mk ad xk, est enim & m K ipsius xk dupla, quoniam nx perpendicularis ad m K, ipsam bifariam diuidit, per tertiam propositionem tertij libri elementorum: erit ex aequali ut du ad ux, ita mk ad Kl.

Hoc est rectangulum flh ad lk quadratum.] Rectangulum enim flh est aequaliter re- Etangulo mlk, quod utrumque sit aequaliter quadrato eius lineæ, quæ ab l ducta circulum contin- git, ex 36. tertij elementorum.

Ducatur à punto a linea at ad rectos angulos ipsi a b.] Linea at in punto a sectionem contingit, & asymptoto occurrit in t. ergo quadratum ea ad quadratum at eam proportionem habet, quam transuersum latus ad rectum, ex ijs, quæ in prima huius demonstrantur.

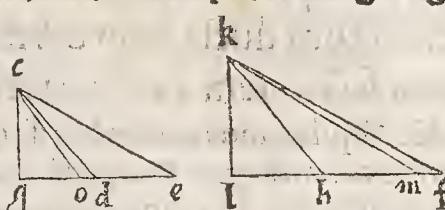
Habebit quadratum fl ad quadratum lk maiorem proportionem, quam quadratum ea ad quadratum at: & sunt anguli al recti. angulus igitur f angulo e minor erit.] Quoniam enim quadratum fl ad quadratum lk maiorem proportionem habet, quam quadratum ea ad quadratum at, habebit linea fl ad lk maiorem proportionem, quam ea ad at. quare ex sexto lemmate Pappi angulus f angulo e minor erit.

Ergo linea ec sectioni occurret.] Ex secundi huius.

Ideoq; triangulum k fl triangulo c eg est simile.] Nam angulus c eg factus est aequalis angulo f: & angulus g rectus aequalis est recto l. ergo & reliquus reliquo aequalis erit: & triangulum k fl triangulo c eg simile.

Et triangulum khl simile triangulo cdg: & xfh ipsi c ed.] Constat hoc ex septimo

R



s. quin

H

M

N

O

P

Q

R

S

A P O L L O N I I P E R G A E I

lemmate Pappi.

T Si uero transuersi lateris proportio sit æqualis ad æquale.] Hoc est si transuersum latus sit æquale recto.

V Linea Kl circulum f k h continget: & à centro ad k ducta æquidistans erit f h.] Si enim à centro n ad circumferentiam circuli ducatur linea nk, quæ ipsi fh æquidistet: & à k ad fh productam demittatur perpendicularis kl; linea kl circulum continget ex 16. propositione tertij elementorum, quoniam & ad ipsam nk est perpendicularis.

THEOREMA XLIVI. PROPOSITIO LII.

S i ellipsem recta linea contingat, angulus, quem facit cum diametro per tactum ducta, non est minor angulo deinceps ei, qui lineis ad medianam sectionem inclinatis continetur.

Sit ellipsis, cuius axes ab, cd, centrum e: & sit axium maior ab: linea uero g fl sectionem contingat: & iunctis ac, cb, fe, producatur bc ad l.

Dico angulum lfe non esse minorem angulo lca. linea enim fe, uel est æquidistans ipsi lb, uel non æquidistans.

Sit primum æquidistans: & est ae æqualis eb. ergo & ah ipsi hc est æqualis. Sed fe diameter est. linea igitur, quæ in fl sectionem continet, ipsi ac est æquidistans. est autem & fe æquidistans lb. quare parallelogrammum est fh cl: & idcirco angulus lfh æqualis

A est angulo lch. Quoniam igitur utraque ipsarum ae, eb est major ec, angulus acb est obtusus; ergo acutus angulus lch, &

B lfe: & propterea gfe obtusus erit. sed non sit ef æquidistans

C lb: & ducatur fk perpendicularis. non igitur angulus lb e æqualis est ipsi fe. rectus autem angulus ad e recto ad k est æqualis. ergo triangulum cb e non est simile triangulo fek: &

D ideo non est ut quadratum be ad quadratum ec, ita quadratum ek ad quadratum kf. Sed ut quadratum be ad quadratum ec, hoc est, ut rectangulum ae b ad quadratum ec, ita transuersum latus ad rectum: & rectangulum gke ad quadratum kf. ergo linea gk non est æqualis ipsi ke.

Exponatur circuli portio myn, fusci piens angulum æqualem angulo acb.

angulus autem acb est obtusus. ergo circuli portio myn est semicirculo minor. fiat igitur ut gk ad ke, ita nx ad xm: & per x ad rectos angulos ipsim. ducatur yx: & my, yn iungantur. secetur autem mn bifariam in t:

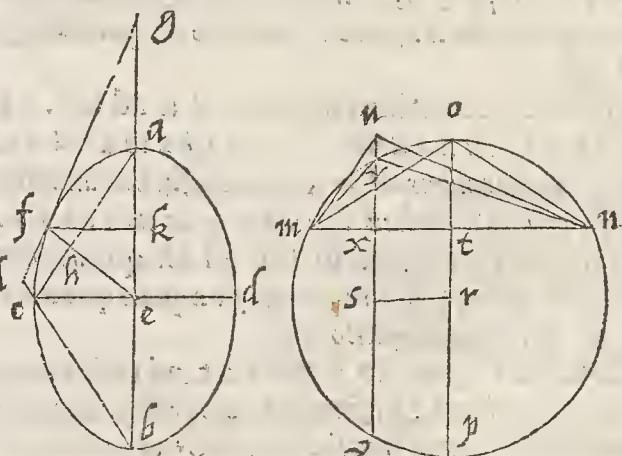
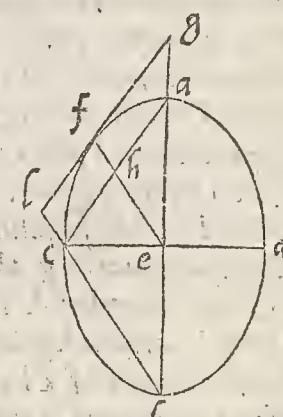
E & ad rectos angulos ducatur ot p. erit

Otp diameter. sit r circuli centrum, à quo perpendicularis ducatur rs; & iungatur m'o, on. itaq; angulus m'on est

F æqualis angulo acb: & utraque ipsarum ab, mn in punctis et bifariam secatur: suntq; anguli ad et recti. triangula igitur otn, ceb. inter se similia erunt. ergo ut quadratum nt ad quadratum to, ita quadratum be ad ec quadratum. & cum tr sit æqualis sx, & ro maior, quam sy; habebit or ad rt maiorem proportionem, quam ys ad sx. & per conuersiōnem ratio

nis ro ad ot minorem proportionem habebit, quam sy ad yx: & antecedentium dupla po ad ot minorem habebit, quam xy ad yx: diuidendoq; pt ad to minorem, quam xy ad xy. sed ut pt ad to, ita quadratum tn ad quadratum to; & quadratum be ad quadratum ec; & transuersum latus ad rectum; & rectangulum gke

G ad quadratum kf. ergo rectangulum gke ad quadratum kf minorē habet proportionem,



tionem, quām χx ad xy , hoc est quām rectangulum χxy ad quadratum xy ; hoc est rectangulum nxm ad quadratum xy . si igitur fiat, ut rectangulum gk e ad quadratum kf , ita rectangulum nxm ad aliud quoddam: erit illud maius quadrato xy . sit quadratum xu . Itaque quoniam ut gk ad ke , ita nx ad xm : & sunt kf, xu ad rectos angulos: & ut rectangulum gk e ad quadratum kf , ita rectangulum nxm ad quadratum xu : erit angulus gfe æqualis angulo num . ergo maior est angulus nym , hoc est acb angulo gfe . qui uero deinceps est, uidelicet lh est maior angulo lch . non igitur angulus lh angulo lch minor erit.

F E D. C O M M A N D I N V S.

Quoniam igitur utraque ipsarum ae, eb est maior ec ; angulus acb est obtusus.] A
Si enim ex centro e , & interuallo e a describatur circulus aqb : & producatur ec usque ad eius circumferentiam in q : iunganturq; aq, qb : erit angulus aqb rectus. quare acb est obtusus.

Ergo acutus angulus lch & lfe : & propterea gfe obtusus erit.] B Hoc idcirco dixit, ut ex duobus angulis, quos diameter cum linea contingente efficit, acutum intelligamus, non obtusum, qui est ex parte g . hæc enim omnia sequenti problemati inseruire perspicuum est.

Non igitur angulus lb e æqualis est ipsi fe a.] C Quoniam enim lineæ bl, ef non sunt æquidistantes, si producantur, conuenient inter se se: atque erit angulus fe k exterior quolibet interior & opposito maior, ex 16. primi elementorum.

Et ideo non est ut quadratum bc ad quadratum ec , ita quadratum ek ad quadratum kf .] D Græcus codex corruptus est, quem nos ita restituimus. oὐκ ἀπαίστιν ὡς τὸ ἀπόβε πρὸς τὸ ἀπόεγ, τὸ ἀπόκε, πρὸς τὸ ἀπόκε. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπόβε πρὸς τὸ ἀπόεγ τὸ ὑπὸε βεβ πρὸς τὸ ἀπόεκ, καὶ πλαγία πρὸς τὸ ὑπόεν, καὶ τὸ ὑπὸεκ επὶ πρὸς τὸ ἀπόκε. οὐκ ἀπαίστιν ἡ τὴν τὴν κε. Sed tamen ante ea uerba. οὐκ ἀπαίστιν τὸν τὴν κε, uerisimile est non nulla desiderari in hanc sententiam. non igitur est, ut rectangulum gk e ad quadratum Kf , ita quadratum eK ad quadratum kf . quare rectangulum gk e quadrato Ke non est æquale. Hæc autem magis perspicua essent. si hoc modo explicarentur. ergo triangulum cbe non est simile triangulo fe k, & ideo non est ut be ad ec , ita ek ad kf ; neque ut quadratum be ad quadratum cc , ita quadratum ek ad quadratum Kf . sed ut quadratum be ad quadratum ec , hoc est ut rectangulum ae b ad quadratum ec , ita transuersum latus ad rectum: & ut transuersum latus ad rectum, ita rectangulum gk e ad quadratum kf . non igitur ut rectangulum gk e ad quadratum kf , ita est quadratum eK ad quadratum kf . quare rectangulum gk e quadrato Ke non est æquale. ut autem rectangulum gk e ad quadratum kc , ita linea gk ad ke . ergo linea gk non est æqualis ipsi ke .

Secetur autem $m n$ bifariam in f .] E Non enim punctum x cadit in medio lineæ $m n$, quem admodum neque k in medio ge , cum ostensum sit gx non esse æqualem kc .

Itaque angulus mon est æqualis angulo acb : & utraque ipsarum ab , mn in punctis et bifariam secatur.] F Post ea uerba desiderari non nulla uidentur, cuiusmodi hæc sunt. quare angulus ton est æqualis angulo ecb : est enim angulus ton dimidius anguli mon , & ecb dimidius ipsius acb .

Et ro maior quām sy .] G Est enim linea op maior, quām yx : & ut op ad yx , ita ro di- midia op , ad sy dimidiad yx . ergo ro maior erit, quām sy .

Et antecedentium dupla po ad ot minorem habebit, quām χy ad yx .] H Fiat ut ro ad ot , ita sy ad aliam, quæ sit yz . erit yz maior quām yx . ut autem po , ad ro , ita χy ad sy . ex æquali igitur, ut po ad ot , ita χy ad yz . sed χy ad yz minorem habet proportionem, quām ad yx . ergo & po ad ot minorem proportionem habebit, quām χy ad yx .

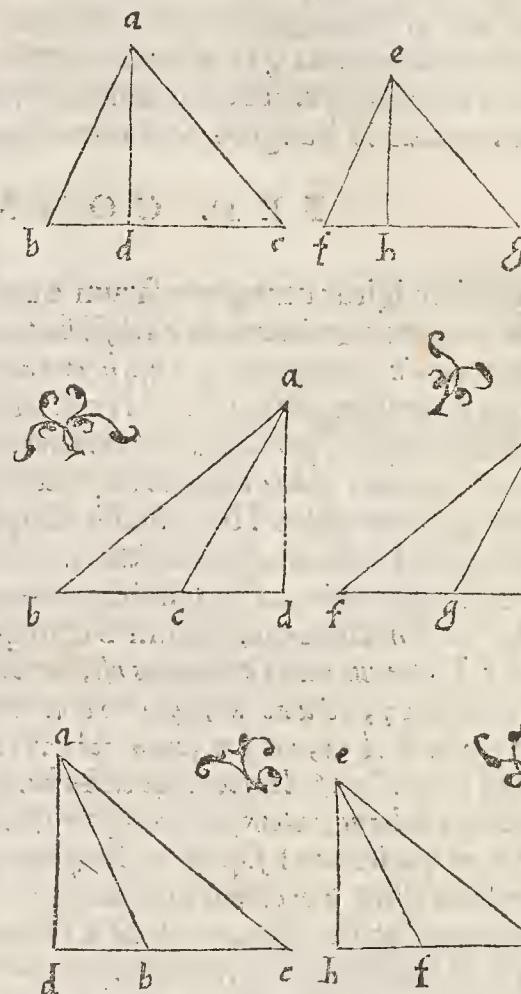
Sed ut pt ad to , ita quadratum tn ad quadratum to .] K Ex corollario uigesima sexti, sunt enim tres lineæ pt, tn, to proportionales. ut autem quadratum tn ad quadratum to , ita quadratum be ad quadratum ec ; hoc est rectangulum ae b ad quadratum ec , hoc est transuersum latus ad rectum: & ut transuersum latus ad rectum, ita rectangulum gk e ad quadratum kf . ergo ut pt ad to , ita rectangulum gk e ad quadratum kf . & propterea rectangulum gk e ad quadratum kf minorem proportionem habet, quām χx ad xy .

Itaque quoniam ut gk ad ke , ita nx ad xm : & sunt kf, xu ad rectos angulos: & ut rectangulum gk e ad quadratum kf , ita rectangulum nxm ad quadratum xu : erit

A P O L L O N I I P E R G A E I

angulus gfe æqualis angulo $n\cdot m.$] Illud uero not hoc lemmate demonstrabimus, quoniam à Pappo demonstratum esse non apparet.

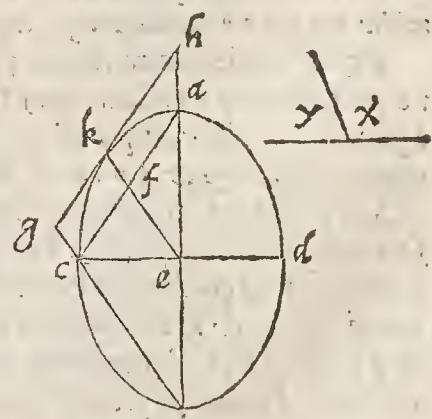
Sint trianguli abc, efg : & ductis ad, eh perpendicularibus ad bases bc, fg , sit ut bd ad dc , ita fh ad hg ; sitq; ut rectangulum bdc ad quadratum he . Dico triangulum efh triangulo abd simile esse: triangulumq; ehg simile triangulo adc , & triangulum efg triangulo abc . Quoniam re-enim est, ut bd ad dc , ita fh ad hg ; & ut iam ad dc , ita quadratum bdc ad rectangulum bhd ut autem fh ad hg , ita quadratum fh ad dc : etangulum fhg : ergo ut quadratum bdc ad rectangulum bdc , ita quadratum fh ad rectangulum fhg . sed ut rectangulum bdc ad quadratum da , ita erat rectangulum fhg ad quadratum he . ex æquali igitur ut quadratum bdc ad quadratum da , ita quadratum fh ad quadratum he . quare ut linea bd ad da , ita linea fh ad he : & eadem ratione demonstrabitur, ut linea cd ad da , ita esse lineam gh ad he . Cum igitur circa æquales angulos, uidelicet circa rectos, qui sunt ad dh , latera proportionalia sint: triangulum ehf simile erit triangulo adb ; & triangulum ehg triangulo adc . quare angulus feg angulo bac est æqualis: & est angulus efg æqualis angulo abc : & angulus efg angulo acb . ergo & triangulum efg triangulo abc simile erit. quod oportebat demonstrare.



P R O B L E M A I X . P R O P O S I T I O L I V I I .

Data ellipsi contingente lineam ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto æqualem. oportet autem acutum angulum datum non esse minorem angulo deinceps ei, qui lineis ad medium sectionem inclinatis continetur.

A Sit data ellipsis, cuius maior axis ab ; minor cd ; & centrum e : & iungantur ac, cb . datus autem angulus sit y , non minor angulo acg . quare & acb angulus non est minor angulo x . ergo angulus y uel est maior angulo acg , uel ipsi æqualis. sit primi æqualis: & per e ducatur ek ipsi bc æquidistans: & per k contingens sectionem kh . Quoniam igitur $a e$ est æqualis $e b$: & ut $a e$ ad $e b$, ita af ad fc : erit af ipsi fc æqualis: & est K ediameter. ergo quæ in k sectionem contingit, hoc est hk ; æquidistat ipsi ac , sed & ek æquidistat bg . parallelogramum igitur est $kfcg$; & ob id angulus gke angulo $gc f$ æqualis. angulus autem $gc f$ est æqualis angulo dato y . ergo & gke angulo y æquales erit. Sit deinde angulus y maior angulo acg . erit contra angulus x minor acb angulo. Exponatur circulus; & ab eo auferatur portio mnp , suscipiens angulum æqualem angulo x : & in p bifariam secta in o , & per o ducatur nor ad rectos angulos



los ipsi m p; & iungantur m n, n p. angulus igitur m n p minor est angulo a c b: anguli autem m n p dimidius est angulus m n o: & anguli a c b dimidius est a c e. ergo m n o angulus angulo a c e est minor: & qui ad e o anguli recti sunt. quare linea a e ad e c maiorem proportionem habet, quam m o ad o n: & ideo quadratum a e ad e c quadratum maiorem habet proportionem, quam quadratum m o ad quadratum o n. Sed quadratum a e æquale est rectangulo a e b: & quadratum m o æquale rectangulo m o p, hoc est ipsi n o r. ergo rectangulum a e b ad quadratum e c, hoc est transuersum latus ad rectum, maiorem proportionem habet, quam rectangulum n o r ad quadratum o n; hoc est quam linea r o ad o n. Itaque fiat ut transuersum latus ad rectum, ita $\omega\alpha$ ad $\alpha\varsigma$: & $\omega\varsigma$ bifariam secetur in ϕ . Quoniam igitur transuersum latus ad rectum maiorem proportionem habet, quam r o ad o n: & componendo $\omega\varsigma$ ad $\varsigma\alpha$ maiorem habebit, quam r n ad n o.

fit u circuli centrum. er

go $\phi\varsigma$ ad $\varsigma\alpha$ maiorem, habet proportionem, quam u n ad n o: diuidendoq; $\phi\alpha$ ad $\alpha\varsigma$ maiorem habet, quam u o ad o n. fiat ut $\phi\alpha$ ad $\alpha\varsigma$, ita u o ad minorem ipsa o n, hoc est ad o i: perq; i ducatur i x ipsi m p æquidistans: & ducatur x s t æquidistans n r, & u s æquidistans eidem m p. erit igitur ut $\phi\alpha$ ad $\alpha\varsigma$, ita u o ad o i & u s ad s x: componendoq; ut $\phi\varsigma$

ad $\varsigma\alpha$, ita u x ad x s: & antecedentium dupla, ut $\omega\varsigma$ ad $\varsigma\alpha$, ita t x ad x s: & diuidendo, ut $\omega\alpha$ ad $\alpha\varsigma$, hoc est ut transuersum latus ad rectum, ita t s ad s x. iungantur m x x p: & ad lineam a e, & ad e punctum constituatur angulus a e K æqualis angulo m p x: & per k ducatur K h sectionem contingens, & k l ordinatim applicetur. Itaque quoniam angulus m p x æqualis est angulo a e k: & rectus angulus, qui ad s, est æqualis recto, qui ad l. erit triangulum x s p simile triangulo k l e; & ut transuersum latus ad rectum, ita est t s ad s x, hoc est rectangulum t s x ad quadratum x s, hoc est rectangulum m s p ad quadratum x s. simile igitur est triangulum h l k triangulo m s x; & triangulum h k e simile ipsi m x p: & propterea angulus m x p est æqualis angulo h k e: est autem m x p angulus æqualis angulo m n p, hoc est angulo χ . quare & h k e angulus angulo χ est æqualis. angulus igitur deinceps g k e ei, qui deinceps est angulo y, æqualis erit. ergo ducta est linea g h sectionem contingens, quæ cum diametro k e per tactum ducta facit g k e angulum dato angulo y æqualem. quod fecisse oportebat.

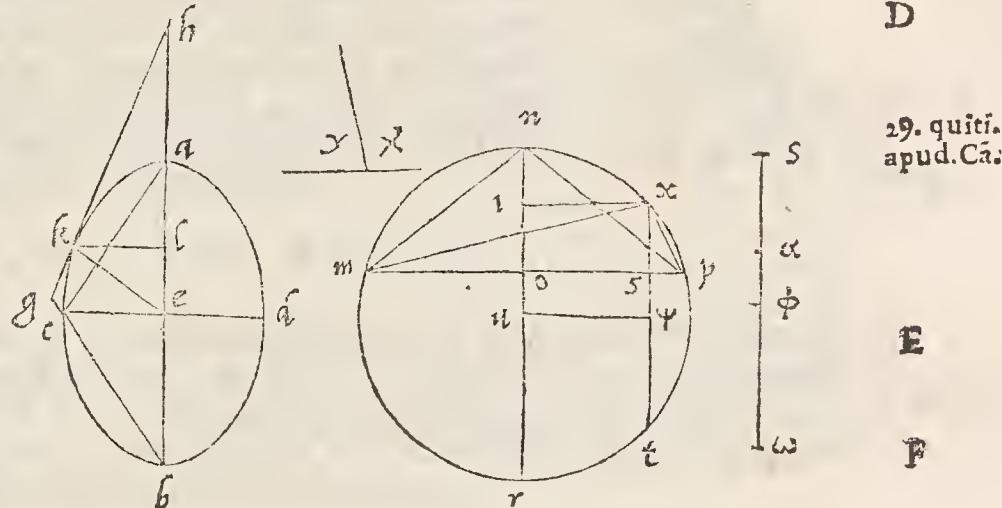
F E D . C O M M A N D I N V S .

DATVS autem angulus sit y non minor angulo a c g. quare & a c b angulus non est minor angulo χ .] Si enim angulus y sit æqualis angulo a c g, & angulus χ angulo a c b æqualis erit: si uero y angulo a c g sit maior, erit χ minor ipso a c b. quare sequitur angulum a c b non esse minorem angulo χ .

Quare linea a e ad e c maiorem proportionem habet, quam m o ad o n.] Hoc B in undecimo lemmate Tappi demonstratur.

Quam rectangulum n o r ad quadratum o n.] Hac nos apposuimus, quæ in græco C exemplari decesse videbantur.

Ergo $\phi\varsigma$ ad $\varsigma\alpha$ maiorem habet proportionem, quam u n ad n o.] Quoniam enim D $\omega\varsigma$ ad $\varsigma\alpha$ maiorem proportionem habet, quam r n ad n o: & antecedentium dimidia $\phi\varsigma$ ad $\varsigma\alpha$ habebit maiorem proportionem, quam u n ad n o.



B

C

D

29. quinto apud. C. A.

E

F

lem. in 22 decimi
35. tertii.

G

APOLLONII PERGAEI

- E** Perq; i ducatur ix ipsi mp æquidistans: & ducatur xst æquidistans nr : & $u\downarrow$ æquidistans eidem mp .] Hunc locum ita restituimus, nam in græco exemplari, ut opinor, nonnulla desunt.
- F** Erit igitur ut $\phi\alpha$ ad αs , ita uo ad oi , & $\downarrow s$ ad sx .] Est enim $\downarrow s$ æqualis uo , & sx æqualis oi , propterea quod parallelogramma sunt $ou\downarrow s$, $oixs$.
- G** Simile igitur est triangulum hlk triangulo msx , & triangulum hke simile ipsi $m\bar{x}p$.] Hoc eodem modo demonstrabitur, quo usus est Pappus in septimo lemmate, nam rectangulum hle ad quadratum lk est, ut transuersum latus ad rectum, hoc est ut rectangulum $m\bar{x}p$ ad quadratum sx .

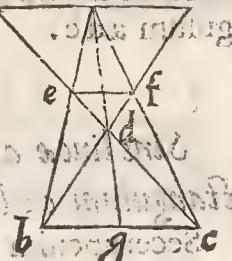
SECVNDI LIBRI FINIS.

P APP I ALEXANDRINI
LEMMATA IN TERTIVM LIBRVM
CONICORVM APOLLONII.

L E M M A P R I M U M.

Sit descripta figura ab c d e f g: & sit b g æqualis g c. Dico e f ipsi b c æquidistantem esse.

Ducatur enim per a linea h k æquidistantis b c: & b f, c e ad puncta k h producantur. Itaque quoniam b g est æqualis g c; erit & h a ipsi a k æqualis. ergo ut b c ad h a, hoc est ut b e ad e a, ita b c ad k a, hoc est c f ad f a. quare e f ipsi b c est æquidistantes.



A B

2. sexti.

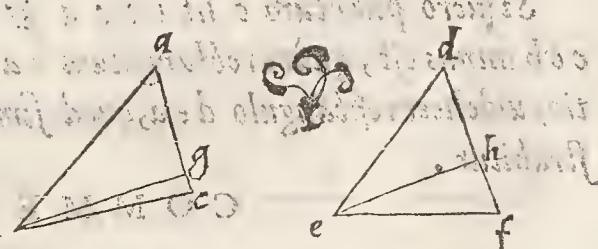
C O M M E N T A R I V S.

Erit & h a ipsi a k æqualis:] Ob similitudinem triangulorum b d g, k d a: itemq. triangulorum c d g, h d a. est enim ut b g ad g d, ita k a ad a d: & ut d g ad g c, ita d a ad a h. ex æquali-
gitur ut b g ad g c, ita k a ad a h. Sed b g est æqualis g c. ergo & k a ipsi a h æqualis erit.
Ergo ut b c ad h a, hoc est ut b e ad e a, ita b c ad k a, hoc est c f ad f a.] Sunt enim
triangula similia b e c, a e b: & triangula b f c, k f a itidem similia.

L E M M A I I.

Sint duo triangula a b c, d e f, quæ angulos a, d æquales habeant: & sit rectan-
gulum b a c æquale rectangulo e d f. Dico triangulum triangulo æquale esse.

Ductis enim perpendicularibus b g,
e h, erit ut b g ad b a, ita e h ad e d. ergo
ut rectangulum ex b g & a c ad rectan-
gulum b a c, ita rectangulum ex e h & d f
ad rectangulum e d f: & permutoando ut
rectangulum ex b g & a c ad rectangu-
lum ex e h & d f, ita rectangulum b a c
ad rectangulum e d f. est autem rectangu-
lum b a c rectangulo e d f æquale. ergo
& rectangulum ex b g & a c æquale re-
ctangulo ex e h & d f. Sed rectanguli ex b g & a c dimidium est a b c triangulum: & re-
ctanguli ex e h & d f dimidium triangulum d e f: triangulum igitur a b c triangulo
d e f æquale erit. Perspicuum autem est & parallelogramma ipsorum dupla inter se
æqualia esse.

4. sexti.
1. sexti.

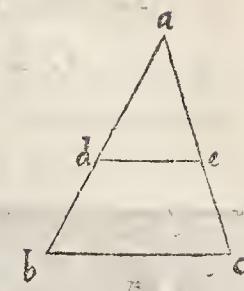
C O M M E N T A R I V S.

ERGO ut rectangulum ex b g & a c ad rectangulum b a c, ita rectangulum ex e h
& d f ad rectangulum e d f:] Ex prima sexti. est enim rectangulum ex b g & a c ad rectan-
gulum b a c, ut b g ad b a, quod eandem altitudinem habeant, uidelicet lineam a c; & similiter re-
ctangulum ex e h & d f ad rectangulum e d f, ut e h ad e d. quare ex undecima quinti sequitur
propositum.

L E M M A I I I.

Sit triangulum $a b c$; & sit $d e$ ipsi $b c$ aequidistantes. Dico
at quadratum $a b$ ad quadratum $a d$, ita esse triangulum $a b c$
ad triangulum $a d e$.

Quoniam enim triangulum $a b c$ simile est triangulo $a d e$, ha-
babit $a b c$ triāgulum ad ipsum $a d e$ duplam proportionem eius,
quæ est $b a$ ad $a d$. Sed & quadratum $a b$ ad quadratum $a d$ du-
plam proportionem habet eius, quæ est $b a$ ad $a d$. ergo ut qua-
dratum $a b$ ad quadratum $a d$, ita erit $a b c$ triangulum ad trian-
gulum $a d e$.



L E M M A I I I I.

Sint lineæ $a b, c d$ inter se aequales, & sumatur quodvis punctum e . Dico re-
ctangulum $c e b$ superare rectangulum $c a b$, rectangulo $d e a$.

Secetur enim $b c$ bifariam in f . ergo punctum f lineam quoque $a d$ bifariam secat.
& quoniam rectangulum $c e b$ una cum $b f$ quadrato aequaliter est quadrato $e f$. rectan-
gulum autem $d e a$ una cum quadrato $a f$ aequaliter est qua-
drato $e f$: atque est quadratum $a f$ aequaliter rectangulo
 $c a b$ una cum $b f$ quadrato: commune auferatur qua-
dratum $b f$: reliquum igitur rectangulum $c e b$ aequaliter
est rectangulo $c a b$ una cum rectangulo $d e a$. quare
 $c e b$ rectangulum superat rectangulum $c a b$, ipso $d e a$ rectangulo. quod demon-
strare oportebat.

C O M M E N T A R I V S.

Commune auferatur quadratum $b f$.] [Sequitur enim ex iam dictis rectangulum $c e b$
una cum quadrato $b f$ aequaliter esse rectangulis $d e a, c a b$ una cum quadrato $b f$.

L E M M A V.

Si uero punctum e sit inter a & b , rectangulum
 $c e b$ minus est, quam rectangulum $c a b$, eodem ipso spa-
tio, uidelicet rectangulo $d e a$, quod simili ratione demon-
strabitur.

C O M M E N T A R I V S.

Quod simili ratione demonstrabitur.] Est enim rectangulum $c a b$ una cum $b f$ quadra-
to aequaliter quadrato $a f$; & rectangulum $d e a$ una cum quadrato $e f$ aequaliter est quadrato $a f$. qua-
dratum uero $e f$ est aequaliter rectangulo $c e b$, una cum $b f$ quadrato. ergo rectangulum $c a b$ una
cum quadrato $b f$ aequaliter est rectangulis $d e a, c e b$ una cum quadrato $b f$. & dempto communi qua-
drato $b f$, relinquitur rectangulum $c a b$ aequaliter rectangulis $d e a, c e b$. rectangulum igitur $c e b$
minus est, quam rectangulum $c a b$, rectangulo $d e a$.

L E M M A VI.

Quod si e punctum sit inter b & c , eadem ratione
rectangulum $c e b$ minus est, quam rectangulum $a e d$, a b f e c d
rectangulo $a b d$.

C O M M E N T A R I V S.

NAM cum rectangulum $a \cdot d$ unà cum quadrato $e \cdot f$ æquale sit quadrato $a \cdot f$: rectangulum uero $a \cdot b \cdot d$ unà cum quadrato $b \cdot f$ eidem quadrato $a \cdot f$ sit æquale; & quadratum $b \cdot f$ æquale rectangulo $c \cdot e \cdot b$ unà cum $e \cdot f$ quadrato: dempto communi quadrato $e \cdot f$, sequitur rectangulum $a \cdot d$ æquale esse rectangulo $a \cdot b \cdot d$ unà cum rectangulo $c \cdot e \cdot b$. ergo $c \cdot e \cdot b$ rectangulum minus est, quādum rectangulum $a \cdot d$, rectangulo $a \cdot b \cdot d$. id quod demonstrandum proponebatur. s. secundi

L E M M A . V I I .

Sit linea $a \cdot b$ æqualis ipsi $b \cdot c$; & duo puncta $d \cdot e$ sumantur. Dico quadratum $a \cdot b$ quater sumptum æquale esse rectangulo $a \cdot d \cdot c \cdot b$ bis unà cum rectangulo $a \cdot e \cdot c$ bis, & quadratis $d \cdot b, b \cdot e$ bis sumptis.

Hoc autem perspicuum est. quadratum enim $a \cdot b$ bis sumptum propter bipartitas sectiones æquale est rectangulo $a \cdot d \cdot c$ bis, & quadrato $d \cdot b$ bis. Itemq; quadratum $a \cdot b$ bis est æquale rectangulo $a \cdot e \cdot c$ bis, & bis $e \cdot b$ quadrato.

L E M M A . V I I I .

Sit linea $a \cdot b$ æqualis ipsi $c \cdot d$: & sumatur punctum e . Dico quadrata $a \cdot e, e \cdot d$ æqualia esse quadratis $b \cdot e, e \cdot c$, & rectangulo $a \cdot c \cdot d$ bis sumpto.

Secetur $b \cdot c$ bisariam in f . & quoniam quadratum $d \cdot b$ bis sumptum æquale est rectangulo $a \cdot c \cdot d$ bis, & bis quadrato $c \cdot f$ apposito communi quadrato $e \cdot f$ bis; erit rectangulum $a \cdot c \cdot d$ bis, unà cum quadratis $c \cdot f, f \cdot e$ bis, æquale quadratis $d \cdot f, f \cdot e$ bis sumptis. sed quadratis $d \cdot f, f \cdot e$ bis sumptis æqualia sunt quadrata $a \cdot e, e \cdot d$. quadratis autem $c \cdot f, f \cdot e$ bis sumptis æqualia sunt $b \cdot e, e \cdot c$ quadrata. quadrata igitur $a \cdot e, e \cdot d$ æqualia sunt quadratis $b \cdot e, e \cdot c$, & rectangulo $a \cdot c \cdot d$ bis sumpto.

L E M M A . I X .

Sit rectangulum $b \cdot a \cdot c$ unà cum $c \cdot d$ quadrato æquale quadrato $a \cdot d$. Dico $c \cdot d$ ipsi $d \cdot b$ æqualem esse.

Commune enim auferatur quadratum $c \cdot d$. erit reliquum, quod continetur $a \cdot c, d \cdot b$ æquale rectangulo $d \cdot a \cdot c$. æqualis igitur est $d \cdot c$ ipsi $d \cdot b$.

C O M M E N T A R I V S.

HOC lemma est ueluti conuersum sextæ propositionis secundi libri elementorum, in cuius demonstracione cum non nulla desiderari uideantur, nos planius & apertius explicare tentabimus, hoc modo.

Commune auferatur quadratum $c \cdot d$. erit reliquum rectangulum $b \cdot a \cdot c$ æquale rectangulo $d \cdot a \cdot c$, unà cum rectangulo $d \cdot c \cdot a$. est enim ex secunda propositione secundi libri elementorum quadratum $a \cdot d$ æquale rectangulo $d \cdot a \cdot c$ unà cum rectangulo $a \cdot d \cdot c$, hoc est unà cum rectangulo $d \cdot c \cdot a$, & quadrato $c \cdot d$ ex tertia eiusdem. Sed ex prima rectangulum $b \cdot a \cdot c$ æquale est rectangulo $d \cdot a \cdot c$ unà cum eo, quod $b \cdot d$ & $a \cdot c$ continetur. quare rursus ablato communi rectangulo $d \cdot a \cdot c$, relinquitur rectangulum contentum $b \cdot d$ & $a \cdot c$ æquale rectangulo $d \cdot c \cdot a$. æqualis igitur est linea $c \cdot d$ ipsi $d \cdot b$. s. sexti

P A P P I L E M M A T A

L E M M A X.

Sit rectangulum $a c b$ unà cum quadrato $c d$ æquale $d b$ quadrato. Dico linéam ad æqualem esse $d b$.

x.sexti: Ponatur ipsi $c d$ æqualis $d e$. ergo rectangulum $c b e$ unà cum quadrato $d e$, hoc est quadrato $c d$, æquale est $d b$ quadrato: hoc est rectangulo $a c b$ unà cum quadrato $c d$. quare rectangulum $c b e$ est æquale rectangulo $a c b$: & propter realinea $a c$ æqualis ipsi $e b$. sed & $c d$ æqualis est $d e$. tota igitur ad toti $d b$ est æqualis.



C O M M E N T A R I V S.

Hoc lemma conuersum est quinta propositionis secundi libri elementorum.

Quare rectangulum $c b e$ est æquale rectangulo $a c b$.] Nempe ablato communi uidelicet $c d$ quadrato.

L E M M A X I.

Sit rursus rectangulum $b a c$ unà cum $d b$ quadrato æquale quadrato $a d$. Dico lineam $c d$ æqualem esse $d b$.

Ponatur enim ipsi $d b$ æqualis $a e$. & quoniam rectangulum $b a c$ unà cum quadrato $d b$, hoc est cum quadrato $e a$, æquale est quadrato $a d$:

- A commune auferatur rectangulum $d a c$. ergo reliquum, quod $b d$ & $a c$ continetur, uidelicet rectangulum $e a c$ unà cum quadrato $e a$, quod est rectangulum $c e a$, æquale
- B c est ipsi $a d c$ rectangulo. quare linea $e a$, hoc est $b d$ ipsi $d c$ est æqualis.

C O M M E N T A R I V S.

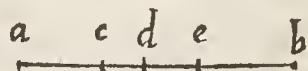
1.secūdi. A Commune auferatur rectangulum $d a c$.] Est enim rectangulum $b a c$ æquale rectangulo $d a c$, unà cum eo, quod $b d$ & $a c$ continetur; quadratum uero ad æquale rectangulo $d a c$, unà cum rectangulo $a d c$.

2.secūdi. B Quod est rectangulum $c e a$.] Ex tertia secundi libri elementorum.
C Quare linea $e a$, hoc est $b d$ ipsi $d c$ est æqualis.] Hoc nos demonstrauimus in commentarijs in sextam decimam secundi huius.

L E M M A X I I .

Sit recta linea $a b$, in qua sumantur tria puncta $c d e$, ita ut $b e$ sit æqualis $e c$, & rectangulum $a e d$ æquale quadrato $c e$. Dico ut $b a$ ad $a c$, ita esse $b d$ ad $d c$.

Quoniam enim rectangulum $a e d$ æquale est quadrato $c e$; erit ut $a e$ ad $e c$, ita $c e$ ad $e d$. quare per cōuerisionem rationis; antecedentibusq; bis sumptis; & diuidendo, ut $b a$ ad $a c$, ita erit $b d$ ad $d c$.



C O M M E N T A R I V S.

A Hoc lemma, & quod sequitur in græcis codicibus corruptissima erunt, quæ nos ita restituimus. Erit ut $a e$ ad $e c$, ita $c e$ ad $e d$.] Hæc nos addidimus perspicuitatis caussa, in græco enim codice

codice tantum legitur ανάλογον.

Quare per conuersionem rationis, antecedentibusq; bis sumptis, & diuidendo, ut B
ba ad ac, ita erit bd ad dc.] Quoniam enim ut ae ad ec, ita cc ad ed, erit per conuersio-
nem rationis ut ea ad ac, ita ec ad ed; & antecedentium dupla, ut ba, ac ad ca, ita bc ad cd;
est enim bc ipsius ce dupla. ergo diuidendo ut ba ad ac, ita est bd ad dc.

LEMMA XIII.

Sit rursus rectangulum bcd æquale quadrato ce, & ac ipsi ce æqualis. Di-
co rectangulum abe æquale esse rectangulo cbd.

Quoniam enim rectangulum bcd quadrato ce est
æquale, ut bc ad ce, hoc est ad ca, ita erit ce, hoc est ac ad cd. & tota ad totam; & per conuersionem rationis: & spa-
tium spatio æquale. ergo rectangulum abe æquale est
cbd rectangulo. Sed illud etiam constat, rectangulum scilicet ade ipsi bdc æqua- B
le esse. si enim à quadrato ce & à rectangulo bcd auferatur commune quadratum
cd, quæ relinquuntur æqualia erunt.

COMMENTARIUS.

Et tota ad totam, & per conuersionem rationis: & spatium spatio æquale.] Quo- A
niam enim est ut bc ad ca, ita ac ad cd: erit componendo, ut tota ba ad ac, hoc est ad totam ec,
ita pars ad ad partem dc. ergo reliqua bd ad reliquam de, ut ba ad ac: & per conuersionem 19. quiti.
rationis db ad be, ut ab ad bc. rectangulum igitur abe rectangulo cbd est æquale. 16. sexti.

Sed hoc etiam aliter demonstrare possumus. nam cum linea ae bifariam secetur in c, atque ipsi addatur eb; erit rectangulum abe una cum ec quadrato æquale quadrato cb. sed eidem cb qua- 6. secundi.
drato æqualia sunt utraque rectangula cbd, bcd. rectangulum igitur abe una cum quadrato ec
æquale est rectangulo cbd una cum rectangulo bcd. quare sublato quadrato ec ex altera parte, &
ex altera rectangulo bcd, quæ inter se æqualia sunt; sequitur rectangulum abe rectangulo cbd
æquale esse.

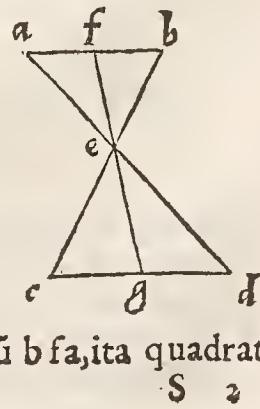
Sed illud etiam constat, rectangulum scilicet ade ipsi bdc æquale esse.] Cum enim B
ac sit æqualis ce, rectangulum ade una cum cd quadrato æquale est quadrato ce. sed rectangu- 5. secundi
lum bdc una cum quadrato cd est æquale rectangulo bcd, hoc est quadrato ce. quare sublato 3.
communi quadrato cd, relinquitur rectangulum ade rectangulo bdc æquale.

ALITER quoque idem demonstrari potest hoc pacto. Quoniam ut tota ba ad ec, ita est pars 16. sexti
ad ad dc; erit & reliqua bd ad de, ut ad ad dc: & propterea rectangulum ade æquale re-
ctangulo bdc.

LEMMA XIV.

In duas æquidistantes ab, cd per idem punctum e tres lineæ ducantur ae, b
be, cf, eg. Dico ut rectangulum abe ad rectangulum afb, ita esse rectangulum
ced ad cgd rectangulum.

Hoc per compositam proportionem manifestum est. ut enim ae ad ed, ita est af ad dg: & ut be ad ec, ita fb ad gc: & componuntur ex his proportionibus spatia. constat igitur propositum. Sed licet & aliter demonstrare absque compo-
sita proportione hoc pacto. Quoniam enim ut ae ad eb, ita est de ad ec; erit rectangulum abe ad quadratum eb, ut rectangulum dec ad quadratum ec. ut autem quadratum eb ad quadratum bf, ita quadratum ec ad cg quadratum. quare ex æquali ut rectangulum abe ad quadratum bf, ita rectan-
gulum dec ad quadratum cg. sed ut quadratum bf ad rectangulum bf ad rectangulum bf, ita quadratum



cg ad rectangulum cgd . ex æquali igitur ut rectangulum aeb ad rectangulum afb ,
ita rectangulum cfd ad rectangulum cgd .

C O M M E N T A R I V S.

Hoc per compositam proportionem manifestum est. \square Cum enim linea ab , cd inter se æquidistant, erit aef triangulum simile triangulo deg & triangulum ebf simile ipsi gec . quare ut $e a$ ad af , ita ed ad dg : & ut eb ad $b f$, ita ec ad gc . proportio autem rectanguli aeb ad rectangulum afb componitur ex proportione $e a$ ad af , & proportione eb ad $b f$: & proportio rectanguli cfd ad rectangulum cgd componitur ex proportione ed ad dg , & proportione ec ad gc . quare cum proportiones ex quibus componuntur, eadem sint, sequitur rectangulum aeb ad afb rectangulum ita esse, ut rectangulum cfd ad rectangulum cgd .

A D D I C T I O N E

Si ergo rectangulum aeb ad rectangulum afb sit in duplo, et rectangulum cfd ad rectangulum cgd sit in duplo, rectangulum aeb ad rectangulum cfd sit in duplo. Nam rectangulum aeb ad rectangulum afb sit in duplo, et rectangulum afb ad rectangulum cfd sit in duplo, ergo rectangulum aeb ad rectangulum cfd sit in duplo. \square

T H E O R E M A X I

Si ergo rectangulum aeb ad rectangulum afb sit in triplo, et rectangulum cfd ad rectangulum cgd sit in triplo, rectangulum aeb ad rectangulum cfd sit in triplo. Nam rectangulum aeb ad rectangulum afb sit in triplo, et rectangulum afb ad rectangulum cfd sit in triplo, ergo rectangulum aeb ad rectangulum cfd sit in triplo. \square

Si ergo rectangulum aeb ad rectangulum afb sit in duplo, et rectangulum cfd ad rectangulum cgd sit in duplo, rectangulum aeb ad rectangulum cfd sit in duplo. Nam rectangulum aeb ad rectangulum afb sit in duplo, et rectangulum afb ad rectangulum cfd sit in duplo, ergo rectangulum aeb ad rectangulum cfd sit in duplo. \square

APOLLONII PERGAEI

CONICORVM LIBER III.

CVM COMMENTARIIS EUTOCII ASCALONITAE,
ET FEDERICI COMMANDINI.

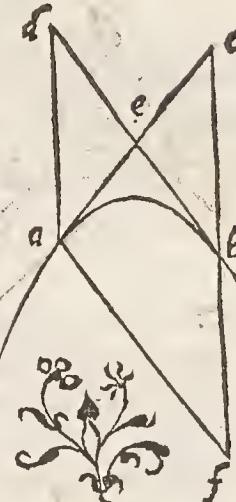
THEOREMA I. PROPOSITIONE I.



I coni sectionem, uel circuli circumferentiam rectæ lineæ continentes inter se conueniant: & per tactus ducantur diametri, quæ contingentibus occurant: triangula ad uerticem facta sibi ipsis æqualia erunt.

Sit coni sectio, uel circuli circumferentia ab; quam continent rectæ lineæ ac, bd conuenientes in puncto e: & per tactus ab diametri sectionis cb, da ducantur, quæ contingentibus occurant in punctis cd. Dico triangulum ade triangulo ebc æquale esse. ducatur enim à punto a linea af ipsi bd æquidistans, quæ ordinatim applicata erit: & in parabola quidem parallelogramm abdf æquale erit triangulo acf. quare ablato communi ae bf, triangulum ade, quod relinquitur, æquale est triangulo cbe.

In alijs uero conueniant diametri in centro g. & quoniam ordinatim applicata est af: & ac sectionem contingit; rectangulum fgc æquale est quadrato bg. ut igitur fg ad gb, ita est bg ad gc. quare ut fg ad gc, ita quadratum fg ad quadratum gb. sed ut quadratum fg ad quadratum gb, ita triangulum agf ad triangulum dgb: & ut fg ad gc, ita triangulum agf ad triangulum agc. ergo ut triangulum agf ad triangulum agc, ita triangulum agf ad triangulum dgb. & propterea triangulum agc triangulo dgb est æquale. Cōmune auferatur agb e. reliquum igitur triangulum aed reliquo ceb æquale erit.



A

B

14. sexti.

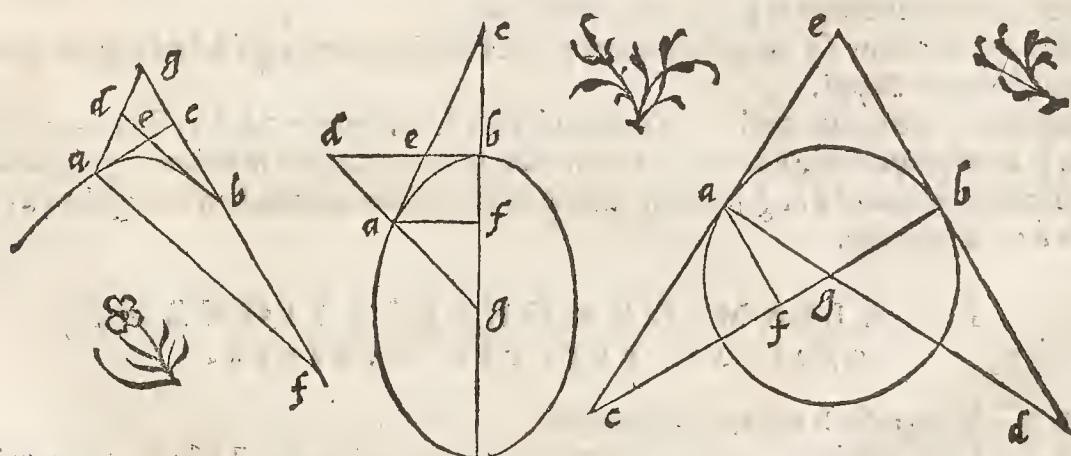
20.

C

1. sexti

9. quinti

D



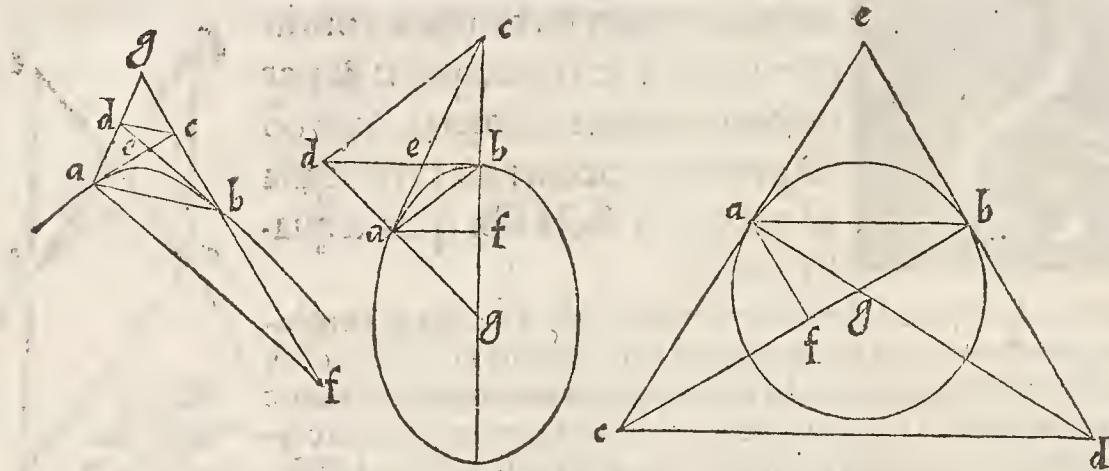
E V T O C I V S.

Tertius conicorum liber, amicissime Anathemi, dignus ab antiquis existimatus est, in quem multum studij, ac diligentiae conferretur: id, quod uaria ipsius editiones ostendunt. sed neque epistolam habet, quemadmodum alij libri, neque commentarios in ipsum docti alicuius uiri ex ijs, qui ante nos fuerunt, quanquam in eo multa sint cōtemplatione dignissima; ut ipse Apollonius in proœmio totius libri asserit. omnia autem à nobis manifeste explicata sunt, ac demonstrata ex præcedentibus libris,

A P O L L O N I I P E R G A E I

& commentarijs, quos in ipsos conscripsimus. Inuenitur etiam alia demonstratio, in parabola quidem, huiusmodi.

- E** Quoniam ac sectionem contingit, & ordinatim applicata est a f, erit & cb æqualis b f: & bf ipsi ad. ergo ad, cb inter se æquales sunt. sed & æquidistantes. triangulum igitur ade æquale est, & simile triangulo ebc.] In alijs uero hoc pæcto.
- G H** Intangantur ab, cd: & quoniam ut fg ad gb, ita est bg ad gc: & ut fg ad gb, ita ag ad gd: est enim af ipsi db æquidistans. ergo ut bg ad gc, ita ag ad gd: & propter ea ab æquidistat ipsi cd. triangulum igitur adc æquale est triangulo bde: & communi cde ablato, relinquitur triangulum ade triangulo cbe æquale.



Hoc theorema in parabola quidem, & hyperbola non habet casus: in ellipsi uero, & circuli circumferentia duos habet: siquidem contingentes lineæ in tactibus dumtaxat diametris occurunt: & ipsis productis uel occurunt, sicuti in proposita figura, uel ad alteras partes, in quibus est e, quemadmodum & in hyperbola.

F E D. C O M M A N D I N V S.

- A** Et in parabola quidem parallelogrammum abdf æquale erit triangulo acf.] Ex 42. primi huius.
- B** Et quoniam ordinatim applicata est af: & ac sectionem contingit: rectangle fgc æquale est quadrato bg.] Ex 37. primi huius.
- C** Sed ut quadratum fg ad quadratum gb, ita triangulum agf ad triangulum dgf] Ex tertio lemmate Pappi.
- D** Commune auferatur agb e. reliquum igitur triangulum aed reliquo ceb æquale erit.] In ellipsi quidem & circuli circumferentia ablato, uel addito communi agb e, sed in hyperbola, ablato communi decg sequitur illud, quod propositum est; uidelicet triangulum aed triangulo bcc æquale esse.

I N A L I A M D E M O N S T R A T I O N E M, Q V A E A B E V T O C I O P O N I T V R.

- E** Erit & cb æqualis bf.] Ex 35. primi huius.
- F** Triangulum igitur ade æquale est, & simile triangulo ebc.] Est enim ex 29. primi angulus d æqualis angulo b: & angulus a angulo c: suntq; anguli ad uerticem æquales: triangula igitur æqualia & similia erunt.
- G** Et quoniam ut fg ad gb, ita est bg ad gc.] Est enim rectangle fgc æquale quadrato bg ex 37. primi huius.
- H** Et ut fg ad gb, ita ag ad gd.] Ex quarta sexti, quod triangula agf, dgf similia sunt.
- K** Et propterea ab æquidistat ipsi cd.] Nam cum sit ag ad gd, ut bg ad gc, erit permutoando

tando $c g$ ad $g d$, ut $b g$ ad $g a$: & sunt circa eosdem, uel æquales angulos litera proportionalia. ergo triangulum $c g d$ simile est triangulo $b g a$: & angulus $g d c$ angulo $g a b$ æqualis. linea igitur $d c$ linea $a b$ est æquidistans. sed illud etiam possumus ex primo lemmate Pappi demonstrare. iuncte enim $g e$ lineam $a b$ bifurciam secabit ex 3o. secundi libri huius. quare & ipsam $c d$, ex demonstratis in sextam propositionem primi libri huius.

6. sexti:
28. primi

Triangulum igitur $a d c$ æquale est triangulo $b d c$.] Ex 37. primi elementorum.

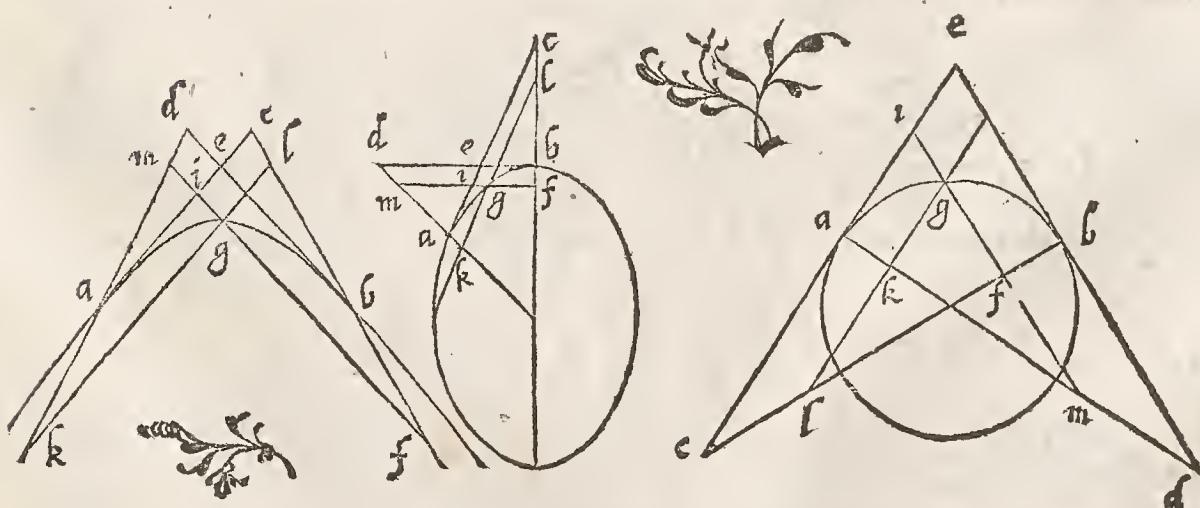
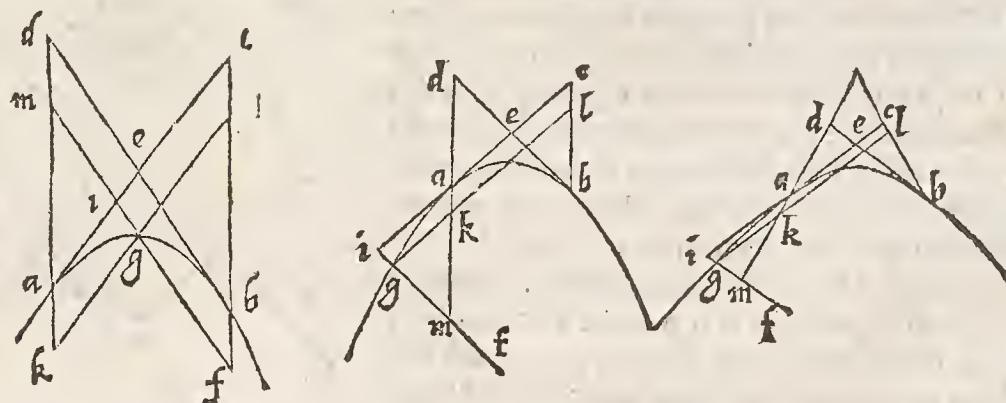
Et communi $c d e$ ablato, relinquitur triangulum $a d e$ triangulo $c b e$ æquale.] Verum est hoc in hyperbola quidem semper, in ellipsi uero. & circuli circumferentia in uno tantum casu. nam in altero casu ablato communi $c g d$, & communi $a e b$ addito, sequitur triangulum $a d e$ æquale esse triangulo $c b e$.

L
M

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Iisdem positis si in coni sectione, uel circuli circumferentia sumatur aliquod punctum: & per ipsum æquidistantes contingentibus usque ad diametros ducantur: quadrilaterum factum ad unam contingentium, & ad unam diametrorum, æquale erit triangulo, quod ad eandem contingentem, & ad alteram diametrum constituitur:

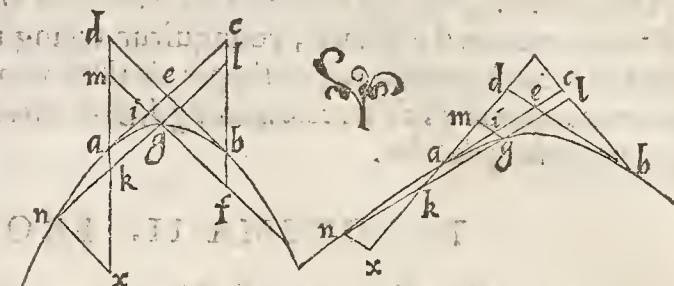
Sit coni sectio, uel circuli circumferentia $a b$, quā contingent rectæ lineæ $a e c, b e d$: & diametri sint $a d, b c$: sumpto autem in sectione punto g , ducantur $g k l, g m f$ contingentibus æquidistantes. Dico triangulum $a i m$ æquale esse quadrilatero $c l g i$. Quoniam enim ostensum est $g k m$ triangulum æquale quadrilatero $a l$; commune apponatur, uel auferatur quadrilateru $i k$. ergo triangulum $a i m$ quadrilatero $c g$ est æquale.



APOOLLONII PERGAEI

E V T O C I V S.

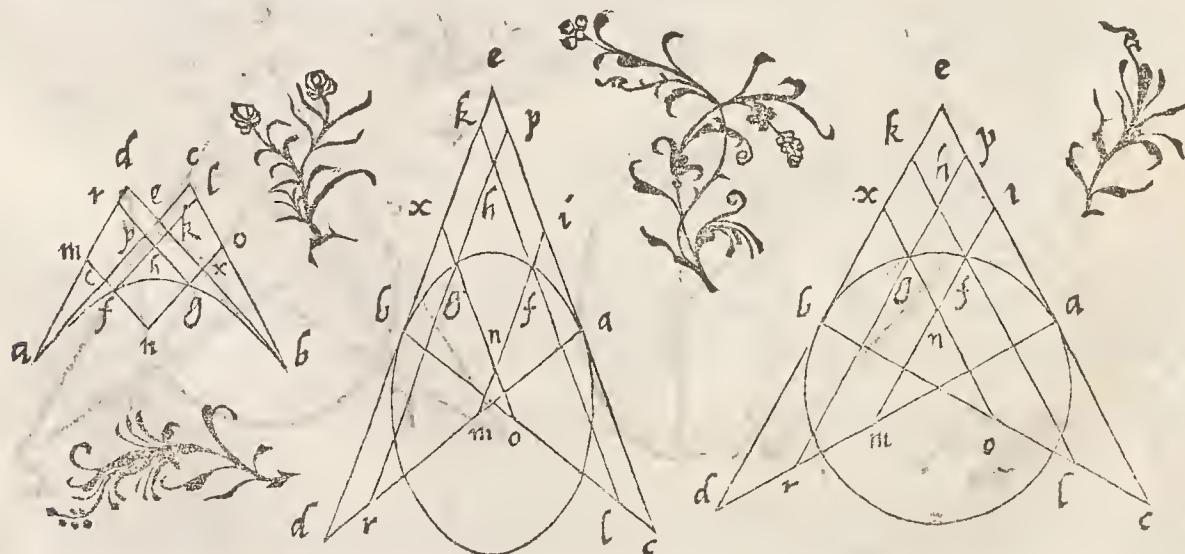
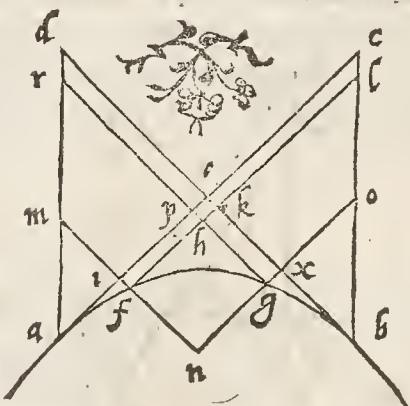
Casus huius theorematis inuenientur per quadragesimum secundum, & quadragesimum tertium theorema primi libri, & per commentarios, quos in ea conscripsimus. oportet autem scire, si punctum g inter ab sumatur, ita ut æquidistantes sint deb, m, f, itemq; a, c, k, g, l, & protrahatur lk usque ad sectionem in n: & per n. ducatur nx ipsi bd æquidistans: ex ys, quæ tradita sunt in theoremate quadragesimo nono, & quinquagesimo primi libri, & in ipsis commentarijs: erit triangulum knx æquale quadrilatero kcl. sed triangulum knx simile est triangulo kgm, cum mg æquidistant sit nx. est autem & æquale, quoniam linea contingens est ac, cui æquidistat gn: & diameter est mx: & nk æqualis kg. Quoniam igitur triangulum knx æquale est quadrilatero kcl, & triangulo kgm, communis ablato ag, reliquum triangulum aim reliquo cgl quadrilatero æquale erit.



THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Iisdem positis si in coni sectione, uel circuli circumferentia duo puncta sumantur; & per ipsa ducantur æquidistantes contingentibus usque ad diametros: quadrilatera, quæ ab ipsis fiunt, in diametris constituta, inter se æqualia erunt.

Sit coni sectio, uel circuli circumferentia: lineaq; contingentes & diametri, sicuti dictum est: & sumptis in sectione duobus punctis fg, ducantur per f quidem lineæ contingentibus æquidistantes fhk, l, n, f, i, m: per g uero ducantur ngx, ghpr. Di co quadrilaterum lg quadrilatero mh, & quadrilaterum ln ipsi rn æquale esse. Quoniam enim antea demonstratum est triangulum rpa æquale quadrilatero gc, & triangulum aim quadrilatero cf: est autem arp triangulum maius, quam triangulum aim, quadrilatero pm: erit & quadrilaterum cg maius, quam cf, codem pm quadrilatero: & propterea quadrilaterum cg æquale est quadrilateris cf, pm; hoc est ipsis ch, rf, comune auferatur ch. reliquum igitur quadrilaterum lg æquale est reliquo hm. quare & totum ln totu rn æquale erit.



E V T O C I V S.

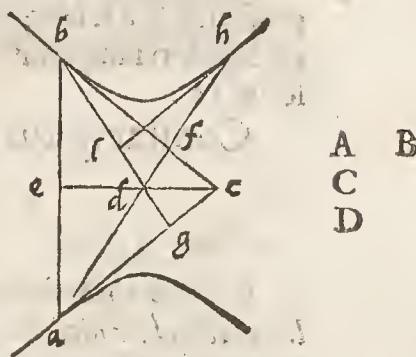
Hoc eheorema plures casus habet, quos ut in antecedente inueniemus. sed animaduertendum est duo puncta, quæ sumuntur, uel esse inter duas diametros, uel extra, & ad easdem partes. nam si alterum quidem extra sumatur, alterum uero inter diametros, non constituentur quadrilatera, de quibus in propositione dictum est: sed neque ad utrasque diametrorum partes constituentur.

THEOREMA. IIII. PROPOSITIO. IIII.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes inter se conueniant; & per tactus ducantur diametri contingentibus occurrentes: triangula, quæ ad contingentes constituantur, sibi ipsis æqualia erunt.

Sint oppositæ sectiones a b, quas contingent rectæ lineæ a c, b c in puncto c conuenientes: sitq; sectionum centrum d: & iunctis a b, c d producatur c d usque ad e iungantur etiam a d, b d, & ad f g producantur. Dico triangulum a g d æquale esse triangulo b d f: & a c f triangulum triangulo b c g. Ducatur enim per h contingens sectionem h l, quæ ipsi a g æquidistabit. & quoniam a d æqualis est d h, erit a g d triangulum æquale triangulo h l d. sed & triangulum d h l æquale est triangulo b d f. ergo & triangulum a g d triangulo b d f. & propterea triangulum a c f ipsi b c g est æquale.

E V T O C I V S.



IN propositione huius theoremati, & eorum quæ sequuntur, oportet scire, Apollonium indeterminate dicere oppositas sectiones. & nonnulli quidem codices habent duas contingentes in una sectione: nonnulli uero non duas contingentes in una, sed singulas in utraque sectione contingentes, quæ inter se conueniant (uti dictum est in secundo libro) in angulo, qui deinceps est angulo asympton. & ita eneunt ea, quæ in propositione dicuntur. licet autem ijs, qui uolunt hoc ex descriptiōnibus considerare. quanquam si unam quidem sectionum duæ rectæ lineæ contingant, quæ per punctum in quo conueniant, & per centrum ducitur linea transuersa diameter est: si uero utraque sectionem singulæ lineæ contingant; quæ per dictum punctum & centrum ducitur, recta est diameter oppositarum sectionum.

propos.
32

F E D. C O M M A N D I N V S.

Quæ ipsi a g æquidistabit.] Ex ijs, quæ ab Eutocio demonstrata sunt in quadragesimam A quirtam p. ini huius.

B

C

29 primi.

15

Et quoniam a d est æqualis d h.] Ex trigesima primi huius.

Et a g d triangulum æquale triangulo h l d.] Nam cum lineæ a g, b l inter se æquidistant, eru angulus a g d æqualis angulo h l d: & anguli qui ad d æquales sunt; quare & reliquæ æqualis reliquo & triangulum triangulo simile. ut igitur a d ad d h, ita g d ad d l, & a g ad b l. sed a d est æqualis d h. ergo & g d æqualis d l, & a g ipsi b l: & idcirco triangulum a g d triangulo h l d æquale erit.

Sed & triangulum d h l æquale est triangulo b d f.] Demonstratum est hoc in prima D propositione huius libri.

THEOREMA. V. PROPOSITIO. V.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant: & in qua uis sectionum aliquod punctum sumatur, à quo ducantur duæ lineæ, una quidem contingenti æquidistans, altera uero æquidi

T

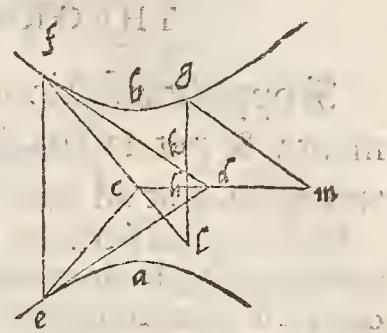
stans ei, quæ tactus coniungit: triangulum, quod ab ipsis cōstituitur ad diametrum per occursum ductam, à triangulo, quod est ad occursum contingentium, differt triangulo facto ad contingentem & ad diametrum, quæ per tactum ducta fuerit.

Sint oppositæ sectiones a.b, quarum centrum c; & lineæ contingentes sint e.d, f.s, quæ sibi ipsis occurrant in d iunctaq; e.f & c.d; ac producuntur f.c, e.c, & producantur: in sectione autem sumatur aliquod punctum g; per quod ducatur g.k.h.l æquidistans e.f; & g.m æquidistans d.f. Dico triangulum

A g.h.m. à triangulo h.k.d. differre triangulo k.l.f. Quoniam enim ostensa est c.d diameter oppositarum sectionum:

B & e.f ad ipsam ordinatim applicatur: & g.k.h.l quidem ducitur æquidistans e.f; m.g. uero æquidistans d.f. triangulum m.g.h. à triangulo c.l.h. differt triangulo c.d.f. quare m.g.h. triangulum à triangulo k.h.d. differt triangulo k.f.l.

Constat igitur triangulum k.f.l quadrilatero m.g.k.d æquale esse.



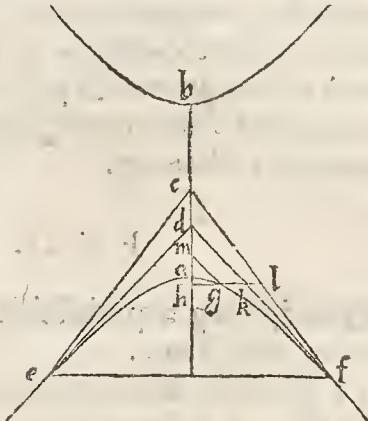
E V T O C I V S.

Quintum theorema manifestum est. Verum in figura quidem, quæ unam diametrum habet, uidebet rectam ita dicemus. Quoniam ostensum est triangulum g.b.m maius esse, quam triangulum c.l.b, triangulo c.d.f; erit triangulum g.b.m triangulo c.l., & triangulo c.d.f æquale. ergo & æquale triangulo k.d.b. una cum triangulo f.l.k. triangulum igitur g.m.b. à triangulo k.d.b differt triangulo k.l.f. commune auferatur triangulum b.d.k. quare reliquum k.l.f triangulum æquale est quadrilatero k.d.m.g.

In figura uero, quæ transuersum diametrum habet, hoc modo. Quoniam prius demonstratum est

c.l.b triangulum maius esse, quam triangulum m.b.g, triangulo c.d.f; erit c.l.b triangulum æquale triangulo b.g.m una cum triangulo c.f.d. commune auferatur quadrilaterum c.d.k.l. reliquum igitur k.b.d triangulum æquale est triangulo b.g.m. una cum triangulo k.l.f. rursus commune auferatur m.b.g. ergo triangulum k.f.l, quod relinquitur, quadrilatero g.m.d.k æquale erit. Casus habet plures, quos ex demonstratis in quadragesimo, & quadragesimo quinto theoremate primi libri addiscere oportet.

Cum autem dicitur, auferatur, uel apponatur quadrilateru, uel triangulum, ablitiones, & appositiones iuxta proprietatem causum faciemus. sed quoniam ea, quæ sequuntur, plures casus continent, ob punctorum sumptiones, & æquidistantes lineas, ne confusionem legentibus afferamus, multas figuræ describentes, unam in singulis theorematis faciemus, quæ oppositas sectiones, & diametros, & lineas contingentes habeat; ut seruetur illud, quod in propositione dictum est. his positis & lineas æquidistantes, quoniamque alijs occurrant, ducemus, in occursu elementa collocantes, ita ut unusquisque seruans ea, quæ consequuntur, facile possit casus omnes demonstrare.

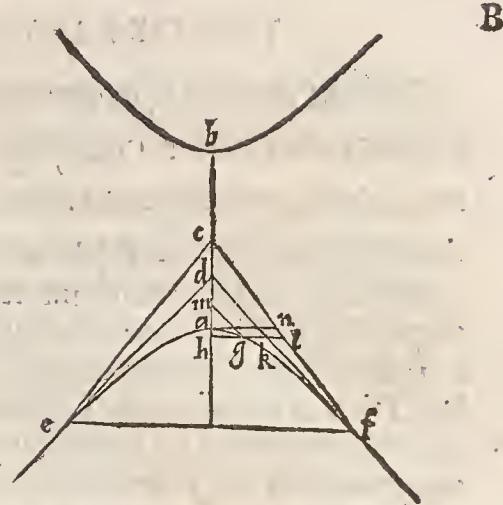


F E D. C O M M A N D I N V S.

A Quoniam enim c.d ostensa est diameter oppositarum sectionum.] Nam in primo casu, cum scilicet due lineæ contingunt utramque sectionem, erit c.d diameter recta: quod elicetur ex trigesima octava & trigesima nona secundi libri huius. In secundo autem casu quando duas lineas alteram tantum sectionem contingunt, diameter erit transuersa, quod appetet ex uigesima nona & trigesima eiusdem.

Trian-

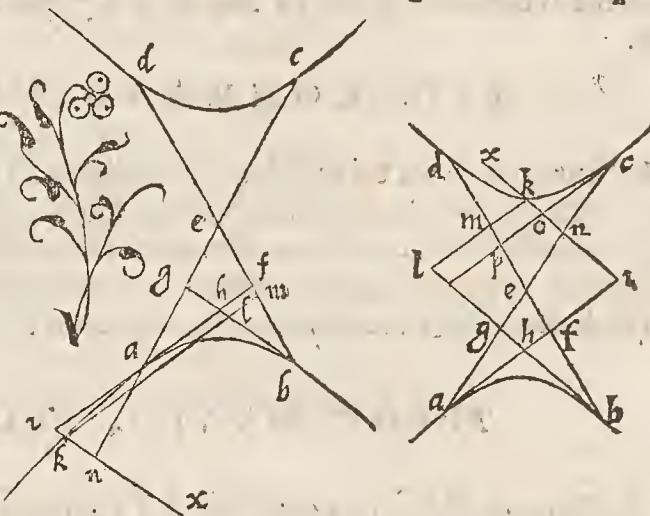
Triangulum mgh à triangulo chl differt triangulo cdf .] Cōstat hoc in primo casu ex quadragesima quinta primi huius. sed in altero casu hoc modo demonstrabitur. Iisdem enim manentibus, quae in figura, à vertice sectionis linea a in ordinatim applicetur, quae ipsam fc in puncto n sectet. triangulum igitur mgh à triangulo chl differt, triangulo cna , ex quadragesima tertia primi huius. sed triangulum cdf triangulo cna est æquale, ut ostensum est in quadragesima tertia primi libri huius, in secunda demonstratio, quae ab Eutocio conscribitur. ergo triangulum mgh à triangulo chl differt triangulo cdf .



THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

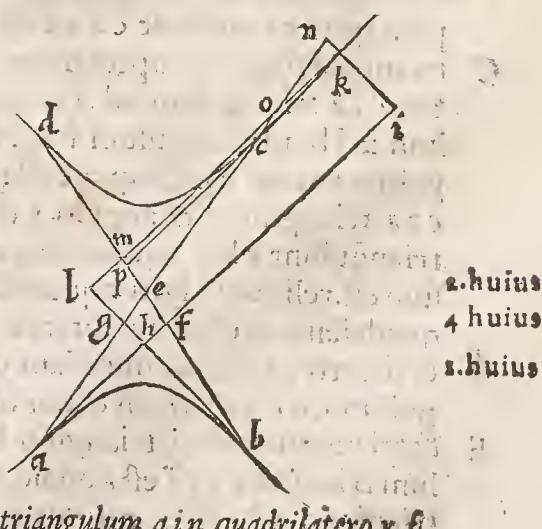
Iisdem positis si in una oppositarum sectionum aliquod punctum sumatur: & ab eo ducantur rectæ lineæ, contingentibus æquidistâtes, quæ & contingentibus, & diametris occurant: quadrilaterum ab ipsis factum ad unam contingentium, & ad unam diametrorum, æquale erit triangulo, quod ad eandem contingentem, & ad alteram diametrum constituitur.

Sint oppositæ sectiones, quarū-diametri aec , bcd , & sectionem ab contingat rectæ lineæ af , bg conuenientes inter se in pūcto h : sumatur autem aliquod punctum k in sectione, à quo æquidistantes contingentibus ducantur klm , knx . Dico quadrilaterum kf æquale esse triangulo ain . Quoniam enim oppositæ sectiones sunt abc d : & sectionem ab contingit recta linea af , ipsis bd occurrens: & ducta est kl æquidistans af : triangulum ain quadrilatero kf æquale erit.



FED. COMMANDINVS.

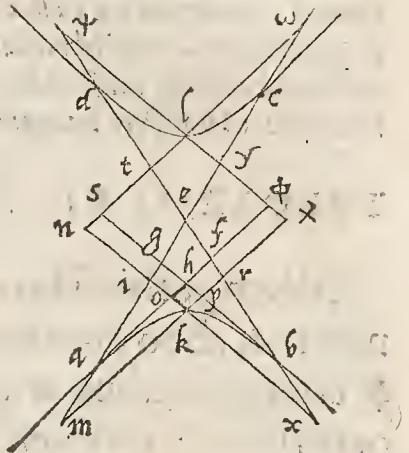
Triangulum ain quadrilatero kf æquale erit.] In figura enim, quæ hic apponi solet, uidelicet habente punctum k in sectione ab ; quanquam ad secundam propositionem huius magis pertinere videatur: sit punctum o , ubi linea Km diametrum ac secat. ergo ex ijs, quæ demonstrata sunt in quinquagesima primi, vel ex secunda huius, triangulum kon æquale est quadrilatero $aomf$: & apposito communi $aiko$, triangulum ain quadrilatero kf est æquale. In prima uero earum, quas nos addidimus: quæ scilicet punctum k in sectione cd habet inter c & d : ducatur co p sectionem contingens. erit triangulum con æquale quadrilatero kdp : & apposito communi oe , triangulum cpe , hoc est triangulum bge , hoc est afe æquale quadrilatero ke . rursus apponatur commune ei . triangulum igitur ain quadrilatero kf æquale erit. sed in secunda figura, quæ punctum k habet in sectione dc extra c : triangulum kon æquale est quadrilatero op : & triangulum afe æquale triangulo cpe . ergo communi $feoi$ apposito, erit triangulum ain quadrilatero kf æquale.



THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Iisdem positis si in utraque sectione aliqua puncta sumantur: & ab ipsis ducantur lineæ contingentibus æquidistantes, quæ & contingentibus, & diametris occurrant: quadrilatera à lineis ductis constituta ad diametros inter se æqualia erunt.

Ponantur enim eadem, quæ supra: & in utraque sectione puncta Kl sumantur: per quæ ducantur $m k$ pr x , $n s t$ l w ipsi a f æquidistantes: & n i o k x, $\chi \phi y l$ æquidistantes b g. Dico ea evenire, quæ in propositione dicta sunt. nam
z. huius. cum triangulum a o i quadrilatero r o æquale sit, communne apponatur e o. erit totum triangulum a e f æquale quadrilatero k e. est autem & b g e triangulum quadrilatero l e æquale: & triangulum a e f triangulo b g e. ergo & quadrilaterum l e æquale est quadrilatero i k r e. commune apponatur n e. totum igitur t k toti il: & ky ipsi r l æquale erit.



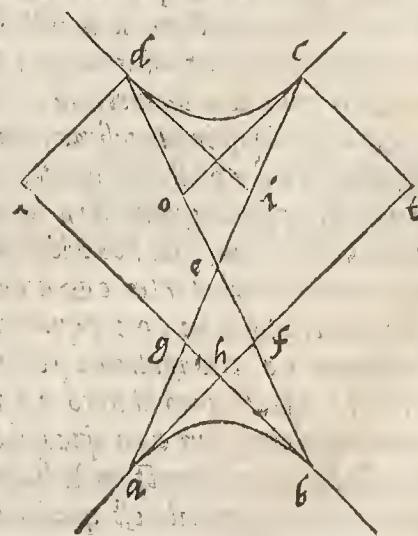
FED. COMMANDINVS.

Est autem & b g e triangulum quadrilatero l e æquale.] Hoc nos demonstrauimus in antecedente, sed cum triangulum a f e sit æquale quadrilatero l e, quod etiam demonstrauimus, fortasse licebit illud, quod propositum est expeditius ostendere absque triangulo b g e. Quoniam enim triangulum a e f æquale est quadrilatero k e: & est æquale quadrilatero l e, erit & quadrilaterum l e ipsi k e æquale: & communi apposito n e, totum t k toti il: & totum Ky toti r l æquale erit.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Iisdem positis pro punctis k l sumantur c d, in quibus diametri cum sectionibus conueniant: & per ipsa contingentibus æquidistantes ducantur. Dico d g quadrilaterum quadrilatero f c: & quadrilaterum x i quadrilatero t o æquale esse.

- A B 4. sexti Quoniam enim triangulum a g h ostensum est æquale triangulo b h f: & linea, quæ à punto a dicitur ad b æquidistat linea à punto g ad f ductæ: erit ut a e ad e g, ita b g ad e f: & per conversionem rationis, ut e a ad a g, ita e b ad b f, est autem ut ca ad a e, ita d b ad b e: utraque enim utriusque est dupla. ergo ex æquali, ut ca ad a g, ita d b ad b f: & sunt
- C triangula similia propter lineas æquidistantes. ut igitur c t à triangulum ad triangulum a h g, ita triangulum x d b ad triangulum b h f: & permutando. triangulum autem a h g æquale est triangulo b h f. ergo & c t a triangulum triangulo x d b: est æquale. quorum triangulum a h g æquale est triangulo b h f, ut ostensum est. reliquum igitur quadrilaterum d h est æquale quadrilatero c h: & propterea quadrilateru d g quadrilatero c f. Itaque quoniam c o æquidistat a f, triangulum c o e æquale est triangulo a f e. similiter autem & triangulum d e i triangulo b e g: sed b e g triangulum triangulo a e f est æquale. ergo & triangulum c o e triangulo d i e estq; gd quadrilaterum æquale quadrilatero f c. totum igitur x i toti o t æquale erit.



FED.

F. E. D. C O M M A N D I N V S.

Quoniam enim triangulum $a\bar{g}h$ ostensum est æquale triangulo $b\bar{h}f$.] In r. huius. A
Et linea, quæ à puncto a dicitur ad b æquidistat lineæ à punto g ad f ductæ.] B
Hoc ex primo lemmate Pappi apparere potest.

Vt igitur cta triangulum ad triangulum $a\bar{h}g$, ita triangulum $x\bar{d}b$ ad triangulum $b\bar{h}f$.] C
Quoniam enim ut $c\bar{a}$ ad $a\bar{g}$, ita est $d\bar{b}$ ad $b\bar{f}$, erit ut quadratum $c\bar{a}$ ad quadratum $a\bar{g}$,
ita quadratum $d\bar{b}$ ad quadratum $b\bar{f}$. ut autem quadratum $c\bar{a}$ ad quadratum $a\bar{g}$, ita triangulum
 $c\bar{t}\bar{a}$ ad triangulum $g\bar{h}\bar{a}$: quod triangula similia sint: & eadem ratione ut quadratum $d\bar{b}$ ad qua-
dratum $b\bar{f}$, ita triangulum $x\bar{d}b$ ad triangulum $h\bar{f}b$, ex tertio lemmate Pappi. ergo ut $c\bar{t}\bar{a}$ trian-
gulum ad triangulum $g\bar{h}\bar{a}$, ita triangulum $x\bar{d}b$ ad triangulum $h\bar{f}b$.

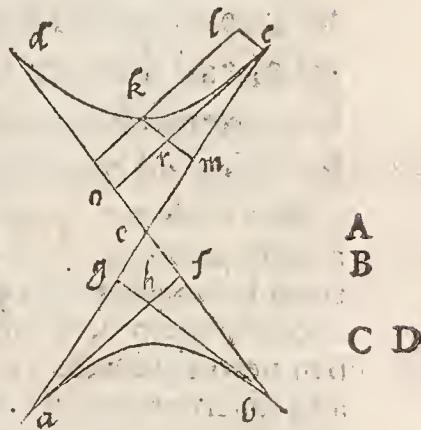
Itaque quoniam co æquidistat $a\bar{f}$, triangulum coe æquale est triangulo $a\bar{f}e$.] D
Sunt enim triangula coe, afe similia: & est ae æqualis. ec. quare sequitur, ut & alia latera,
& idcirco ipsa triangula inter se æqualia sint.

Sed $b\bar{e}\bar{g}$ triangulum triangulo $a\bar{e}\bar{f}$ est æquale.] Ostensum est hoc in prima huius. E

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

IIS DEM positis, si alterum quidem punctum sit
inter diametros, ut k ; alterum uero sit idem, quod
unum punctorum $c\bar{d}$, ut c : & æquidistantes ducan-
tur. Dico triangulum $c\bar{e}\bar{o}$ æquale esse quadrilate-
ro $K\bar{e}$: & quadrilaterum $l\bar{o}\bar{m}$ æquale ipsi $l\bar{m}$.

Illud uero perspicue appetet. nam cum demonstratum sit
 $c\bar{e}\bar{o}$ triangulum æquale triâgulo $a\bar{e}\bar{f}$: triangulumq; $a\bar{e}\bar{f}$ æqua-
le quadrilatero $K\bar{e}$: & triangulum $c\bar{e}\bar{o}$ quadrilatero $K\bar{e}$ æqua-
le erit. ergo & triangulum $c\bar{r}\bar{m}$ quadrilatero $K\bar{o}$: & quadri-
laterum $l\bar{m}$ quadrilatero $l\bar{o}$ est æquale.



F. E. D. C O M M A N D I N V S.

Nam cum demonstratum sit $c\bar{e}\bar{o}$ triangulum æquale triâgulo $a\bar{e}\bar{f}$.] In quarta huius. A

Triangulumq; $a\bar{e}\bar{f}$ æquale quadrilatero $K\bar{e}$.] Hoc nos supra demonstrauimus in se- B
xtam huius.

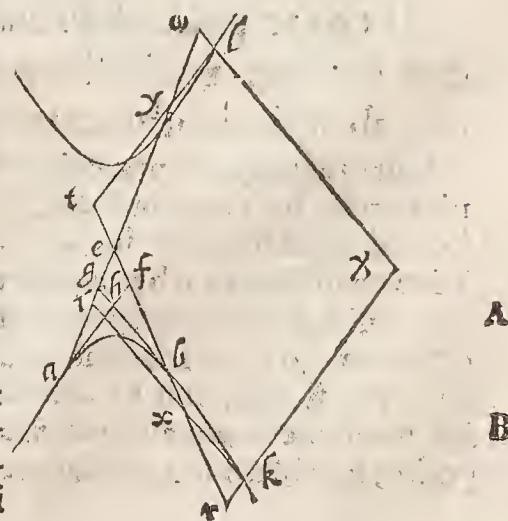
Ergo & triangulum $c\bar{r}\bar{m}$ quadrilatero $K\bar{o}$.] Ablato nimirum communi quadrilatero C
 $o\bar{m}$. Atqui hoc prius per se patet ex secunda huius; linea enim $c\bar{o}$ sectionem contingit: ex quo
contra sequitur, apposito communi $o\bar{m}$, triangulum $c\bar{e}\bar{o}$ quadrilatero $K\bar{e}$ æquale esse.

Et quadrilaterum $l\bar{m}$ quadrilatero $l\bar{o}$ est æquale.] Nam cum triangulum $c\bar{e}\bar{o}$ æqua- D
le sit quadrilatero $K\bar{o}$, communi apposito $l\bar{r}$, erit $l\bar{m}$ quadrilaterum quadrilatero $l\bar{o}$ æquale.

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

IIS DEM positis sumantur $\kappa\bar{l}$, non tamen
in punctis, in quibus diametri sectionibus oc-
currunt. demonstrandum est quadrilaterum
 $l\bar{t}\bar{r}\bar{x}$ quadrilatero $\omega\bar{x}\bar{\kappa}\bar{i}$ æquale esse.

Quoniam enim rectæ lineæ $a\bar{s}, b\bar{g}$ sectionem con-
tingunt; & per tactus diametri $a\bar{e}, b\bar{e}$ ducuntur; &
sunt $l\bar{t}, \kappa\bar{i}$ contingentibus æquidistantes: triangulum
 $t\bar{y}\bar{e}$ maius est quam triangulum $y\bar{\omega}\bar{l}$, triangulo $e\bar{a}$.
similiter & triangulum $x\bar{e}\bar{i}$ maius est, quam triangu-
lum $x\bar{r}\bar{\kappa}$, triangulo $b\bar{e}\bar{g}$. sed triangulum $a\bar{e}\bar{f}$ æqua-
le est triangulo $b\bar{e}\bar{g}$. quare eodem excessu & triangu-
lum $t\bar{y}\bar{e}$ excedit triangulum $y\bar{\omega}\bar{l}$, & triangulum $x\bar{e}\bar{i}$



APOLLONII PERGAEI

C excedit ipsum xrk . triangulum igitur tye unà cum triangulo xrk æquale est triangulo xei unà cum triangulo ywl . commune apponatur $kxeylx$. ergo quadrilaterum ltx quadrilatero wxi est æquale.

FE D. COMMANDINVS.

A Triangulum tye maius est quām triangulum ywl , triangulo $e fa$.] Ex quadragesimæ tertia primi huius.

B Sed triangulum aef æquale est triangulo beg .] Ex prima huius.

C Triangulum igitur tye unà cum triangulo xrk æquale est triangulo xei unà cum triangulo ywl .] Hoc demonstravit Eutocius in commentarijs in quadragesimam octauam 2. huius.

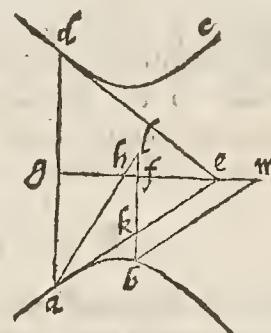
THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

IISDEM positis si in quavis sectione punctum sumatur: & ab ipso lineaæ æquidistantes ducantur; una quidem contingentæ æquidistans; altera uero æquidistans ei, quæ tactus coniungit: triangulum, quod ab ipsis fit ad diametrum per occursum contingentium ductam, à triangulo contento linea contingente, & diametro per tactum, differt triangulo, quod ad contingentium occursum constituitur.

Sint sectiones oppositæ ab, cd : & lineaæ contingentes aed, e , quæ in punto e sibi ipsis occurrant. sit autem centrum h : iunganturq; $ad, & ehg$: & sumpto in sectione ab

quouis punto b , ducatur bfl quidem ipsi ag æquidistans $b m$ uero æquidistans $a e$. Dico triangulum $b fm$ à triangulo akl differre triangulo kef . Lineam enim ad ab ipsa eh bifurciam secari perspicuum est: & eh diametrum esse coniugata ei, quæ per h ducta ipsi ad æquidistat. quare ag applicata a est ad eg . Quoniam igitur ge diameter est; lineaq; $a e$ sectionem contingit: & applicata est ag : sumpto autem in sectione punto b ; $ad eg$ applicatur $b f$, ipsi ag æquidistans; & $b m$ æquidistans $a e$: triangulum $b mf$ à triangulo lhf differt quadrilatero hae . ergo $b mf$ triangulum à triangulo akl differt kfe triangulo.

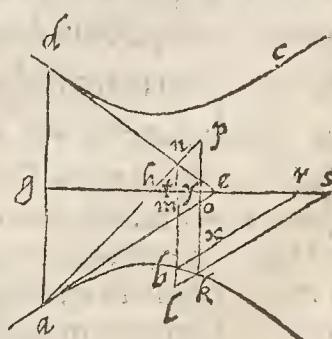
Constat igitur quadrilaterum $b k e m$ triangulo lka æquale esse.



THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

IISDEM positis si in una sectione sumantur duo puncta: & ab utrisque similiter æquidistantes ducantur: quadrilatera ab ipsis constituta inter se æqualia erunt.

Sint eadem, quæ supra: & in sectione ab sumantur quævis puncta $b x$; à quibus ducantur lineaæ $b l m n, k x o y p$ ipsi ad æquidistantes: itemq; $b x r, k l s$ æquidistantes $a e$. Dico quadrilaterum $b p$ æquale esse quadrilatero $k r$. Quoniam enim demonstratum est triangulum $a op$ æquale quadrilatero $k o e s$; & triangulum $a m n$ æquale quadrilatero $b m e r$: erit reliquum $k r$ deficiens quadrilatero $b o$, uel ipsum assumens, æquale quadrilatero $m p$: & communis apposito, uel ablato $b o$, quadrilaterum $b p$ quadrilatero $x s$ æquale erit.



FED.

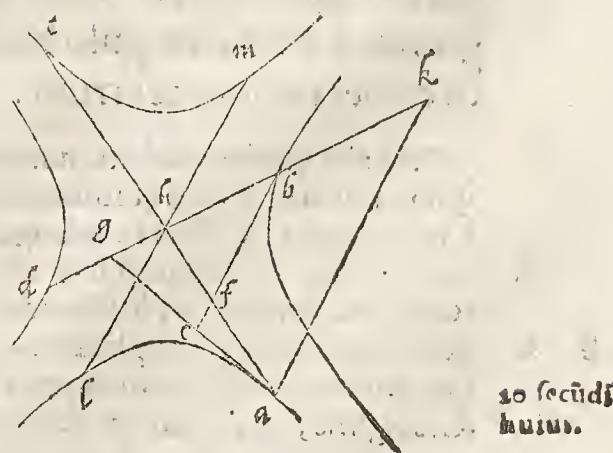
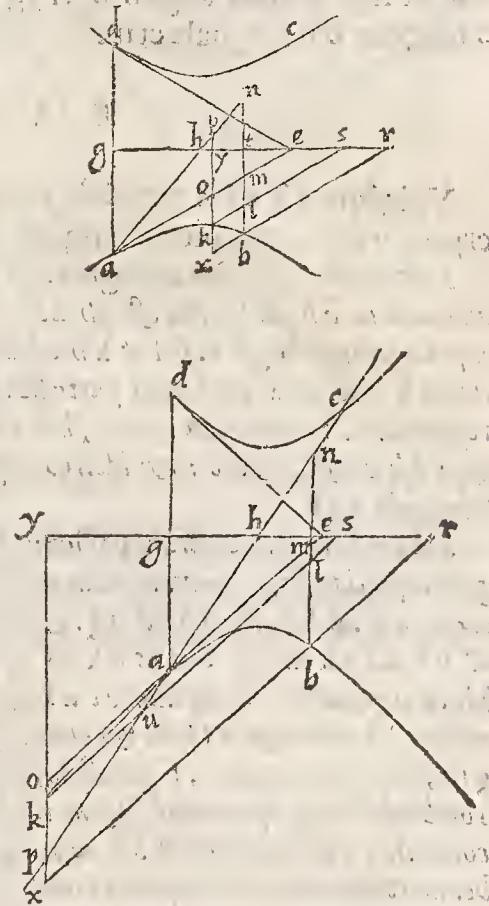
FED. COMMAN D I N V S.

Quoniam enim demonstratum est, triangulum aop æquale quadrilatero $k o e s$: & triangulum amn æquale quadrilatero $bmer$. Demonstratur hoc in antecedente. triangulum namque ksy maius est, quam triangulum phy , triangulo hae , ex quadragesima quinta primi huius. sed triangulus apo una cum triangulo yoe æquale est triangulo phy una cum triangulo hae . quare sequitur triangulum ksy maius esse, quam triangulum aop , triangulo yoe : & dempto communi yoe , reliquum aop triangulum quadrilatero $k o e s$ est æquale. Rursus linea bn secet diametrum eh in punto t . erit triangulum brt maius, quam triangulum nbt , triangulo hae . triangulum autem amn una cum ipso etm æquale est triangulo nbt una cum hae . ergo triangulum brt maius erit, quam triangulum amn , triangulo etm : & dempto communi triangulo etm , quod relinquitur triangulum amn quadrilatero $bmer$ æquale erit. Itaque in prima figura, cum triangulum aop excedat triangulum amn , quadrilatero $m p$: & quadrilaterum $k o e s$ excedat $bmer$ quadrilatero $k r$, dempto tamen ex eo prius quadrilatero $b o$. si ipsum $b o$ quadrilaterum utrinque apponatur, erit quadrilaterum Kr , hoc est $x's$ quadrilatero $b p$ æquale. In secunda uero figura triangulum amn excedit triangulum aop , quadrilatero $m p$: & quadrilaterum $bmer$ excedit $k o e s$, quadrilatero $k r$, dempto tamen ex eo quadrilatero $b o$: quare $b o$ utriusque addito, erit quadrilaterum $k r$ æquale quadrilatero lp . Denique in tertia figura, quoniam triangulum aop est æquale quadrilatero $k o e s$, dempto communi $k o au$, reliquum triangulum ukp æquale erit quadrilatero $uae s$. est autem triangulo amn æquale quadrilaterum $bmer$. triangulum igitur ukp una cum quadrilatero $bmer$, æquale est triangulo amn una cum quadrilatero $uae s$: & dempto ex utrisque communi $lmes$, reliquum ukp triangulum una cum $blsr$ est æquale triangulo amn una cum uam . Quod si utrisque addatur commune $x pulb$, erit quadrilaterum $k r$ æquale quadrilatero $xpn b$. simili ratione & alia eiusmodi demonstrare licebit.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

Si in oppositis sectionibus, quæ coniugatæ appellantur, rectæ lineæ contingentes sectiones, quæ deinceps sunt, in unum punctum conueniant; & per tactus diametri ducantur: triangula, quorum communis uer tex est sectionum centrum, inter se æqualia erunt.

Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatæ appellantur $ab cd$; & sectiones ab contingentes rectæ lineæ $a e$, $b e$ in punto e conuenientes: sit autem centrum h , & iunctæ ah , bh ad cd producantur. Dico $b fh$ triangulum triangulo agh æquale esse. ducantur enim per ah lineæ ak , hl in ipsi be æquidistantes. & quoniam bf sectionem contingit, & per tactum diameter est dhb : diciturq; lm æquidistans be ; erit lm diameter coniugata ipsi



38. primi
huius.
14. sexti.

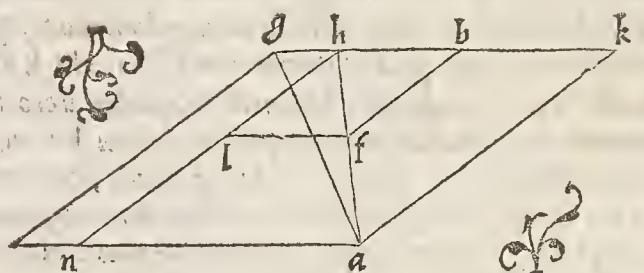
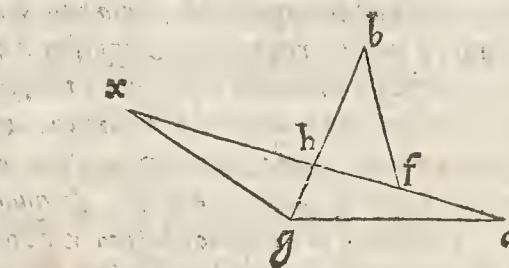
db ; quæ secunda diameter appellatur; & propterea ak ad bd ordinatim est applicata. contingit autem ag . ergo rectangulum khg æquale est quadrato bh : & ut Kh ad hb , ita bh ad hg . sed ut kh ad hb , ita ka ad bf ; & ah ad hf . ut igitur ah ad hf , ita bh ad hg . & sunt anguli bhf , ghf duobus rectis æquales. ergo agh triangulum triangulo bhf æquale erit.

E V T O M C I V S.

Vt igitur ah ad hf , ita bh ad hg . & sunt anguli bhf , ghf duobus rectis æquales. ergo agh triangulum triangulo bhf æquale erit.

Describantur seorsum triangula: & producta ab ad x , fiat ut gh ad hb , ita fb ad bx . Itaque quoniam ut bh ad hg , ita est ab ad hf : erit ah ipsi bx æqualis. & propterea triangulum agh æquale triangulo gbx . sed ut xh ad hf , ita bh ad hg : & circa æquales angulos, qui sunt ad uerticem h latera ex contraria parte sibi ipsis respondent. triangulum igitur fbh triangulo gbx est æquale: & idcirco æquale triangulo agh .

Sed & aliter demonstrare possumus triangula æqualia esse. Quoniam enim ostensum est, ut kb ad hb , ita bb ad hg : & ut kl ad hb , ita ak ad bf : erit ut ak ad bf , ita bb ad hg : quare rectangulum ex ak & hg æquale est rectangulo fbh . & cum anguli gbh , hbh sint æquales, si parallelogramma romboidea descripserimus, iisdem lateribus contenta, quæ angulos ad bb æquales habent, etiam inter se æqualia erunt, propterea quod latera ex contraria parte sibi ipsis respondent: atque erit romboides $fbhl$ in angulo b trianguli hbh duplum; cuius quidem diameter est fb : romboides autem, quod continetur gh , & linea æquali ak , uidelicet hl in angulo gbn ; duplum trianguli agh . sunt enim in eadem basi gh , & sub eadem linea, quæ à puncto a ducitur ipsi gh æquidistans. triangulum igitur agh triangulo fbh æquale esse manifesto constat.



THEOREMA XLI. PROPOSITIO XLI.

IIS DEM positis, si in quavis sectione punctum sumatur: & ab ipso ducantur lineæ æquidistantes contingentibus usque ad diametros: triangulum, quod ad centrum constituitur, à triangulo circa eundem angulum differt triangulo basim habente lineam contingentem, & uerticem sectionum centrum.

Sint alia quidem eadem; sumatur autem punctum in b sectione, quod sit x ; & per ipsum ducatur xrs æquidistans ag ; & xot æquidistans be . Dico triangulum oh à triangulo xts differre triangulo hbf . ducatur enim à punto a linea ay ipsi bf æquidistans. quoniam igitur ex iis, quæ dicta sunt, sectionis al diameter est lm :

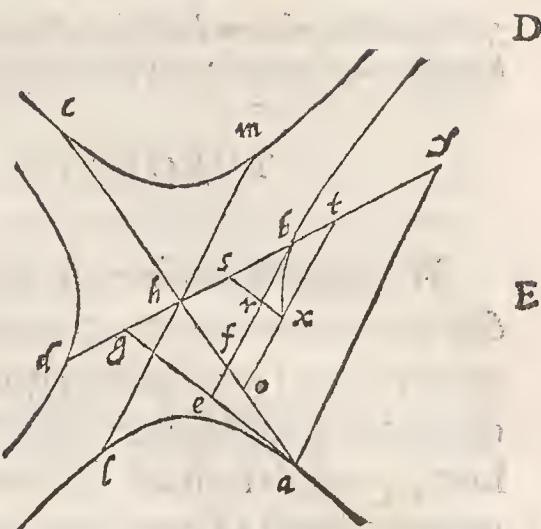
A coniugata autem ipsi, & secunda diameter dhb : atque à punto a ducitur ag sectionem contingentem;

B C & applicata est ay , quæ ipsi lm æquidistat: habebit ay ad yg proportionem compositam ex proportione hy ad ya : & ex proportione transuersi lateris figuræ, quæ fit ad lm ad latus rectum. sed ut ay ad yg , ita xt ad ts . & ut hy ad

ya , ita

ya, ita ht ad to, & hb ad bf. ut autem figuræ, quæ ad lm, transuersum latus ad rectum, ita figuræ, quæ ad bd rectum latus ad transuersum. ergo xt ad ts proportionem habebit compositam ex proportione hb ad bf, hoc est ht ad to; & ex proportione recti lateris figuræ, quæ est ad bd, ad latus transuersum. quare per ea, quæ demonstrata sunt in quadragesimo primo theoremate primi libri, triangulum tho à triangulo xts differt triangulo bfh: & propterea trianguloagh.

FED. COMMANDINVS.



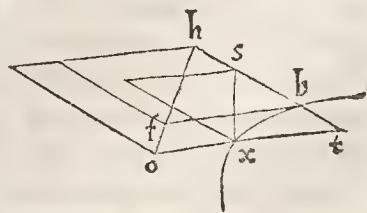
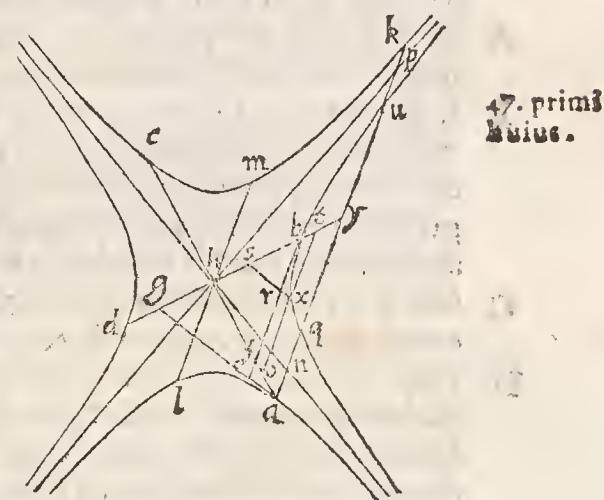
Quoniam igitur ex iis, quæ dicta sunt sectionis al diameter est lh m: coniugata autem ipsi, & secunda diameter dhb.] Hoc ex uigesima propositione secundi libri Apollonij constare potest: sed tamen nos ex alijs demonstrare conabimur. Producatur enim ay usq; ad sectionem cm in k, quæ sectionem b secet in punctis quu: conueniet enim ay cum ultraque sectione al, cm in uno tantum punto, quod in sexta decima secundi huius demonstratur: & erunt ay, yk inter se æquales ductis namque sectionum asymptotis nh, hp, linea an est æqualis pk ex sexta decima, quam diximus: & nq æqualis up, ex octava eiusdem: sed & qy æqualis est yu, quod qu contingentib; be æquidistet. ergo ay, yk inter se æquales sunt. Itaque quoniam linea ak oppositas sectiones al, cm secut, non transiens per centrum: & à punto ipsius medio y ad centrum h ducitur ybh: erit ex trigesima septima secundi huius dhb oppositarum sectionum diameter, quæ recta appellatur; lh m uero, quæ æquidistat ak, transuersa ipsi coniugata. Potest etiam hoc ostendti ex quadragesima tertia eiusdem. nam cum linea qu sectionem b in duobus punctis secet: & per centrum h ad medium quidem lineæ qu ducta sit hy: lh m uero ipsi æquidistans: erunt lm, bd sectionum coniugatæ diametri: & id circa sectionis al diameter est lm; & db ipsi coniugata, & secunda diameter.

Et applicata est ay, quæ ipsi lm æquidistat.] Applicatur enim ay ad diametrum db ordinatim, quoniam ut demonstrauimus, linea ak ab ipsa db bifariam secatur.

Habebit ay ad yg proportionem compositam ex proportione hy ad ya, & ex proportione transuersi lateris figuræ, quæ fit ad lm, ad latus rectum.] Ex quadragesima primi huius: recta enim linea ag sectionem al contingens cum secunda diametro conuenit: & à punto a ad eandem diametrum applicatur ay, alteri diametro lm æquidistans, ut ostendimus.

Vt autem figuræ, quæ ad lm transuersum latus ad rectum, ita figuræ ad bd rectum latus ad transuersum.] Hoc ita esse nos demonstrauimus in commentarijs in uigesimam secundi huius.

Quare per ea, quæ demonstrata sunt in quadragesimo primo theoremate primi libri, triangulum tho à triangulo xts differt triangulo bfh: & propterea triangulo agh.] Describantur enim à lineis xt, hb, bt parallelogramma equiangula xts, bbf, bto in triangulorum angulis. & quoniam lineæ xt in sectione b ad diametrum ordinatim applicatur: habetq; xt ad ts proportionem compositam ex proportione hb ad bf: & proportione recti lateris ad transuersum: & est parallelogrammum bto simile parallelogrammo bbf, quod triangulum triangulo simile: erit ex quadragesima prima primi huius parallelogrammum bto maius, quam parallelogrammum xts, parallelogrammo bbf. sed parallelo-



A P O L L O N I I P E R G A E I

gramma triangulorum dupla sunt. triangulum igitur bto à triangulo xts differt triangulo bbf , hoc est triangulo agh , quod ipsi bbf est æquale, ex antecedenti.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Si unam oppositarum sectionum, quæ coniugatæ appellantur, reæ lineæ contingentes conueniant; & per tactus diametri ducantur: sumatur autem punctum in quavis sectionum coniugatarum: & ab ipso ducantur æquidistantes contingentibus usque ad diametros: triangulum, quod ab ipsis ad sectionem constituitur, maius est, quam triangulum, quod ad centrum, triangulo basim habente lineam contingentem, & uerticem centrum sectionum.

Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatæ dicuntur; ab, gs, t, x , quarum centrum h : & sectionem ab contingant $ad e, bd c$: & per tactus ab diametri ahf, bht ducantur. Sumatur autem in gs sectione punctum s ; à quo ducatur sfl ipsi bc æquidistantis, & sy æquidistantis ae . Dico sly triangulum maius esse, quam triangulum hlf , triangulo hcb . ducatur enim per h, x, hg æquidistantis bc : & per g ipsi ae æquidistantis ducatur xig : & $s o$ æquidistantis bt . quare perspicuum est diametrum xg coniugatam esse ipsi bt : & so , quæ æquidistant bt ad hg ordinatim esse applicatam: itemq; parallelogrammū esse slh . quoniam igitur bc sectionem contingit; duciturq; bh per tactum; & contingit altera ae : fiat ut db ad be , ita linea $m n$ ad duplam ipsius bc : erit $m n$ linea, quæ figuræ ad bt constitutæ rectum latus appellatur. ergo secta $m n$ bifariam in p , ut db ad be , ita est mp ad bc . Deinde fiat ut xg ad tb , ita tb ad lineam r . erit & r latus rectum figuræ, quæ fit ad xg . Itaque quoniam ut db ad be , ita mp ad cb : & ut db ad bc , ita quadratum db ad dbe rectangulum: ut autem mp ad cb , ita rectangulum ex mp & bh ad rectangulum cuh : erit ut quadratum db ad rectangulum dbe , ita rectangulum ex mp & bh ad rectangulum cuh . Sed rectangulum ex mp , & bh æquale est quadrato hg : propterea quod

Iem in 22
decimi
1. sexti.

20. sexti.

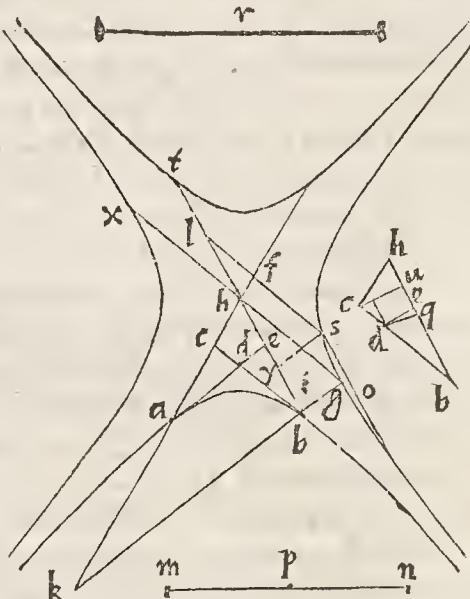
9. quinti.

15. quinti

H K

quadratum xg est æquale rectangulo ex tb & mn : & rectangulū ex mp & bh quarta pars est rectanguli ex tb , & mn : quadratum uero gh est item quarta pars quadrati xg . ut igitur quadratum db ad rectangulum dbe , ita est quadratum gh ad rectangulum cuh : & permutando ut quadratum db ad quadratum gh , ita rectangulum dbe ad cuh rectangulum. sed ut quadratum db ad quadratum gh , ita triangulum dbe

F ad triangulum ghi ; similia enim sunt: & ut rectangulum dbe ad rectangulum cuh , ita dbe triangulum ad triangulum cuh . ut ergo triangulum dbe ad triangulum ghi , ita triangulum dbe ad ipsum cuh triangulum. quare triangulum ghi triangulo cuh est æquale: & idcirco triangulum ghk à triangulo hiK differt, triangulo ghi ; hoc est triangulo cuh . Rursus quoniam hb ad bc compositam proportionem habet ex proportione hb ad mp , & ex proportione mp ad bc : & ut hb ad mp , ita tb ad mn , & linea r ad xg . ut autem mp ad bc , ita db ad be : habebit hb ad bc proportionem compositā ex proportione db ad be ; & proportione r ad xg . Quod cum æquidistent bc, sl ; triangulum hcb simile est triangulo hlf : & ob id ut hb ad bc , ita



$b c$, ita est $h l$ ad $l f$. quare $b l$ ad $l f$ compositam proportionem habet ex proportione linea r ad $x g$; & proportione $d b$ ad $b e$; hoc est $g h$ ad $h i$. Quoniam igitur hyperbole est $s g$, cuius diameter quidem $x g$, rectum uero latus r : & ab aliquo ipsius puncto s applicatur $s o$: describitur q ; ab ea, quæ ex centro, uidelicet ab $h g$ figura $h i g$: & ab applicata $s o$, uel $h l$ ipsi æquali figura $h l f$ ab $h o$ autem, quæ est inter centrum & applicatam, uel ab $s l$ ipsi $h o$ æquali describitur $s l y$ figura, similis figuræ $h i g$, quæ fit ab $e a$, quæ ex centro: & proportiones habet compositas, ut dictum est: erit triangulum $s l y$ maius, quam $h l f$ triangulum, triangulo $h c b$. L

F E D. C O M M A N D I N V S.

Quare perspicuum est diametrum $x g$ coniugatam esse ipsi $b t$.] Ex uigesima secundi A
huius: linea enim $b c$ sectionem contingit: & per centrum b ducitur $t h b$ quidem ad tactum: $x b g$
uero contingenti æquidistantis.

Et $s o$, quæ æquidistat $b t$ ad $h g o$ ordinatim esse applicatam.] Si enim per g ducatur B
linea sectionem contingens, & æquidistabit ipsi $t h b$ ex eadem uigesima secundi, quare & ipsi $s o$: pro-
pterea q; ex quadragezima septima primi huius $s o$ ad $h g o$ ordinatim erit applicata.

Erit $m n$ linea, quæ figuræ ad $b t$ constitutæ rectum latus appellatur.] Ex quinqua- C
gesima primi huius.

Erit & r rectum latus figuræ, quæ fit ad $x g$.] Est enim sectionis $s g$ diameter, siue trans- D
uersum latus $x g$: & $b t$ secunda diameter ipsi coniugata, ut dictum est. secunda autem diameter
medium proportionem habet inter figuræ latera, quod ex eius diffinitione apparet.

Propterea quòd quadratum $x g$ æquale est rectangulo ex $t b$ & $m n$.] Ex diffinitio- E
ne secunda diametri: nam $x g$ secunda diameter est sectionis $a b$, cuius quidem transuersum latus
est $t b$, rectum uero $m n$.

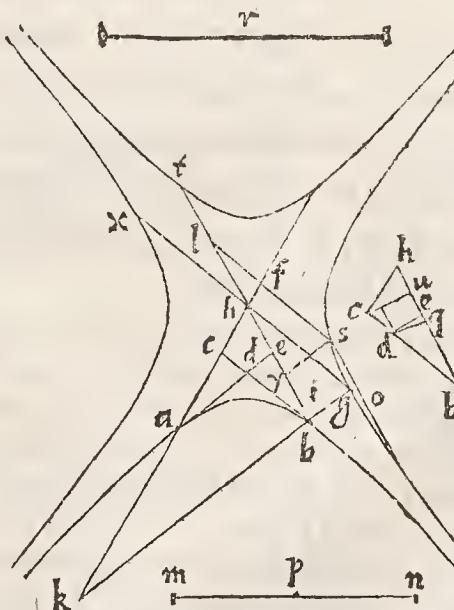
Sed ut quadratum $d b$ ad quadratum $g h$; ita triangulum $d b e$ ad triangulum $g h i$, F
similia enim sunt.] Triangula enim $d b e$, $g h i$ similia sunt ob æquidistantiam linearum $d b$, $h g$:
itemq; linearum $a e$, $K g$. quare triangulum $d b e$ ad ipsum $g h i$ duplam proportionem habet eius, G
quæ est linea $d b$ ad $g h$. & similiter quadratum $d b$ ad quadratum $g h$ proportionē habet eiusdem
proportionis duplam. ut igitur quadratum $d b$ ad quadratum $g h$, ita triangulum $d b e$ ad trian-
gulum $g h i$. ^{19. sexti.}

Et ut rectangulum $d b e$ ad rectangulum $c b h$, ita $d b e$ triangulum ad triangulum $c b h$.] Describantur seorsum triangula $d b e$, $c b h$: & ducantur perpendiculares $d q$, $c u$, erunt $d b q$ $c b u$ triangula inter se similia. quare ut $d q$ ad $d b$, ita est $c u$ ad $c b$: ut autem $d q$ ad $d b$, ita rectangu-
lum ex $d q$ & $b e$ ad rectangulum $d b e$, ex prima
sexti elementorum: & eadem ratione ut $c u$ ad $c b$
ita rectangulum ex $c u$ & $b h$ ad rectangulum $c b h$.
ergo ut rectangulum ex $d q$ & $b e$ ad rectangulum
 $d b e$, ita rectangulum ex $c u$ & $b h$ ad rectangulum
 $c b h$: & permutando, rectangulum ex $d q$ & $b e$ ad
rectangulum ex $c u$ & $b h$, ut $d b e$ rectangulum
ad rectangulum $c b h$. rectangulum autem ex $d q$ &
 $b e$ duplum est trianguli $d b e$: & rectangulum ex
 $c u$, & $b h$ duplum trianguli $c b h$. ergo ut rectan-
gulum $d b e$ ad rectangulum $c b h$, ita $d b e$ triangu-
lum ad triangulum $c b h$.

Et linea r ad $x g$.] Ut enim figuræ, quæ ad $t b$ constituitur, transuersum latus $t b$ ad rectum $m n$, H
ita figuræ, quæ ad $x g$ rectum latus r ad $x g$ transuersum; quod nos in 20. secundi huius ostendimus.

Vt autem $m p$ ad $b c$, ita $d b$ ad $b e$.] Patuit hoc supra. K

Erit triangulum $s l y$ maius, quam $h l f$ triangulum, triangulo $h c b$.] Nam ex qua- L
dragezima prima primi huius sequitur triangulum $s l y$ maius esse, quam triangulum $h l f$, triangulo
 $g h i$; hoc est triangulo $c b h$, quod ipsi $g h i$ est æquale, ut ostensum est superius.

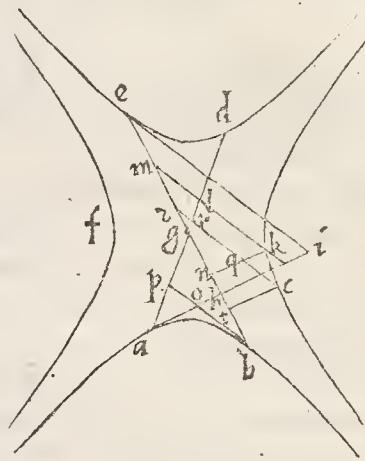


APOLLONII PERGAEI

Illud autem, quod hic demonstrat Apollonius, sequitur, etiam si rectæ lineæ sectiones oppositas contingant. Sint enim opposita sectiones, quæ coningata appellantur, ab c, de f, cuius centrum g: & sectiones ab d, e contingent rectæ lineæ ab i, ei in puncto i conuenientes: perq; ae ductis diametris agd, egb, sumatur in sectione c punctum k, à quo ducatur Klm quidem ipsi ei æquidistantis; & kn æquidistantis ai. Dico triangulum kmn maius esse, quam triangulum lmg, triangulo gab. Ducatur per b linea bo p sectionem in b contingens, quæ ipsi ei æquidistantib; ex demonstratis ab Eutocio in quadragesimam quartam huius. quare & km æquidistantib; b p. Itaque quoniam sectionem ab contingunt rectæ lineæ a o, ob: & à puncto k in sectione sumpto ducuntur klm, kn contingentibus æquidistantes: eodem modo, quo supra, demonstrabitur triangulum Kmn maius, quam triangulum lmg, triangulo gab. atque hoc est quod demonstrandum proponebatur. Ex iam dictis etiam illud Theorema ostendi potest.

Iisdem positis, si in qua uis sectione aliqua puncta sumantur: & ab ipsis ducantur lineæ contingentibus æquidistantes, quæ & contingentibus, & diametris occurràt; quadrilatera à lineis ductis constituta ad diametros inter se æqualia erunt.

Maneant enim eadem, quæ supra: & in sectione c aliud punctum sumatur, quod sit c; atque ab eo ducantur c qrs, ct contingentibus æquidistantes. Dico quadrilaterum klrq quadrilatero cqnt æquale esse. ex ijs enim, quæ demonstrata sunt, triangulum cst maius est, quam triangulum rsq, triangulo gab. quare quadrilaterum crgt triangulo gab est æquale. & simili ratione cum triangulum kmn maius sit, quam triangulum lmg, triangulo gab, erit & quadrilaterum klgæ æquale eidem gab triangulo. quadrilatera igitur crgt, klgæ inter se æqualia erunt: & dempto communi quadrilatero rgnq, relinquetur quadrilaterum klrq quadrilatero cqnt æquale; quod quidem demonstrare oportebat.



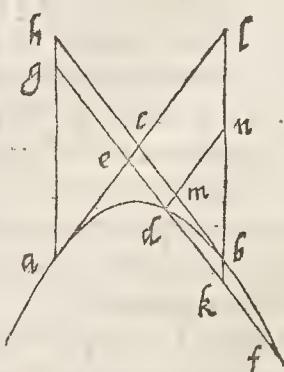
THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

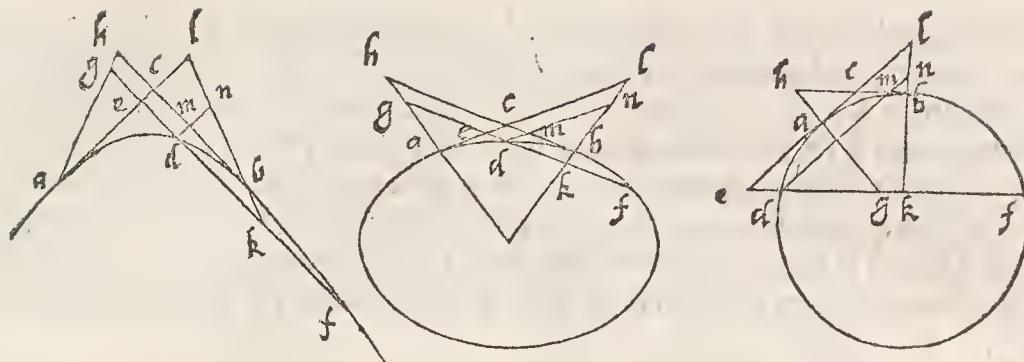
Si coni sectionem, uel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in unum conueniant: & ab aliquo puncto eorum, quæ sunt in sectione, ducatur linea uni contingentium æquidistantis, quæ & sectionem & alteram contingentium secet: ut quadrata contingentium inter se se, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ intericiuntur inter sectionem, & contingentem, ad quadratum lineæ inter æquidistantem & tactum interiectæ.

Sit coni sectio, uel circuli circumferentia ab, quam contingant rectæ lineæ ac, cb, in puncto c conuenientes: & sumpto aliquo puncto d in sectione, ab eo ducatur dk ipsi kf æqualem esse: triangulum q; aeg æquale: quadrilatero dl: & triangulum blc triangulo ach. Itaque quoniam fk

46. & 47.
primi
huius.
2. huius
1. huius
6. secundi
element.
3. lemma
Pappi:
19. quiti.

æqualis est kd; & ipsi adiicitur de; rectangulum fed una cum dk quadrato æquale erit quadrato ke. est autem triangulum elk simile triangulo dnk. quare & ek quadratum ad quadratum kd, ita triangulum elk ad triangulum dnk: & permuto ut totum quadratum ek ad totum triangulum elk, ita ablatum quadratum dk ad ablatum triangulum dnk. ergo & reliquum fed rectangulum ad reliquum quadrilaterum dl, ut quadratum ek ad trian-





ad triangulum elh. sed ut quadratum ek ad elk triangulum, ita est quadratum cb
ad triangulum lcb. ut igitur fed rectangulum ad quadrilaterum dl, ita quadratum
cb ad lcb triangulum. est autem quadrilaterum dl triangulo aeg æquale; & trian-
gulum lcb æquale triangulo ahc. quare ut rectangulum fed ad triangulum aeg,
ita quadratum cb ad ahc triangulum: & permutando ut rectangulum fed ad qua-
dratum cb, ita aeg triangulum ad triangulum ahc. sed ut triangulum age ad trian-
gulum ahc, ita quadratum ea ad ac quadratum. ergo ut rectangulum fed ad qua-
dratum cb, ita quadratum ea ad quadratum ac. & permuto ut quadratum bc ad
quadratum ca, ita fed rectangulum ad quadratum ea.

3. lemma
Pappi.

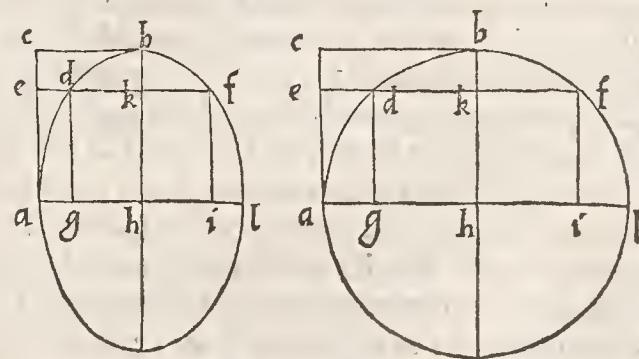
E V T O C I V S.

In aliquibus codicibus hoc theorema, ut septimum decimum apponitur. sed re uera casus est sex-
ti decimi theorematis; eo enim tantum differt, quod linea contingentis ac diametris æquidistant, alia uero eadem constat. In commentarijs igitur illud ponere oportebat, ut scripsimus in
quadragesimum primum theorema primi libri.

*Si in ellipsi & circulo diametri, quæ transeunt per tactus, contingentibus æqui-
distantes sint, eadem prorsus euident, quæ in propositione dicuntur.*

Quoniam enim ut quadratum
bh ad rectangulum lha, ita dg
quadratum ad rectangulum lga:
atque est rectangulum quidem lha
quadrato ah æquale: rectangulum
autem lga æquale rectangulo iag;
quod linea ah æqualis sit lh, &
dk ipsis kf proptereaq; gh æqua-
lis hi, & ag ipsis il: erit ut quadra-
tum ah ad hb quadratum, hoc
est quadratum bc ad quadratum
ca; ita rectangulum iag ad qua-
dratum dg; hoc est rectangulum
fed ad ea quadratum.

21. primi
huius.

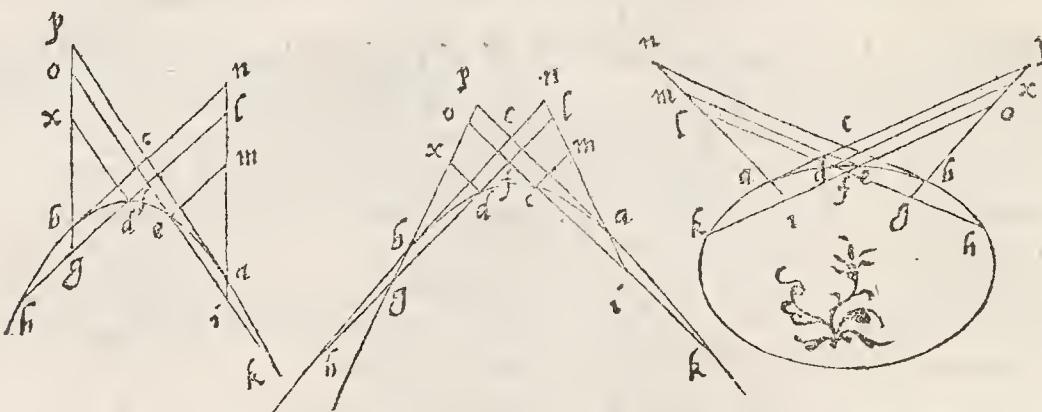


THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

Si coni sectionem, uel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ con-
tingentes in unum conueniant: sumantur autem in sectione duo quæ-
uis puncta: & ab ipsis ducantur lineæ contingentibus æquidistantes, quæ
& sibi ipsis & lineæ occurrant: ut quadrata contingentium inter se se,
ita erit rectangulum contentum lineis, quæ intericiuntur inter sectio-
nem & linearum occursum ad rectangulum, quod lineis similiter sum-
ptis continetur:

A P O L L O N I I P E R G A E I

A Sit coni sectio, uel circuli circumferentia ab, quam contingant ac, cb rectæ lineæ, in puncto c conuenientes: sumanturq; in sectione puncta de, & ab ipsis ducantur cf i k, df gh, quæ lineis ac, cb æquidistant. Dico ut quadratum ac ad cb quadratum, ita esse rectangulum kf ad rectangulum hfd. ducantur enim per ab diametri al mn, bo xp: & producātur contingentes lineæ; & ipsis æquidistantes usque ad diametros: & à punctis de æquidistantes contingentibus ducātur dx, em. Iam constat ki æqualem esse ie: & hg ipsi gd. Quoniam igitur kf secatur in partes æquales in punto i, & in partes inæquales in f: rectangulum kf unà cum fi quadrato æquale est
g. secudi



B quadrato ei: & cum triangula similia sint ob lineas æquidistantes, erit ut totum quadratum ei ad totum im e triangulnm, ita ablatum quadratum i f ad ablatum triangulum fi l. quare & reliquum kf rectangulum ad reliquum quadrilaterum fm, est ut totum quadratum ei ad totum im e triangulum. sed ut quadratum ei ad triangulum im e, ita quadratum ac ad triangulum can. ut igitur kf rectangulum ad quadrilaterum fm, ita quadratum ac ad can triangulum. atque est æquale triangulum can triangulo cpb, & quadrilaterum fm quadrilatero fx. ergo ut rectangulum kf ad fx quadrilaterum, ita quadratum ac ad triangulum cpb. similiter demonstrabitur & ut rectangulum hfd ad quadrilaterum fx, ita esse quadratum cb ad triangulum cpb. Itaque quoniam ut rectangulum kf ad quadrilaterum fx, ita quadratum ac ad cpb triangulum: & conuertendo, ut quadrilaterum fx ad rectangulum hfd, ita triangulum cpb ad quadratum cb: erit ex æquali ut quadratum ac ad cb quadratum, ita rectangulum kf ad rectangulum hfd.

C

D

E

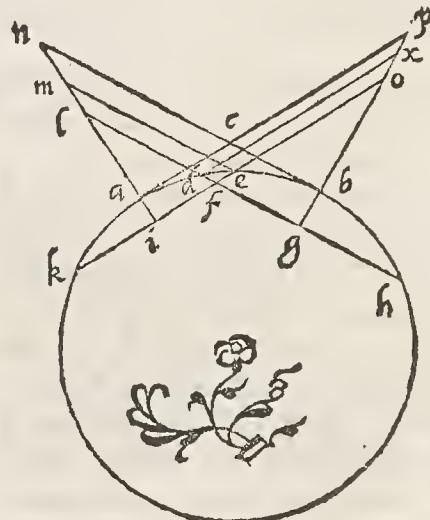
E V T O C I V S.

Hoc etiam theorema similiter ac præcedens positum est, quod nos ut casum auferentes, hoc loco conscripsimus.

Si in ellipsi, & circuli circumferentia diametri, quæ per tactus ducuntur, æquidistantes sint contingentibus ac, cb; erit itidem ut quadratum ac ad quadratum cb, ita rectangulum kf ad rectangulum dh.

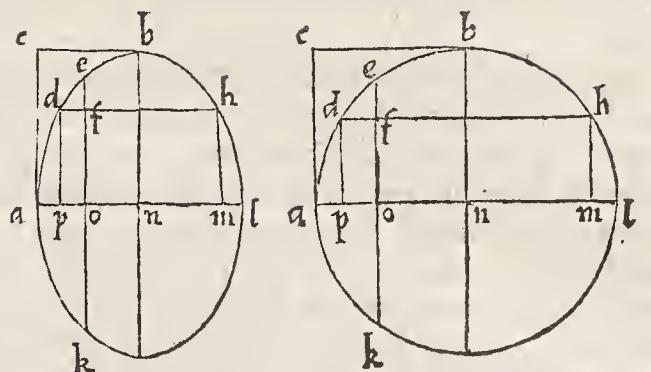
Ducantur enim per dh ordinatim applicatæ dp, hm. & quoniam ut quadratum ac ad cb quadratum, ita quadratum bn ad quadratum na, hoc est ad rectangulum anl. ut autem quadratum bn ad rectangulum anl, ita quadratum dp, hoc est quadratum fo ad rectangulum apl; & quadratum eo ad rectangulum aol: erit & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum. sed si à quadrato eo auferatur dp quadratum, hoc

21. primi
huius.



hoc est quadratum fo; relinquitur rectangulum Kfe: est enim Ko ipsi o e æqualis. rursus si à rectangulo aol auferatur rectangulum apl, relinquitur m op rectangulum, hoc est rectangulum hfd: namque ap est æqualis ml, & pn ipsi nn. ut igitur quadratum ac ad quadratum cb, ita reliquum rectangulum Kfe ad reliquum hfd. Quòd si punctum f extra sectionem cadat, additiones & ablationes contra facere oportebit.

§ secudi.



F E D . C O M M A N D I N V S .

Quoniam igitur Ke secatur in partes æquales in punto i, & in partes inæquales in f, rectangulum Kfe una cum fi quadrato æquale est quadrato ei.] Ita quidem argumentabimur cum punctum f intra sectionem cadit: sed cum cadit extra, in hunc modum dicemus. Quoniam ke in punto i bifariam secatur, & ipsi adjicitur recta linea ef; erit rectangulum kfe una cum ei quadrato æquale quadrato cf. sunt autem triangula fl i, emi inter se similia. quare cum sit ut totum quadratum if ad totum triangulum fl i, ita ablatum quadratum ei ad ablatum emi triangulum; erit & reliquum rectangulum kfe ad reliquum quadrilaterum fm, ut if quadratum ad triangulum fl i. cetera, quæ deinceps sequuntur, eodem modo concludemus.

Et cum triangula similia sint ob lineas æquidistantes, erit ut totum quadratum ei ad totum im e triangulum, ita ablatum quadratum if ad ablatum triangulum fili.]

Est enim per tertium lemm. Pappi ut quadratum ei ad quadratum if, ita triangulum im e ad fili triangulum. quare & permutoando ut quadratum ei ad triangulum im e, ita quadratum if ad triangulum fili.

Atque est æquale triangulum can triangulo cpb.] Ex prima huius.

Et quadrilaterum fm quadrilatero fx.] Ex tercia huius.

Et conuertendo, ut quadrilaterum fx ad rectangulum hfd, ita triangulum cpb ad quadratum cb.] Superius enim demonstratum est, ut rectangulum hfd ad quadrilaterum fx, ita quadratum cb ad triangulum cpb.

A

B

C

D

E

F

I N A L I A M D E M O N S T R A T I O N E M ,
Q V A E A B E U T O C I O A F F E R T V R .

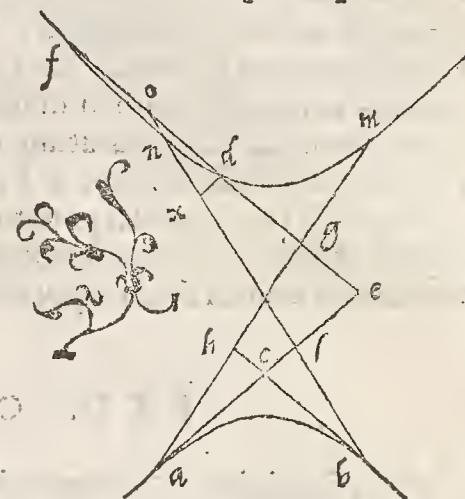
Rursus si à rectangulo aol auferatur rectangulum apl, relinquitur m op rectangulum.] Nam rectangulum aol æquale est rectangulo m op una cum rectangulo apl; quod quidem primum demonstratum est à Pappo in tertio, & quarto eorum lemmatum, quæ in secundum librum Apollonij conscripsit: deinde ab Eutocio in commentarijs in uigesimam tertiam secundi huius.

T H E O R E M A X V I I I . P R O P O S I T I O X V I I I .

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes in unum conueniant: sumatur autem in quavis sectione aliquod punctum: & ab eo duocatur linea uni contingentium æquidistans, quæ & sectionem & alteram contingentium fecerit: ut quadrata contingentia inter se se, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur inter sectionem & con-

tingentem ad quadratum lineæ inter æquidistantem & tactum interiectæ.

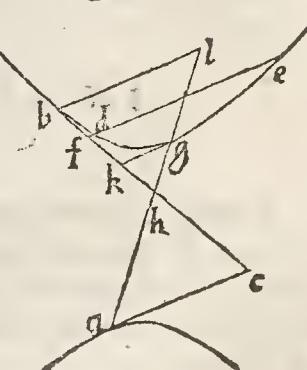
- A** Sint oppositæ sectiones $a b, m n$: & contingentes lineæ $a c, e, b c, h$, quæ in puncto c conueniant: per tactus autem ducantur diametri $a m, b n$: & sumatur in sectione $m n$ quod uis punctum d , à quo ducatur $d f g e$ ipsi $b c$ æquidistans. Dico ut quadratum $b c$ ad quadratum $c a$, ita esse rectagulum $f e d$ ad quadratum $a e$. ducatur enim per d ipsi $a e$ æquidistans $d x$. & quoniam hyperbole est $a b$, cuius diameter $b n$: lineaq; $b h$ sectionem contingit: & ipsi æquidistat $d f$: erit $f o$ æqualis $o d$: adiungitur autem $d e$. ergo rectangulum $f e d$ una cum $d o$ quadrato æquale est quadrato $o e$. & cum $e l$ æquidistet $d x$, triangulum $e o l$ simile est triangulo $d o x$. est igitur ut totum quadratum $e o$ ad triangulum $e o l$, ita ablatum quadratum $d o$ ad ablatum $d o x$ triangulum. quare & reliquum rectangulum $f e d$ ad quadrilaterum $d l$, ut $e o$ quadratum ad triangulum $e o l$. sed ut quadratum $e o$ ad $e o l$ triangulum, ita quadratum $b c$ ad triangulum $b c l$. ut igitur rectangulum $f e d$ ad quadrilaterum $d l$, ita quadratum $b c$ ad $b c l$ triangulum. æquale autem est quadrilaterum $d l$ triangulo $a e g$. & triangulum $b c l$ triangulo $a c h$. ergo ut $f e d$ rectangulum ad triangulum $a e g$, ita quadratum $b c$ ad $a c h$ triangulum. sed ut triangulum $a e g$ ad quadratum $e a$, ita triangulum $a c h$ ad quadratum $a c$. ex æquali igitur ut quadratum $b c$ ad quadratum $c a$, ita rectangulum $f e d$ ad $e a$ quadratum.



E V T O C I V S.

In aliquibus exemplaribus alia demonstratio huius theorematis inuenitur, cum utramque sectionem contingentes rectæ lineæ conueniant.

- Sint enim oppositæ sectiones $a b$, quas contingant lineæ $a c, c b$ in puncto c conuenientes: sumaturq; aliquod punctum d in b sectione: & ab eo ducatur $d e f$, ipsi $a c$ æquidistans. Dico ut quadratum $a c$ ad $c b$ quadratum, ita esse rectangulum $e f d$ ad quadratum $f b$. ducatur enim per a diameter $a h g$: & per $b g$ ducantur $b l, g k$ æquidistantes $e f$. Quoniam igitur $b h$ in puncto b hyperbolæ contingit: & ordinatim applicata est $b l$: erit ut $a l$ ad $l g$, ita $a h$ ad $h g$. sed ut $a l$ ad $l g$, ita $c b$ ad $b k$. & ut $a h$ ad $h g$, ita $a c$ ad $k g$. quare ut $c b$ ad $b k$, ita $a c$ ad $k g$: & permutoando ut $a c$ ad $c b$, ita $g k$ ad $K b$. sed ut quadratum $a c$ ad quadratum $c b$, ita quadratum $g K$ ad $K b$. $K b$ quadratum: & ut quadratum $g K$ ad quadratum $K b$, ita demonstratum est rectangulum $e f d$ ad quadratum $f b$. ergo ut quadratum $a c$ ad $c b$ quadratum, ita $e f d$ rectangulum ad quadratum $f b$.



F E D. C O M M A N D I N V S.

- A** Erit $f o$ æqualis $o d$.] Ex 48. primi huius.
B Sed ut quadratum $e o$ ad $e o l$ triangulum, ita quadratum $b c$ ad triangulum $b c l$.
C Est enim triangulum $b c l$ simile triangulo $e o l$, propterea quod linea $e o$ æquidistat contingenti $b c$. ergo triangulum $e o l$ ad triangulum $b c l$ duplam proportionem habet eius, quæ est linea $e o$ ad $b c$. quadratum autem $e o$ ad quadratum $b c$ proportionem itidem habet duplam eiusdem proportionis

portionis. ut igitur quadratum e o ad b c quadratum, ita triangulum e o l ad triangulum b c l: & permutoando ut quadratum e o ad e o l triangulum, ita quadratum b c ad triangulum b c l.

Aequale autem est quadrilaterum d l triangulo a e g.] Ex sexta huius.

Et triangulum b c l triangulo a c h.] Ex prima huius.

I N A L I A M J D I E M O N S T R A T I O N E M

Q V A M E P S O N I T I E V T O C I V S.

egd p p u o a l t r i g l p o d q g d s o d

Erit ut a l ad l g, ita a h ad h g.] Ex 36. primi huius.

Sed ut a l ad l g, ita c b ad b k.] Nam cum triangula a b c, l b b similia sint, erit ut a b ad b c, ita l b ad b b: & permutoando ut a b ad b l, ita c b ad b b: componendoq; ut a l ad l b, ita c b ad b b. ut autem b l ad l g, ita b b ad b k. ex aequali igitur ut a l ad l g, ita c b ad b k.

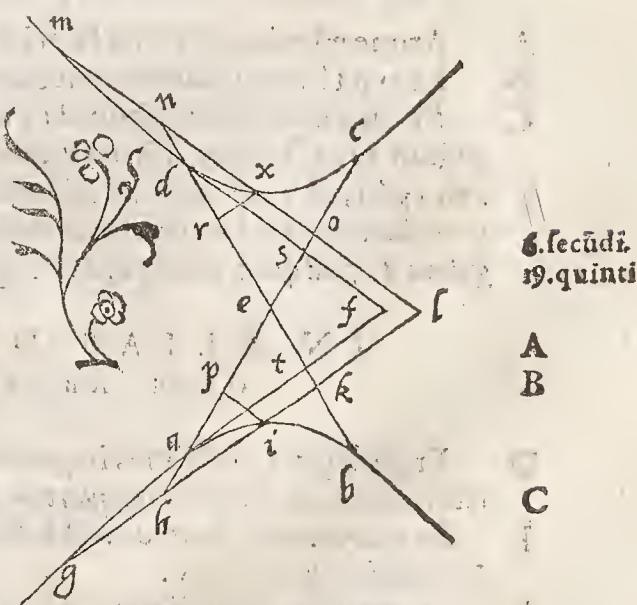
Et ut a h ad h g, ita a c ad K g.] Ob similitudinem uidelicet triangulorum a b c, g h k.

Et ut quadratum g K ad quadratum K b, ita demonstratum est rectangulum e f d ad quadratum f b.] Demonstratur hoc in 16. huius.

T H E O R E M A X I X . P R O P O S I T I O X I X .

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes in unum conueniant: & ducantur contingentibus æquidistantes, quæ & sibi ipsis, & sectioni occurrant: ut quadrata contingentia inter se se, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur intersectionem, & linearū occursum, ad rectangulum, quod lineis similiter sumptis continetur.

Sint o ppositæ sectiones, quarum diametri a c, b d, centrum e; & contingentes a f, f d, quæ in e conueniant: sumantur autem quæuis puncta: & a b ipsis ducantur g h i k l, m n x o l lineis a f, f d æquidistantes. Dico ut a f quadratum ad quadratum f d, ita esse rectangulum g l i ad rectangulum m l x. ducantur enim per x i lineæ x r, i p æquidistantes ipsis a f, f d. Itaque quoniam ut quadratum a f ad a f s triangulum, ita quadratum h l ad triangulum h l o: & quadratum h i ad triangulum h i p: erit & reliquum rectangulum g l i ad reliquum i p o l quadrilaterum, ut quadratum a f ad triangulum a f s. atque est triangulum a f s triangulo d f t æquale. & o p l quadrilaterum quadrilatero k r x l. ut igitur quadratum a f ad triangulum d f t, ita rectangulum g l i ad quadrilaterum r x l k. est autem ut triangulum d f t ad f d quadratum, ita quadrilaterum r x l k ad rectangulum m l x. ergo ex aequali ut quadratum a f ad f d quadratum, ita rectangulum g l i ad rectangulum m l x.



E V T O C I V S.

I N aliquibus codicibus demonstratio huius theorematis inuenitur huiusmodi.

Ducatur m l quidem ipsi f a æquidistant, quæ sectionem d c fecet; g l uero æqui-

- distantia fd , & ipsam ab secans. demonstrandum est ut quadratum df ad fa quadratum, ita esse rectangulum gl ad rectangulum mlx . ducatur enim per tactus ad diametrum ac , db : & per cb ipsa bp , pc contingentibus aequidistantes. ergo bp , pc sectiones in punctis bc contingunt. & quoniam e centrum est sectionum, erit be ipsi ed aequalis, & ae ec aequalis.
- F e c. quare cum aequidistent at f , cs p , & te aequalis
- G erit es : & propterea bs ipsi dt : triangulumq; bps trianguulo dtf aequalis. linea igitur bp aequalis est df :
- H & similiter cp aequalis af demonstrabitur. sed ut quadratum bp ad pc quadratum, ita est rectangulum glf ad rectangulum mlx . ut igitur quadratum df ad quadratum fa , ita glf rectangulum ad rectangulum mlx .

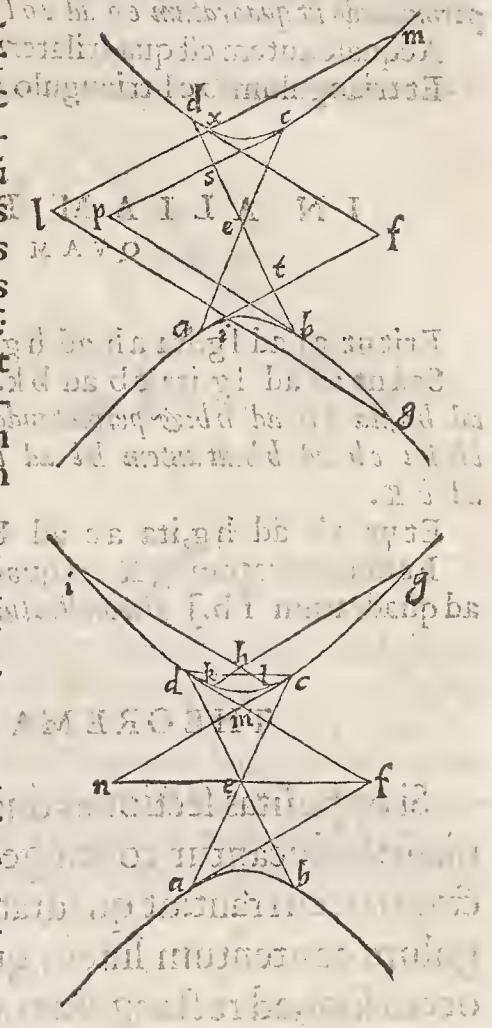
ALITER IN IDEM.

Rursus ducatur ultraque linearum ghk , ihl aequidistantis contingenti, secansq; dc sectionem ostendendum est ut quadratum df ad quadratum fa , ita esse rectangulum ihl ad rectangulum ghk . ducatur enim per tactum diametrum ac & per c ipsa cm ,

K quæ aequidistent at i . ergo cm contingat sectionem

L cd in puncto c : atque erit ut quadratum dm ad quadratum mc ; ita rectangulum ihl ad rectangulum

M ghk . ut autem dm quadratum ad quadratum mc , ita quadratum df ad quadratum fa . quare ut quadratum df ad fa quadratum, ita rectangulum ihl ad rectangulum ghk .



FED. COMMAN. IN VS.

- A Atque est triangulum afs triangulo dtf aequalis.] Ex quarta huius.
- B Et opil quadrilaterum quadrilatero $krlx$.] Ex septima huius.
- C Est autem ut triangulum dtf ad fd quadratum, ita quadrilaterum $rklx$ ad rectangulum mlx .] Eodem enim modo, quo supra demonstratum est, rectangulum gl ad quadrilaterum $iplo$, ut quadratum af ad triangulum afs ; demonstrabitur etiam mlx rectangulum ad quadrilaterum $rklx$ esse, ut quadratum df ad triangulum dtf : quare & conuertendo, ut triangulum dtf ad quadratum fd , ita erit quadrilaterum $rklx$ ad mlx rectangulum.

IN ALIAS DEMONSTRATIONES

QVAE AB EUTOCTO AFFERVNTVR.

- D Ergo bp , pc sectiones in punctis bc contingunt.] Hoc nos demonstravimus in commentarijs in quadragesimam quartam primi huius.
- E Et quoniam e centrum est sectionum, erit be ipsi ed aequalis & ae ec aequalis e.c.] Ex trigesima primi huius.
- F Quare cum aequidistent at f , cs p , & te aequalis erit es .] Quoniam enim lineæ atf , cs p inter se aequidistant, erunt triangula ate , cse similia. & propterea ut ae ad et , ita ce ad es : & permutoando ut ae ad ec , ita te ad es . linea igitur te , es inter se aequales sunt. & addita sc ipsi eb , & te ipsi ed , erit & bs aequalis dt .
- G Triangulumq; bpf triangulo def aequalis.] Rursus enim ob lineas aequidistantes bp , df , itemq; af , cp : triangulum bps simile est triangulo dtf ; & ut sb ad bp , ita td ad df : & permutoando ut bs ad dt , ita bp ad df . est autem bs aequalis dt , ut demonstratum est. ergo & bp ipsi

ipſi d f. ex quibus conſtat triangulum b p s triangulo d t f etiam æquale eſſe.

Sed ut quadratum b p ad p c quadratum, ita eſt rectangulum g l i ad rectangulum H m l x.] Ex proxime demonſtratis.

Ergo c m continget sectionem c d in puncto c.] Ex ijs, quæ demonſtramus in qua- dragesimam quartam primi huius.

Atque erit ut quadratum d m ad quadratum m c, ita rectangulum i h l ad rectan- gulum g h K.] Ex 17. huius.

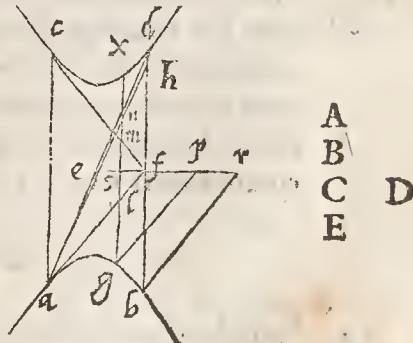
Vt autem d m quadratum ad quadratum m c, ita quadratum d f ad quadratum fa.] M

Iisdem enim manentibus ducatur d c: & iuncta fe producatur, ut cum linea c m in puncto n co- ueniat, erit ex trigesima septima & trigesima nona secundi huius, fe n recta diameter opposita- rum sectionum; quæ ipſi d c æquidistant: & idcirco triangula d m c, f m n inter ſe ſimilia erunt. Itaque ut fm ad m n, ita d m ad m c: & permutoando ut fm ad m d, ita n m ad m c. ergo compo- nendo, conuertendo q; ut m d ad d f, ita m c ad c n: & rursus permutoando, ut d m ad m c, ita d f ad c n. eſt autem fa ipſi c n æqualis, quod iam demonstratum fuit. quare ut d m ad m c, ita df ad fa. ut igitur quadratum d m ad m c quadratum, ita quadratum df ad quadratum fa.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XX.

Si oppositas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occur- rant: & per occurſum ducatur linea tactus coniungenti æquidistantis, quæ fecet utramque ſectionem: ducatur autem alia linea æquidistantis ei dem; ſectionesq; & contingentes ſecans: erit ut rectangulum con- tentum lineis, quæ inter occurſum contingentium & ſectiones interiiciuntur ad quadratum lineæ contingentes, ita rectangulum, quod con- tieneut lineis inter ſectiones & contingente interieſtis, ad quadratum li- neæ ad tactum abſcissæ.

Sint oppoſitæ ſectiones a b, c d, quarum centrum e, & a f, f c lineæ contingentes. iungantur autem a c, e f, a e, & protrahantur: perq; f ducatur b f h d ipſi a c æquidistantis. & ſumpto in ſectione quoquis puncto g, ducatur g l s m n x æquidistantis a c. Di- co ut rectangulum b f d ad quadratum fa, ita eſſe rectangulum g l x ad quadratum a l. ducantur enim à punctis g b lineæ g p, b r æquidistantes ipſi a f. & quoniam ut quadratum b f ad b fr triangulum, ita quadratum g s ad triangulum g s p: & quadra- tum l s ad triangulum l s f: erit & reliquum rectangulum g l x ad quadrilaterum g l f p, ut quadratum b f ad triangulum b fr. quadratum autem b f æquale eſt rectangulo b f d: triangulumq; b r f triangulo a f h: & quadrilaterum g l f p triangulo a l n. er- go ut rectangulum b f d ad triangulum a f h, ita g l x rectangu- lum ad triangulum a l n. ſed ut triangulum a f h ad quadratum a f, ita triangulum a l n ad quadratum a l. ex æquali igitur, ut re- tangulum b f d ad quadratum fa, ita rectangulum g l x ad quadratum a l.



F E D. C O M M A N D I N V S.

Erit & reliquum rectangulum g l x ad quadrilaterum g l f p, ut quadratum b f ad triangulum b fr.] Ex decima nona quinti. nam rectangulum g l x una cum quadrato l s æquale est quadrato g s. quare ſi à quadrato g s auferatur l s quadratum, relinquitur rectangulum g l x. s. secundi

Vt quadratum b f ad triangulum b fr.] Desiderabantur hæc in græco codice, quæ nos ſup pleuimus.

Quadratum autem b f æquale eſt rectangulo b f d.] Lineæ enim b f, f d æquales ſunt, cum recta diameter ſit e f. ut ex 38. & 39. ſecundi huius manifeste appetet.

A P O L L O N I I P E R G A E I

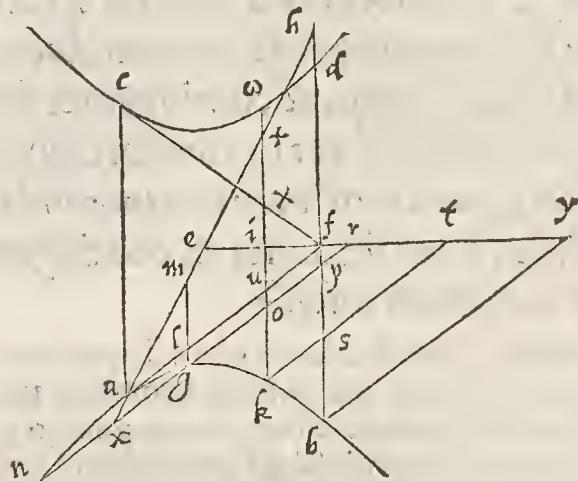
- D Triangulumq; b r f triangulo a f h.] Nam ex quadragesima quinta primi huius, triangulum b r f maius est, quam triangulum e b f, triangulo f a e. quare sequitur triangulum b r f æquale esse duobus triangulis e b f, e a f, hoc est æquale triangulo a f h.
 E Et quadrilaterum g l s p triangulo a l n.] Ex quinta huius.

T H E O R E M A X X I . P R O P O S I T I O X X I .

Iisdem positis si in sectione duo puncta sumantur: & per ipsa ducantur rectæ lineæ; una quidem contingenti æquidistans, altera uero æquidistans lineæ tactus coniungenti; quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant: erit ut rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur inter occursum contingentium, & sectiones ad quadratum contingentis, ita rectangulum contentum lineis inter sectiones, & linearum occursum in-

A teriectis, ad rectangulum, quod lineis similiter sumptis continetur.

Sint eadem, quæ supra: & sumptis in sectione punctis g k, per ea ducantur n x g o, p r, k s t ipsi a f æquidistantes; & g l m, k o u i x + w æquidistantes a c. Dico ut rectangulum b f d ad quadratum f a, ita esse K o w rectangulum ad rectangulum n o g. Quoniam enim est ut quadratum a f ad triangulum a f h, ita quadratum a l ad a l m triangulum, & quadratum x o ad triangulum x o +, & quadratum x g ad triangulum x g m: erit ut totū quadratum x o ad totum triangulum x o +, ita quadratum x g ablatum ad ablatum triangulum x g m. quare & reliquum rectangulum n o g ad reliquum quadrilaterum g o + m erit, ut quadratum a f ad triangulum b y f, ita rectangulum n o g ad quadrilaterum k o r t. ut autem triangulum b y f ad quadratum b f, hoc est ad rectangulum b f d, ita demonstratum est quadrilaterum k o r t ad rectangulum k o w. ex æquali igitur ut a f quadratum ad rectangulum b f d, ita rectangulum n o g ad rectangulum k o w: & conuertendo ut rectangulum b f d ad quadratum f a, ita k o w rectangulum ad rectangulum n o g.



F E D . C O M M A N D I N V S .

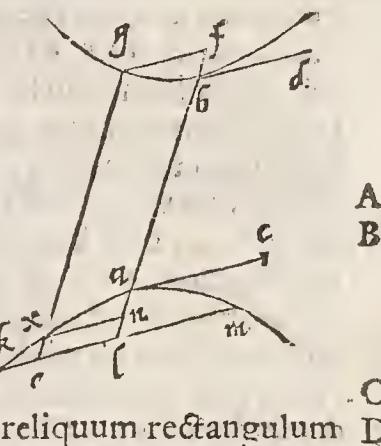
- A Ad rectangulum, quod lineis similiter sumptis continetur.] Hæc nos addidimus, quæ in græco codice desiderari uideb. intur, uel alia in eadem sententiam.
 B Sed triangulum a f h æquale est triangulo b y f.] Sequitur hoc ex quadragesima quinta primi huius, ut nos proxime ostendimus.
 C Et quadrilaterum g o + m quadrilatero k o r t.] Ex 12. huius.
 D Ut autem triangulum b y f ad quadratum b f, hoc est ad rectangulum b f d, ita demonstratum est quadrilaterum k o r t ad rectangulum k o w.] Demonstrabimus enim, ut in antecedente, rectangulum k o w ad quadrilaterum k o r t ita esse, ut quadratum b f, hoc est rectangulum b f d ad triangulum b f y. quare & conuertendo.

T H E O R E M A X X I I . P R O P O S I T I O X X I I .

S I oppositas sectiones contingant duas rectæ lineæ, inter se æquidistantes

stantes: ducantur autem aliae lineæ, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant; una quidem contingentia & quidistantia, altera uero & quidistantia ei, quæ tactus coniungit: erit ut transuersum latus ad rectum figuræ, quæ ad lineam tactus coniungentem constituitur, ita rectangulum contentum lineis inter sectionem & linearum occursum interiectis ad rectangulum, quod lineis similiter sumptis continetur.

Sint oppositæ sectiones ab, quas contingent rectæ lineæ ac, bd inter se & quidistantes: & iuncta ab, ducatur ex g ipsi ab & quidistantia, & k elm & quidistantia ac. Dico ut ab ad rectum figuræ latus, ita esse g ex rectangulum ad rectangulum kem. ducantur enim per xg lineæ gf, xn ipsi ac & quidistantes. & quoniam ac, bd & quidistantes inter se, sectiones contingunt, erit & ab diameter, & lineæ kl, xl, gf ad ipsam ordinatim applicabuntur. ut igitur ab ad rectum latus, ita bl a rectangulum ad quadratum lk, & rectangulum bna ad quadratum nx, hoc est ad quadratum le. quare ut totū rectangulum bla ad totum quadratum lk, ita erit rectangulum bna ablatum, hoc est fan; quod na, b f & equales sint, ad ablatum quadratu le. reliquum igitur fln rectangulum ad reliquum rectangulum kem erit ut ab ad rectum latus. est autem rectangulum fln & equale ipsi gex. ergo ut ab transuersum figuræ latus ad rectum, ita gex rectangulum ad rectangulum kem.



F E D. C O M M A N D I N V S.

ERIT & ab diameter.] Nam si ab non est diameter, per centrum non transibit. quare A
ac, bd conuenient inter se se ad easdem partes centri ex trigesima prima secundi huic, quod quidē fieri non potest, ponebantur enim & quidistantes.

Vt igitur ab ad rectum latus, ita bla rectangulum ad quadratum lk.] Ex uigesi- B
ma prima primi huic.

Quod na, b f & equales sint.] Est enim ut quadratum nx ad rectangulum bna, ita sectionis a rectum latus ad transuersum: & ut quadratum fg ad rectangulum afb, ita sectionis b rectum latus ad transuersum. harum autem sectionum transuersum latus idem est, uidelicet ab: & huius. C
sectionis a latus rectum est & equale recto lateri sectionis b; quod apparet ex decima quarta primi huic. ut igitur quadratum nx ad rectangulum bna, ita quadratum fg ad afb rectangulum: & permutoando ut quadratum nx ad quadratum fg, ita rectangulum bna ad rectangulum afb. sed quadratum nx est & equale quadrato fg; quod linea nx & qualis fg, est enim nx gl parallelogramm. ergo rectangulum bna rectangulo afb est & equale: & propterea sequitur lineam na ipsi fb & quallem esse, ex lemmate, quod conscripsimus in sextam decimam secundi huic.

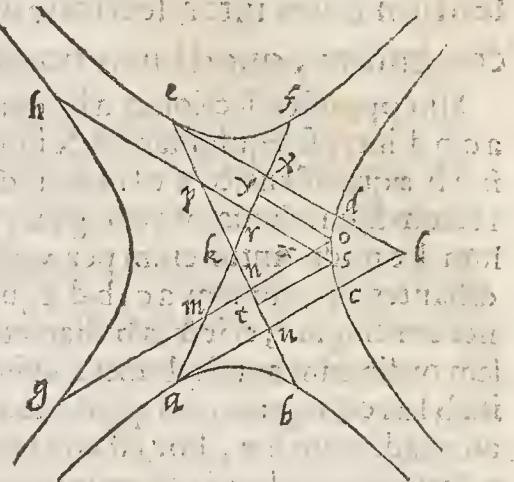
Reliquum igitur fln rectangulum ad reliquum rectangulum kem, erit ut ab ad rectum latus.] Rectangulum enim bla superat rectangulum bna rectangulo fln: quod D
Pappus in quarto lemmate demonstrauit.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

Si in oppositis sectionibus, quæ coniugatae appellantur, duæ rectæ lineæ oppositas sectiones contingentes conueniant in quavis sectione. ducantur autem aliquæ lineæ contingentibus & quidistantes, quæ & sibi ipsis, & aliis sectionibus oppositis occurrant: ut quadrata contingentium inter se se, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ inter sectiones, & occursum intericiuntur, ad rectangulum, quod lineis similiter

fumptis continetur.

Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatæ appellantur a b, c d, e f, g h; sitq; earum centrum K: & sectiones a b, e f contingent rectæ lineæ a u c l, e x d l, conuenientes in l: & iunctæ a K, e k ad b f producantur. à puncto autem g ducatur g m n x o ipsi al æquidistantes: & à puncto h ducantur h p r x s æquidistantes el. Dico ut quadratum el ad quadratum la, ita esse h x s rectangulum ad rectangulum g x o. ducatur enim per s linea st æquidistans al & per o ducatur o y ipsi el æquidistantes. Quoniam igitur oppositarum sectionum, quæ coniugatæ appellantur, a b, c d, e f, g h diameter est b e & el sectionem contingit: ipsiæq; æquidistantes ducta est h s: erit h p æqualis p s: & eadem ratione g m æqualis m o. & quoniam ut quadratum el ad eu triangulum, ita est quadratum p s ad triangulum p n x: erit & reliquum rectangulum h x s ad quadrilaterum t n x s, ut



s. secundi
& 19. qui
ti

- A quadratum el ad triangulum eu. sed eu triangulo
- B gulum æquale est triangulo al x: & quadrilaterum t n x s quadrilatero x r y o. ut igitur quadratum el ad al x triangulum, ita rectangulum h x s ad quadrilaterum x r y o. ut autem triangulum al x ad quadratum al, ita quadrilaterum x r y o ad rectangulum g x o. ergo ex æquali ut quadratum el ad quadratum la, ita est h x s rectangulum ad rectangulum g x o.

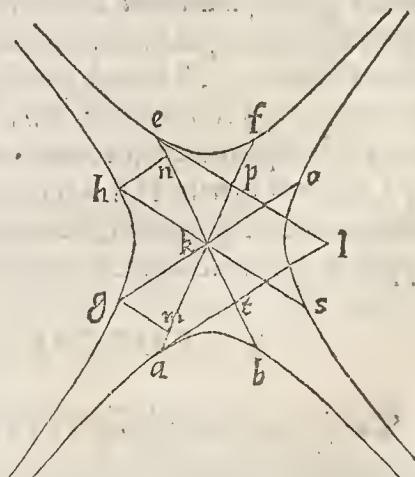
THEOREMA XI. Q.B. 3

E V T O C I V S.

HOC theorema plures habet casus, quemadmodum & alia, uerum quoniam in aliquibus exemplaribus loco theorematum casus descripti inueniuntur, & aliae quadam demonstrationes, nobis uisum est ipsas auferre. Ut autem ij, qui in hac inciderunt, ex differenti appositione sententiam meam perpendere possint, eas in commentarijs exposuius.

Itaque contingentibus æquidistantes g x o, h k s per centrum, quod sit k transeat. Dico iam ut quadratum el ad quadratum la, ita etiam esse rectangulum h K s ad rectangulum g K o. ducantur enim per g h lineæ g m, h n, quæ contingentibus æquidistantes. erit triangulum g K m triangulo a K t æquale. triangulum autem h k n æquale triangulo e k p:

- D
- E
- F
- G
- H
- I
- J
- K
- L
- M
- N
- O
- P
- Q
- R
- S
- T
- U
- V
- W
- X
- Y
- Z



- D
- E
- F
- G
- H
- I
- J
- K
- L
- M
- N
- O
- P
- Q
- R
- S
- T
- U
- V
- W
- X
- Y
- Z

Iisdem manetibus si linea h k p, quæ ipsi el æquidistantes ducitur, transeat per x centrum; g o uero per centrum non transeat: dico similiter ut quadratum el ad quadratum la, ita esse rectangulum h x p ad rectangulum g x o. ducantur enim per o p

- D
- E
- F
- G
- H
- I
- J
- K
- L
- M
- N
- O
- P
- Q
- R
- S
- T
- U
- V
- W
- X
- Y
- Z

erit

erit mōr triangulum àquale triangulis mnk, b rup ambius ruderis mōr
k s p. quare sublato communi, uidelicet triangulo
m x k, reliquum quadrilaterum xs quadrilatero
xr est àquale. Quòd cum sit ut quadratum el ad
triangulum el t, ita quadratum k p ad triangulum
k p s, & ita quadratum K x ad triangulum
k x n: erit ut quadratum el ad el t triangulum,
ita reliqui, rectangulum scilicet h x p ad qua-
drilaterum xs: est autem trianguluni el t àquale
triangulo al u, & quadrilaterum xr quadrilatero
xs: ergo ut quadratum el ad triangulum al u, ita
rectangulum h x p ad quadrilaterum xs. & ea-
dem ratione, ut triangulum al u ad quadratum
al, ita quadrilaterum xs ad rectangulum g x o.
ex àequali igitur ut quadratum el ad quadratum la, ita rectangulum h x p ad re-
ctangulum g x o.

F E D. C O M M A N D I N V S.

Sed e u i triangulum àquale est triangulo al x.] Ex quarta huius.
Et quadrilaterum tnxs quadrilatero xryo.] Hoc nos supra demonstrauimus in com-
mentarijs in quintam decimam propositionem huius libri.

Vt autem triangulum al x ad quadrilaterum al, ita quadrilaterum xryo ad re-
ctangulum g x o.] Eodem enim modo, quo supra, demonstrabimus rectangulum g x o ad qua-
drilaterum xryo ita esse, ut quadratum al ad al x triangulum. quare & conuertendo quadrila-
terum xryo ad rectangulum g x o erit, ut triangulum al x ad quadratum al.

I N A L I A S D E M O N S T R A T I O N E S,
Q V A E A B È V T O C I O A F F E R V N T V R.

Erit triangulum gkm triangulo akt àquale; triangulum autem hkn àquale trian-
gulo ekp.] Hoc enim supra demonstratum est in quinta decima propositione huius libri.

Et triangulo ekp àquale akt triangulum.] Ex quarta huius.
Et quoniam triangulum mor maius est, quam triangulum mnk, triangulo akt.]
Ex eadem quinta decima huius.

Vt eadem ratione ut triangulum al u ad quadratum al, ita quadrilaterum xs ad
rectangulum g x o.] Vt enim quadratum al ad triangulum al u, ita est quadratum mo ad
triangulum mor: & ita quadratum mx ad triangulum mxk. quare reliquum rectangulum g x o
ad quadrilaterum xr erit, ut quadratum al ad triangulum al u: & conuertendo quadrilaterum
xr, hoc est xs ad rectangulum g x o, ut triangulum al u ad quadratum al.

T H E O R E M A X X I I I I . P R O P O S I T I O X X I I I .

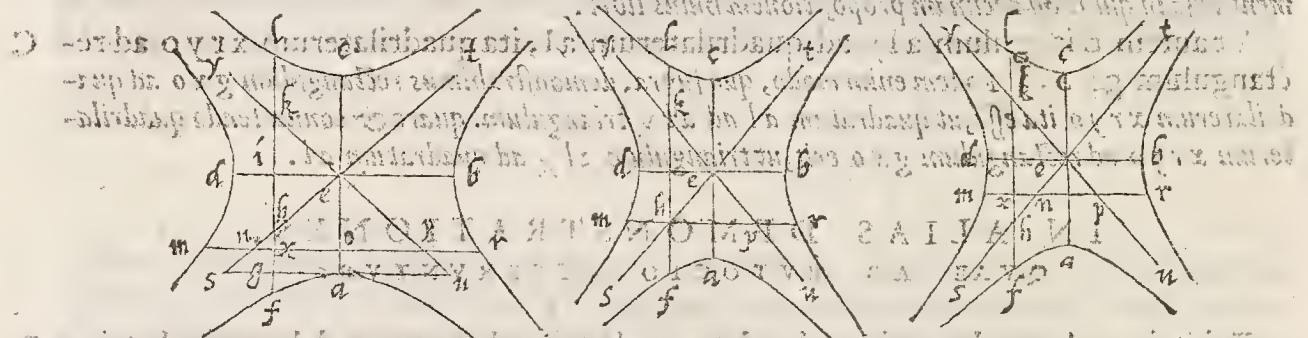
Si in oppositis sectionibus, quas coniugatas appellamus, à centro
ad sectiones ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una quidem sit transuer-
sa diameter, altera uero recta & ducantur aliæ lineæ his diametris àqui-
distantes, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant, ita ut occursus sit in
loto inter quatuor sectiones intermedio: rectangulum contentum por-
tionibus lineæ diametro transuersæ àquidistantis, unâ cum eo, ad quod
rectangulum ex portionibus lineæ àquidistantis rectæ diametro propor-

tionem habet eandem, quam diametri rectæ quadratum ad quadratum transuersæ: æquale erit duplo quadrati, quod à dimidia transuersæ diametri constituitur.

Sint oppositæ sectiones, quas coniugatas appellamus a, b, c, d, quarum centrum e: perq; e ducatur a e c transuersa diameter; & d e b recta; & ducantur f g h i k l m n x o p r æquidistantes ipsis a c, d b, quæ in puncto x conueniant: sit autem x prius intra angulum s e u, uel y e t. Dico rectangulum f x l unà cum eo, ad quod rectangulum m x r proportionem habet eandem, quam d b quadratum ad quadratum a c, & quale esse duplo quadrati a e. ducantur enim asymptoti sectionum s e t, y e u: & per a ducatur s g a u sectionem contingens.

A Quoniam igitur rectangulum s a u æquale est quadrato d e, erit ut rectangulum s a u ad quadratum e a, ita quadratum d e ad e a quadratum. rectangulum autem s a u ad quadratum e a proportionem habet compositam ex proportione s a ad a e; & ex proportione u a ad a e, sed ut s a ad a e, ita n x ad x h: & ut u a ad a e, ita p x ad x k, quare proportio quadrati d e ad quadratum e a componitur ex proportione n x ad x h, & proportione p x ad x k, proportio autem rectanguli p x n ad rectangulum k x h composita est ex eisdem proportionibus. ut igitur quadratum d e ad e a quadratum, ita rectangulum p x n ad rectangulum k x h. & propterea ut quadratum d e ad quadratum e a, ita quadratum d e, unà cum rectangulo p x n ad quadratum e a unà cum rectangulo k x h. atque est qua-

B Proportio quadrati d e ad quadratum e a unà cum rectangulo k x h. atque est qua-



C quadratum de æquale rectangulo p m n, hoc est rectangulo f n m; & quadratum a e æquale rectangulo k f h, hoc est l h f. quare ut quadratum d e ad quadratum e a, ita rectangulum p x n unà cum rectangulo r n m ad rectangulum k x h unà cum rectangulo l h f. rectangulum autem p x n unà cum rectangulo r n m æquale est rectangulo r x m. ergo ut quadratum d e ad quadratum e a, ita r x m rectangulu ad rectangulum k x h unà cum rectangulo k f h. Itaque demonstrare oportet rectangulum f x l unà cum rectangulo k x h, & rectangulo k f h æquale esse duplo quadrati e a. commune auferatur quadratum a e, hoc est rectangulum k f h. reliquum igitur rectangulum k x h unà cum rectangulo l x f demonstrandum est æquale quadrato a e. quod quidem ita se habet. nam rectangulum K x h unà cum rectangulo l x f æquale est rectangulo k f h, hoc est a e quadrato.

Conueniant deinde f l, m r in una asymptoton ad punctum h. erit rectangulum f h l æquale quadrato a e; & rectangulum m h r æquale quadrato d e. quare ut quadratum d e ad quadratum e a, ita rectangulum m h r ad rectangulum f h l. & propterea ostendendum est duplum rectanguli f h l æquale duplo quadrati a e. Illud uero ita esse perspicue constat:

F Sit postremo, x intra angulum s e y, uel u e t. erit similiter ob coniunctionem proportionum, ut quadratum d e ad quadratum e a, ita p x n rectangulum ad rectangulum k x h. sed quadrato d e rectangulum p m n, hoc est r n m est æquale; & quadrato a e æquale rectangulum l h f. ergo ut rectangulum r n m ad rectangulum l h f ita ablatum p x n rectangulum ad ablatum rectangulum k x h. reliquum igitur re-

ctan-

Rectangulum $r \times m$ ad reliquum, uidelicet ad excessum, quo quadratum a e excedit rectangulum $k \times h$ est ut quadratum d e ad quadratum e a. Itaque demonstrare oportet rectangulum $f \times l$ unà cum excessu, quo quadratum a e excedit $k \times h$ rectangulum æquale esse duplo quadrati a e. Commune auferatur a e quadratum, hoc est rectangulum $f \times l$. ergo demonstrandum est reliquum rectangulum $k \times h$ unà cum excessu, quo quadratum a e excedit rectangulum $K \times h$, quadrato a e æquale esse. quod quidem ita est: nam minus, hoc est rectangulum $k \times h$ unà cum excessu est æquale maiori, uidelicet quadrato a e.

F E D. C O M M A N D I N V S.

Quoniam igitur rectangulum s a u æquale est quadrato d e.] Ex quinquagesima sexta primi, & prima secundi huius; utrumque enim est æquale quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum a e constituitur.

Atque est quadratum d e æquale rectangulo p m n.] Ex undecima secundi huius.

Hoc est rectangulo r n m.] Sunt enim lineæ m n, p r inter se æquales ex octaua secundi huius.

Rectangulum autem p x n unà cum rectangulo r n m æquale est rectâgulo r x m.] Hoc nos demonstrauimus in commentarijs in sextum lemma Pappi.

Itaque demonstrare oportet rectangulum $f \times l$ unà cum rectangulo $k \times h$.] Est enim quadratum d b ad quadratum a c, ut quadratum d e ad quadratum e a, quod utrumque utriusque quadruplicem sit. ergo ut quadratum d b ad quadratum a c, ita rectangulum $r \times m$ ad rectangulum $k \times h$ unà cum rectangulo $k f h$: rectangulum autem $k \times h$ unà cum rectangulo $l \times f$ est æquale rectangulo $K f h$, hoc est quadrato a e, quod nos in quintum Pappi lemma demonstrauimus. si igitur utrique addatur commune quadratum a e, erit rectangulum $f \times l$ unà cum rectangulo $k \times h$, & quadrato a e, hoc est rectangulo $K f h$, æquale rectangulo $k f h$, & quadrato a e; hoc est duplo quadrati a e. quod quidem demonstrare oportebat.

Erit similiter ob coniunctionem proportionum, ut quadratum d e ad quadratum e a.] Hoc demonstrabitur eadem prorsus ratione, qua supra usi fuimus.

Reliquum igitur rectangulum $r \times m$ ad reliquum uidelicet ad excessum, quo quadratum a e excedit rectangulum $k \times h$.] Nam rectangulum p m n, hoc est r n m excedit p x n rectangulum, rectangulo $r \times m$, ut demonstrauimus. quare reliquum rectangulum $r \times m$ ad reliquum, quo rectangulum $l \times f$, hoc est quadratum a e excedit rectangulum $k \times h$, erit ut rectangulum r n m ad rectangulum $l \times f$, hoc est ut quadratum d e ad quadratum e a, uidelicet ut quadratum d b ad quadratum a c.

Est ut quadratum d e ad quadratum e a.] Hac nos addidimus, quæ desiderari videbantur.

Ergo demonstrandum est reliquum rectangulum $k \times h$ unà cum excessu, quo quadratum a e excedit rectangulum $k \times h$ quadrato a e æquale esse.] Rectangulum enim $f \times l$ excedit rectangulum $f h l$, rectangulo $K x h$.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

Inisdem positis, sit linearum ipsis a c, b d æquidistantium occursum in una sectionum d b, atque in puncto x, ut positum est. Dico rectangulum contentum portionibus lineæ, quæ transuersæ diametro æquidistant, uidelicet o x n, maius esse, quam illud, ad quod rectangulum ex portionibus lineæ æquidistantis rectæ diametro, hoc est $r \times m$, eandem proportionem habet, quam rectæ diametri quadratum ad quadratū transuersæ, duplo quadrati eius, quod à dimidia transuersæ diametri cōstituitur.

Est enim propter eādem rationem, ut quadratum d e ad quadratum e a, ita rectangulum $p \times h$ ad rectangulum $s \times l$. quadratum autem d e æquale est rectangulo $p m h$; B.

A P O L L O N I I P R E R I G I A E I

- C & quadratum ea æquale rectangulo lk's. ergo ut quadratum d'e ad quadratum e a, ita pmh rectangulum ad rectangulum lk's. Itaque quoniam ut totum rectangulum pxh ad totum lx's, D ita ablatum rectangulum pmh ad ablatum lk's, hoc est ad lts; erit & reliquum rxm ad reliquum txk, ut d'e quadratum ad quadratum ea. ostendere igitur op̄ortet rectangulum oxn maius esse, quam rectangulum txk, duplo quadrati ae. commune auferatur F txk. ergo ostendendum relinquitur rectangulum oxn G æquale duplo quadrati ae, hoc autem ita esse manifesto apparent.

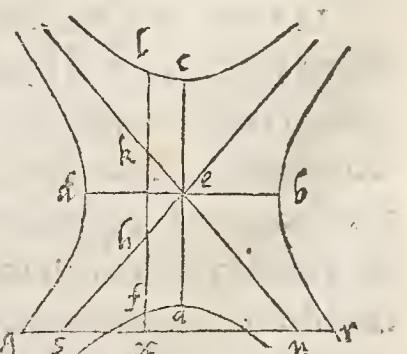
F E D. C O M M A N D I N V S.

- A Est enim propter eandem rationem, ut quadratum d'e ad quadratum e a.] Ex demonstratis in antecedente. B Quadratum autē d'e æquale est rectangulo pmh.] Ex undecima secundi huius, ut dictum est. C Et quadratum e a æquale rectangulo lk's.] Ex decima secundi huius, ita uero corrigendum est, nam in græco codice legitur λοσ & ita inferius in multis locis. D Ita ablatum rectangulum pmh ad ablatum lk's hoc est ad lts.] Nos hæc ita restituimus, in græco enim codice legebatur, οὐ τωσ ἀφαιρεῖν τὸ ὑπὸ πυθ πρὸς ἀφαιρεῖν τὸ ὑπὸ λοσ, τοι τέστι τὸ ὑπὸ υσο: hoc est ita ablatum rectangulum pmh ad ablatum l's, hoc est ad yso. E Erit & reliquum rxm ad reliquum txk, ut d'e quadratum ad quadratum ea.] Nam rectangulum pxh superat rectangulum rxm, rectangulo pmh, ex quarto lemmate Pappi; rectangulum uero l's ex sexto lemmate eiusdem superat rectangulum txk, rectangulo l's. F Commune auferatur txk. ergo ostendendum relinquitur rectangulum otn æqua ex 2. parte le duplo quadrati ae.] Rectangulum enim oxn est æquale rectangulo txk una cum rectangulo otn. G Hoc autem ita esse manifesto apparent.] Ex uigesima tertia secundi huius.

T H E O R E M A X X VI. P R O P O S I T I O X X VI.

Q uod si æquidistantium occursus ad punctum x sit in una sectione a c, ut positum est; rectangulum, quod continetur portionibus lineæ æquidistantis transuersæ diametro, hoc est lxf minus erit, quam illud, ad quod rectangulum portionibus alterius lineæ contentum, hoc est rxg, eandem proportionem habet, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transuersæ, duplo quadrati eius, quod à dimidia transuersæ diametri constituitur.

- Quoniam enim propter eadem, quæ prius dicta sunt, A ut quadratum d'e ad quadratum e a, ita est ux s rectangulum ad rectangulum kxh: habebit totum rectangulum rxg ad rectangulum kxh unà cum quadrato ae, B proportionem eandem, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transuersæ. ergo demonstrare oportet rectangulum lxf minus esse, quam rectangulum kxh unà cum quadrato ae, duplo quadrati. commune auferatur quadratum ae. reliquum igitur rectangulum lxf demonstrandum est minus, quam kxh, quadrato ae; hoc est rectangulo lhf: quod quidem ita se habet. C nam rectangulum lhf unà cum lxf æquale est rectangulo kxh.



FED.

F E D . C O M M A N D I N V S .

Vt quadratum de ad quadratum ea, ita est uxs rectangulum ad rectangulum A
 $x h$. Ob compositionem uidelicet proportionum.

Habebit totum rectangulum $r x g$ ad rectangulum $k x h$ unà cum quadrato $a e$, B
proportionem eandem, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transuersæ.]
Quoniam enim est ut quadratum de ad quadratum ea, ita rectangulum uxs ad rectangulum.
 $k x h$: erit quoque ut quadratum de ad quadratum ea, ita quadratum de und cum rectangulo 12. quinti
 uxs ad quadratum ea unà cum rectangulo $k x h$. sed quadrato de æquale est rectangulum $u g s$.
hoc est $r s g$. quare ut quadratum de ad quadratum ea, ita rectangulum uxs und cum $r s g$ re-
ctangulo ad rectangulum $K x h$ unà cum quadrato $a e$: rectangulum autem uxs und cum rectan-
gulo $r s g$ est æquale rectangulo $r x g$ ex quinto lemmate. ut igitur quadratum de ad quadratum
ea, hoc est, ut rectæ diametri quadratum ad quadratum transuersæ, ita rectangulum $r x g$ ad re-
ctangulum $k x h$ unà cum $a e$ quadrato.

Nam rectangulum $l h f$ unà cum $l x f$ æquale est rectangulo $k x h$.] Ex quarto lem-
mate Pappi. C

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVII.

Si in ellipsi, vel circuli circumferentia coniugatae diametri ducan-
tur, quarum altera quidem sit recta, altera uero transuersa: & ducantur
duæ rectæ lineæ diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis & sectioni oc-
currant: quadrata ex portionibus lineæ æquidistantis transuersæ dia-
metro, quæ inter sectionem, & linearum occursum intericiuntur; assumen-
tia figuræ ex portionibus lineæ, quæ rectæ diametro æquidistat, inter
linearum occursum, & sectionem interiectis, similes, & similiter descri-
ptas ei, quæ ad rectam diametrum constituitur, quadrato transuersæ
diametri æqualia erunt.

Sit ellipsis, vel circuli circumferentia abcd, cuius centrum e: ducanturq; ipsius
duæ coniugatae diametri, recta quidem ac, transuersa uero b d: & ducentur kf
lm, n fg h, quæ ipsis ac, bd æquidistant. Dico quadrata ns, fh assumentia figuræ ex
kf, fm similes, & similiter descriptas ei, quæ fit ad ac, quadrato bd æqualia esse. du-
catur enim à punto n linea
nx æquidistans ac, quæ ad
bd ordinatim applicata erit:
& bp sit rectum figuræ latus.
Quoniam igitur ut bp ad ac,
ita est ac ad bd; erit ut p b
ad bd, ita ac quadratum ad
quadratum bd. quadratum
autem bd est æquale figuræ,
quæ ad ac constituitur. ergo
ut pb ad bd, ita quadratum ac ad figuram quæ est ad ac, sed ut quadratum ac ad
figuram, quæ ad ac, ita quadratum nx ad figuram, quæ fit ab nx similem ei, quæ ad
ac. ergo & ut pb ad bd, ita quadratum nx ad figuram, quæ ab nx similem ei, quæ
ad ac. est autem & ut pb ad bd, ita nx quadratum ad rectangulum bx d. quare si
figura, quæ fit ab nx, hoc est ab fl, similis ei, quæ ad ac, rectangulo bx d est æqualis.
Eodem modo demonstrabimus figuram, quæ fit axl, similem illi, quæ ad ac, rectan-
gulo bl d æqualem esse. Et quoniam recta linea nh secatur in partes æquales in g,
& in partes inæquales in fs; quadrata h f, fn dupla sunt quadratorum h g, g f. hoc est
ng, gf. eadem quoque ratione quadrata m f, fx quadratorum xl, lf sunt dupla, &

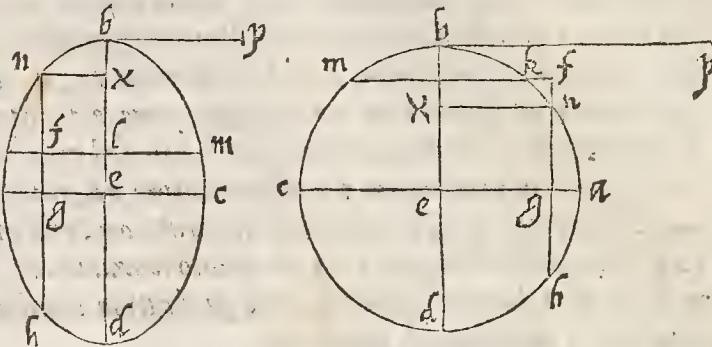
A
cor. 20. se
xti
B

C
9. quinti.

D

APOLLONII PERGAEI

figuræ, quæ fiunt ab m f, fk, similes ei, quæ ad a c, duplæ sunt figurarum similiūm, quæ à k l, lf. figuræ autem, quæ fiunt a k l, lf rectangulis b l d, b x d sunt æquales: & quadrata n g, g f æqualia sunt quadratis x e, el. ergo quadrata n f, fh unà cum figuris k f, fm similibus ei, quæ ad a c, dupla sunt rectangulorum b l d, b x d, & quadratorum x e el. Itaque quoniam rectilinea b d secatur in partes æquales in e, & in partes inæquales in x; rectangulum b x d unà cum x e quadrato æquale est quadrato b e. Similiter & rectangulum b l d unà cum quadrato le æquale est b e quadrato. quare rectangula b x d, b l d, & quadrata x e, le æqualia sunt duplo quadrati b e. quadrata igitur n f, fh unà cum figuris k f, fm similibus ei, quæ ad a c, dupli quadrati b e sunt dupla. atque est quadratum b d duplū dupli quadrati b e. ergo quadrata n f, fh assumentia figuras k f, fm similes ei, quæ ad a c, quadrato b d æqualia erunt.



F E D. C O M M A N D I N V S.

- A** Quoniam igitur ut b p ad a c, ita est a c ad b d.] Ex diffinitione secundæ diametri, quæ medianam proportionem habet inter figura latera.
- B** Quadratum autem b d est æquale figuræ, quæ ad a c constituitur.] Habet enim b d medianam proportionem inter latera figurae, quæ fit ad a c, ex decima quinta primi huius.
- C** Est autem & ut p b ad b d, ita n x quadratum ad rectangulum b x d.] Ex uigesima prima primi huius.
- D** Et quoniam recta linea n h secatur in partes æquales in g, & in partes inæquales in f, quadrata h f, fn dupla sunt quadratorum h g, g f.] Hoc demonstrauit Euclides in secundo libro clementorum, propositione nona. sed & aliter demonstrare possumus, hoc paeto.

Secetur recta linea a b in partes æquales ad punctum c, & in partes inæquales ad d. Dico quadrata a d, d b quadratorum d c, c b dupla esse.] Quoniam enim a c, c b æquales sunt, erit a d linea, qua b c ipsam c d superat. ergo ex ijs, quæ demonstrauimus in trigesimali tertiam propositionem primi huius, quadrata d c, c b æqualia sunt rectangulo, quod bis d c b continetur, & quadrato a d. Idcirco q; quadrata d c, c b una cum rectangulo, quod bis d c b continetur, & quadrato a d, dupla sunt quadratorum d c, c b. sed quadratum d b est æquale quadratis d c, c b, & rectangulo, quod bis d c b continetur. quadrata igitur a d, d b quadratorum d c, c b sunt dupla. quod demonstrare oportebat.



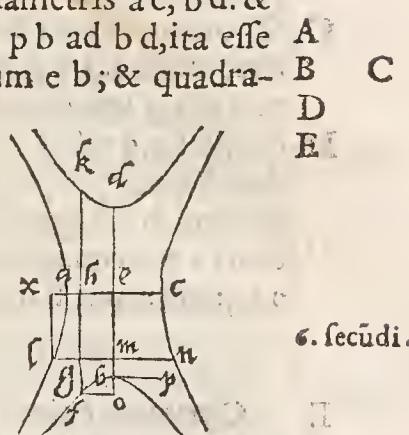
4. secundi

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXVIII.

S i in oppositis sectionibus, quas coniugatas appellamus, coniugatae diametri ducantur, ut earum altera recta sit, altera transuersa: & ducantur duæ rectæ lineæ diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant: quadrata ex portionibus lineæ æquidistantis rectæ diametro, quæ inter linearum occursum, & sectiones interiectas, ad quadrata ex portionibus alterius linearum, quæ transuersæ diametro æquidistantes, inter sectiones & occursum linearum interjectis; eandem proportionem habent, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transuersæ.

Sint

Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatæ appellantur abcd, quarum diameter quidem recta sit ac, transuersa uero bd: & ipsis æquidistantes ducatur fghk, lgn ad quadrata fg, gk eandem proportionem habere, quam ac quadratum ad quadratum bd. à punctis enim lf ordinatim applicentur lx, fo, quæ æquidistantes erunt diametris ac, bd: & à punto b ducatur ipsius bd rectum latus bp. Itaque constat ut pb ad bd, ita esse quadratum ac ad bd quadratum, & quadratum ae ad quadratum eb; & quadratum fo ad rectangulum bod; & rectangulum cxa ad quadratum lx. est igitur sicut unum antecedentium ad unum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. quare ut quadratum ac ad quadratum bd, ita rectangulum cxa unà cum quadrato ae, & quadrato of, hoc est eh, ad rectangulum do b unà cum quadrato be, & quadrato lx, hoc est me. sed rectangulum cxa unà cum quadrato ae æquale est quadrato xe: & rectangulum do b unà cum quadrato be æquale quadrato oe. ergo ut ac quadratum ad quadratum bd, ita sunt quadrata xe, eh ad quadrata oe, em; hoc est quadrata lm, mg ad quadrata fh, hg. quadratorum autem lm, mg dupla sunt quadrata lg, gn, ut demonstratum est: & quadratum fh, hg quadrata fg, gk sunt dupla. ut igitur quadratum ac ad quadratum bd, ita lg, gn quadrata ad quadrata fg, gk.



F E D. C O M M A N D I N V S.

Itaque constat, ut pb ad bd, ita esse quadratum ac ad bd quadratum.] Est enim ac proportionalis inter pb, bd, ex diffinitione secundæ diametri. quare per corollarium decimæ nonæ sexti, ut pb ad bd, ita quadratum pb ad quadratum ac; & ita quadratum ac ad bd quadratum.

Et quadratum ae ad quadratum eb.] Ex 15. quinti.

Et quadratum fo ad rectangulum bod.] Nam ex uigesima prima primi huius, ut figura rectum latus ad transuersum, hoc est ut pb ad bd, ita fo quadratum ad rectangulum bod.

Et rectangulum cxa ad quadratum lx.] Est enim ex eadem 21. primi huius, ut sectionis a transuersum latus ad rectum, hoc est ut quadratum ac ad quadratum bd, ita rectangulum cxa ad quadratum lx.

Est igitur sicut unum antecedentium ad unum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia.] Ex 12. quinti.

Quadratorum autem lm, mg dupla sunt quadrata ng, gl, ut demonstratum est.] In secundo libro elementorum propositione nona, ut diximus.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXIX.

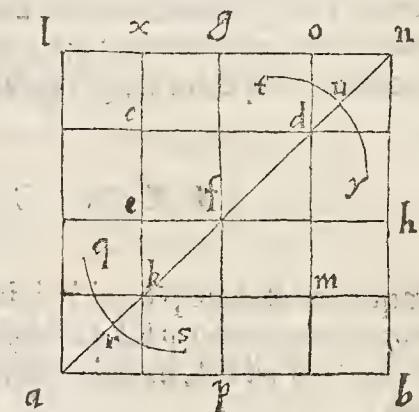
Iisdem positis si linea rectæ diametro æquidistans secet asymptotos; quadrata ex portionibus ipsius, quæ inter linearum occursum, & asymptotos intericiuntur, assumentia dimidium quadrati facti à recta diametro, ad quadrata ex portionibus lineæ, quæ transuersæ diametro æquidistat, inter occursum linearum, & asymptotos interiectis, eandem proportionem habent, quam rectæ diametri quadrati ad quadratum transuersæ.

A P O L L O N I I P E R G A E I

- Sint eadē, quæ supra: & linea ln secat asymptotos in
A punctis x, o . demonstrandum est, quadrata xg, go aslumen-
B tia dimidium quadrati ac , hoc est duplū quadrati ea , hoc
 est duplum rectanguli lxn , ad quadrata fg, gk eandē pro-
 portionem habere, quam ac quadratum ad quadratū bd .
C Quoniam enim lx æqualis est on , quadrata lg, gn supe-
 rānt quadrata xg, go duplo rectanguli lxn . ergo quadra-
 ta xg, go una cum duplo quadrati ae , æqualia sunt qua-
D dratis lg, gn . sed lg, gn quadrata ad quadrata fg, gk ean-
 dem habent proportionem, quam quadratum ac ad qua-
 dratum bd . Quadrata igitur xg, go una cum duplo qua-
 drati ea ad quadrata fg, gk eandem proportionem habent, quam ac quadratum
 ad quadratum bd .

E V T O C I V S.

- E** Quoniam enim lx æqualis est on ; quadrata lg, gn superant quadrata xg, go , du-
 plo rectanguli lxn .] sit recta linea ln ; auferanturq;
 ab ipsa æquales lx, no ; & figura describatur. manifestum
 est ob similitudinem, & propterea quod linea lx est æqua-
 lis no , quadrata lc, dn, ak, mb inter se æqualia esse. Quo-
 niam igitur quadrata, quæ sunt ex lg, gn , sunt quadrata
 af, fn : & quæ ex gx, go sunt kf, fd ; sequitur ut quadra-
 ta ex lg, gn superent quadrata ex gx, go , gnomonibus
 qr, s, tuy . Quod cum rectangulum gd sit æquale rectan-
 gulo mp , & rectangulum ei ipsi mb ; erunt gnomones
 qr, s, tuy æquales rectangulis am, db . sed am est æqua-
 le ld ; rectangula uero ld, db sunt, quæ lxn , hoc est lon
 continentur. ergo quadrata ex lg, gn , hoc est af, fn , supe-
 rant quadrata ex gx, go , hoc est kf, fd , duplo rectangu-
 li lxn , hoc est rectangulis ld, db .



F E D. C O M M A N D I N V S.

- A** Assumentia dimidium quadrati ac , hoc est duplum quadrati ea .] Cum enim linea
 ac dupla sit ipsius ae , erit quadratum ac quadrati ae quapruplum, ex 20. sexti.
B Hoc est duplum rectanguli lxn .] Ex 10. secundi huius, & ex definitione secundæ diametri.
C Quoniam enim lx æqualis est on , quadrata lg, gn superant quadrata xg, go , du-
 plo rectanguli lxn .] Constat etiam hoc ex octavo lemmate Pappi.
D Sed lg, gn quadrata ad quadrata fg, gk eandem habent proportionem, quam qua-
 dratum ac ad quadratum bd .] Ex antecedente.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

Si hyperbolæ contingentes duæ rectæ lineæ sibi ipsis occurant: &
 per tactus linea producatur: per occursum uero ducatur linea uni asymptoti
 proponitæ æquidistans; sectionemq; & lineam coniungentem tactus secas:
 quæ intersecuntur inter occursum, & lineam tactus coniungentem à se-
 ctione bifariam diuidetur.

Si hyperbole ab c , quam contingant rectæ lineæ ad, dc : asymptoti uero sint ef ,
 fg : & iuncta ac , ducatur per d linea dkl æquidistans ef . Dico dk ipsi kl æqualē
 esse. iungatur enim fd, bm , & ex utraque parte producatur, ut sit fh æqualis fb : & per
 bk

b k ducantur b e, k n æquidistantes ac, quæ ordinatim applicatae erunt. & quoniam triangulum f e b simile est triangulo d k n, erit ut quadratum d n ad quadratum n k, ita quadratum f b ad quadratum b e. Ut autem quadratum f b ad quadratum b e, ita linea h b ad rectum latus. quare ut quadratum d n ad quadratum n k, ita h b ad rectum latus. sed ut h b ad rectum latus, ita rectangulum h n b ad quadratum n k. ut igitur quadratum d n ad quadratum n k, ita h n b rectangulum ad quadratum n k. ergo rectangulum h n b quadrato d n est æquale. est autem & rectangulum m f d æquale quadrato f b, propterea quod linea ad sectionem contingit, & a m ordinatim est applicata. quare rectangulum h m b una cum quadrato b f æquale est rectangulo m f d una cum d n quadrato. sed rectangulum h n b una cum quadrato b f est æquale quadrato f n. ergo & rectangulum m f d una cum quadrato d n æquale est quadrato f n: idcircoq; linea d m ad punctum n bifariam secatur, adiunctam habens d f & K n, l m æquidistantes sunt. linea igitur d k ipsi k l est æqualis.

FED. C O M M A N D I N V S.

Vt autem quadratum f b ad quadratum b e, ita linea h b ad latus rectum.] Ex demonstratis in prima secundi huius. A

Sed ut h b ad rectum latus, ita rectangulum h n b ad quadratum n K.] Ex uigesima B prima primi huius.

Est autem & rectangulum m f d æquale quadrato f b, propterea quod linea ad sectionem contingit, & a m ordinatim est applicata.] Ex 37. primi huius. C

Quare rectangulum h n b una cum quadrato b f æquale est rectangulo m f d una cum d n quadrato.] Si enim æequalibus æqualia addantur, quæfient æqualia erunt. D

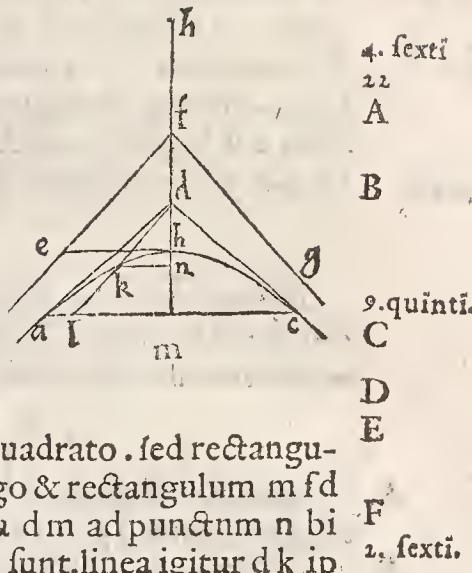
Sed rectangulum h n b una cum quadrato b f est æquale quadrato f n.] Ex 6. secundi elementorum. E

Idcircoq; linea d m ad punctum n bifariam secatur adiunctam habens d f.] Ex nono lemma Pappi & ijs, quæ in ipsum conscripsimus. F

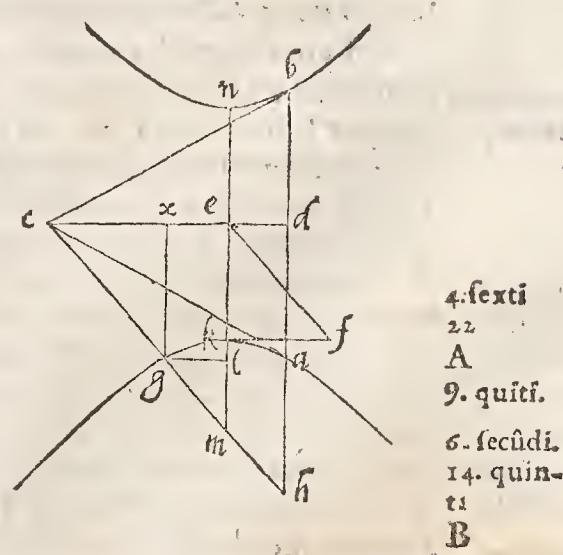
THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occur-
rant: & per tactus linea producatur: per occursum uero ducatur linea
asymptoto æquidistantis, quæ sectionem & lineam tactus coniungentem
secet: linea inter occursum, & eam, quæ tactus coniungit, interiecta à se-
ctione bifariam diuidetur.

Sint oppositæ sectiones a b; & contingentes lineæ
a c, c b: iunctaq; a b producatur: asymptotos uero sit
e f: & per c ducatur c g h, ipsis e f æquidistantis. Dico
c g æqualem esse g h. iungatur enim ce, & ad d producatur: & per e g ducatur e K m n, g x ipsis ab
æquidistantes: & per K g ducatur k f, g l æquidistantes
c d. Quoniam igitur triangulum k f e simile est triangulo m l g, ut quadratum e k ad quadratum
k f, ita erit m l quadratum ad quadratum l g. sed ut
quadratum e K ad quadratum k f, ita demonstratum
est n l k rectangulum ad quadratum l g. ergo rectan-
gulum n l k quadrato m l est æquale. commune appo-
natur quadratum k e. rectangulum igitur n l k una
cum quadrato K e, hoc est quadratum l e, hoc est g x,
æquale est quadratis m l, k e. ut autem quadratum g x



- 4. sexti
- 22
- A
- B
- 9. quinti.
- C
- D
- E
- F
- 2. sexti.



- 4. sexti
- 22
- A
- 9. quinti.
- 6. secundi.
- 14. quin-
ti
- B

A P O L L O N I I P E R G A E I

14. quīti ad quadrata ml, k e, ita quadratum x c ad quadratal g, k f. ex quibus sequitur quadratū x c æquale esse quadratis gl, k f. atque est quadratū gl æquale quadrato x c: & quadratum k f æquale quadrato dimidiæ secundæ diametri, hoc est rectangulo c e d. quadratum igitur cx quadrato x c, & rectangulo c e d est æquale ac propterea linea c d in partes quidem æquales secatur ad punctum x, in partes uero inæquales ad e, & d h æquidistat g x. ergo cg ipsi gh æqualis erit.

E V T O C I V S.

Possimus etiam hoc theorema demonstrare, ut antecedens, si duæ rectæ lineaæ sectionem unam contingent, sed quoniam omnino idem est, atque illud, quod in una hyperbola demonstratum fuit, demonstratio eadem repetatur.

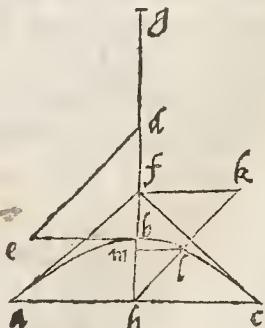
F E D. C O M M A N D I N V S.

- A** Sed ut quadratum e k ad quadratum k f, ita demonstratum est nlk rectangulum ad quadratum lg.] In antecedente scilicet.
- B** Ut autem quadratū gl x ad quadrata ml, ke, ita quadratum xc ad quadrata lg, kf.] Nam ob similitudinem triangulorum cxg, glm, fk e, ut linea gx ad xc, ita erit ek ad kf: & permutando ut gx ad ek, ita xc ad kf. Eadem ratione demonstrabitur ut ml ad ek; ita lg ad kf. quare & componendo, ut ml, ek, ad ek, ita lg, kf ad kf: conuertendoq; ut ek ad ml, ek, ita kf ad lg, kf. Quoniam igitur ut gx ad ek, ita xc ad kf: & ut ek ad ml, ek, ita kf ad lg, kf: erit ex æquali ut gx ad ml, ek, ita xc ad lg, kf. ergo ut quadratum gl ad ml, ek quadrata, ita quadratum xc ad quadrata lg, kf.
- C** Et quadratum kf æquale quadrato dimidiæ secundæ diametri.] Quadratum enim kf est æquale quartæ parti figurae, quæ fit ad diametrum kn, ex prima secundi huius: & cum secunda diameter median. proportionem habeat inter figura latera, erit dimidiæ ipsius quadratum itidem æquale quartæ parti figurae.
- D** Hoc est rectangulo c e d.] Ex 38. primi huius.
- E** Ac propterea linea c d in partes quidem æquales secatur ad punctum x, in partes uero inæquales ad e.] Ex decimo lemmate Pappi.

T H E O R E M A XXXII. PROPOSITIO XXXII.

Si hyperbole duæ rectæ lineaæ contingentes sibi ipsis occurant: & per tactus linea producatur: per occursum uero contingentium ducatur linea, tactus coniungenti æquidistans: & per punctum, quod coniungentem tactus bifariam secat, ducatur linea æquidistans alteri asymptoton: quæ inter dictum punctum, & lineam æquidistantem interlicetur, à sectio ne bifariam diuidetur.

- Sit hyperbole abc, cuius centrum d: & asymptotos de: contingant autem sectionem lineæ af, fc. iunganturq; ca; & fd, & ad gh producatur. erit ah æqualis hc. ita que per f ducatur fk ipsi ac æquidistans: & per h, hlk æquidistans de. Dico kl ipsi lh æqualem esse. ducantur enim per bl lineæ be, lm, quæ æquidistent ac iam ex ijs, quæ demonstrata sunt, ut quadratum db ad quadratum be, ita erit hm quadratum ad quadratum ml; & rectangulum gm b ad quadratum ml. rectangulum igitur gm b æquale est quadrato mh. est autem & hdf rectangulum quadrato db æquale; propterea quod af sectionem contingit, & ah ordinatim applicata est. ergo rectangulum gm b unâ cum quadrato db, hoc est quadratum dm æquale est rectangu lo hdf una cum quadrato mh: & ideo linea fh bifariam secat in m, adiunctam habens df: suntq; kf, lm æquidistantes. equalis igitur est Kl ipsi lh.



THEO-

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXIII.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineaæ contingentes sibi ipsis occur-
rant: & per tactus linea producatur: per occursum uero cōtingentium
ducatur linea tactus coniungenti æquidistans: & per punctum, quod con-
iungentem tactus bifariam secat, ducatur linea æquidistans alteri asym-
ptoton, cōueniensq; cum sectione, & cum linea æquidistantem per occur-
sum ducta: quæ inter dictum punctum, & lineaæ æquidistantem interii-
citur, à sectione bifariam diuidetur.

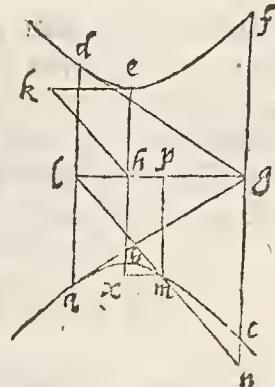
Sint oppositæ sectiones a b c, d e f & contingentes lineaæ a g, g d: centrum autem sit
h, & asymptotos h k: ducataq; h g producatur: & iuncta a l d, quæ bifariam secabitur
in l, ducantur per g, h lineaæ c g f, b h e ipsi ad æquidistantes: & per l ducatur l m n æ-
quidistantes h k. Dico l m æqualem esse m n. applicentur enim à punctis e m lineaæ e k,
m x æquidistantes g h: & per m ducatur m p æquidistans a d. Quoniam igitur ex ijs,
quæ ante demonstrata sunt, ut quadratum h e ad quadratum e k, ita est rectangulum
b x e ad quadratum x m erit ut h e quadratum ad quadratum
e k, ita rectangulum b x e unà cum quadrato h e; hoc est qua-
dratum h x ad quadrata k e, x m. quadratum autem k e ostendit
sum est æquale rectangulo g h l: & quadratum x m æquale est
quadrato h p. ut igitur quadratum h e ad quadratum e k, ita
quadratum h x, hoc est m p ad rectangulum g h l unà cum qua-
drato h p. sed ut quadratum h e ad quadratum e k, ita est qua-
dratum m p ad quadratum p l. quare ut quadratum m p ad qua-
dratum p l, ita quadratum m p ad rectangulum g h l unà cum
quadrato h p: & propterea quadratum l p rectâgulo g h l unà
cum quadrato h p æquale erit. ergo recta linea l g in partes æ-
quales secatur ad p, & in partes inæquales ad h. & sunt æquidi-
stantes m p, g n. linea igitur l m ipsis m n est æqualis.

39. secun-
di huius.

12. quinti

38. primi
huius.4. sexti
22.

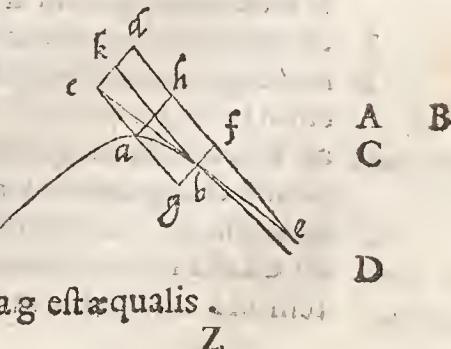
9. quinti.

10. lemma
Pappi.
2. sexti.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIO XXXIV.

Si in una asymptoton hyperbolæ aliquod punctum sumatur: ab eoq;
recta linea sectionem contingat & per tactum ducatur æquidistans asym-
ptoto: quæ per dictum punctum transit, alteri asymptoton æquidistantis,
à sectione bifariam diuidetur.

Sit hyperbole a b, asymptoti uero c d, d e: & sumpto in linea c d quovis punto c,
per ipsum ducatur c b e sectionem contingens. & per b qui-
dem ducatur t b g æquidistans c d; per c autem c a g, quæ
ipsi d e æquidistet. Dico lineam c a æqualem esse a g. duca-
tur enim per a linea a h, æquidistans c d; & per b linea b k,
æquidistans d e. Itaque quoniam c b æqualis est b e, erit &
c k ipsi k d; & d f ipsi f e æqualis. quod cum rectangulum
k b f æquale sit rectangulo c a h, & linea b f æqualis d k, hoc
est c K, & a h ipsi d c: rectangulum d c a æquale erit rectan-
gulo K c g. Ut igitur d c ad c K, ita c g ad a c. est autem d c
ipsius c k dupla. ergo & c g dupla c a: idcircoq; linea c a ipsi a g est æqualis.

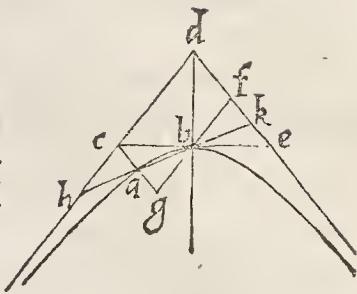


Z

A P O L L O N I I P E R G A E I

E V T O C I V S.

A L I T E R . Si hyperbole ab, cuius asymptoti cd, de; & contingens cb e. æquidistantes autem ca g, fb g. Dico ca ipsi ag æqualem esse. coniungatur enim ab, & ad hk producatur. Itaque quoniam cb æqualis est be; erit & kb ipsi ba æqualis. sed & kb est æqualis ah. ergo & ca ipsi ag æqualis erit.



F E D . C O M M A N D I N V S.

- A** Itaque quoniam cb æqualis est be.] Ex tertia secundi huius.
- B** Erit & ck ipsi kd, & df ipsi fe æqualis.] Ex secunda sexti.
- C** Quod cum rectangulum xb f æquale sit rectangulo cah.] Ex 12. secundi huius.
- D** Ut igitur dc ad ck, ita cg ad ac.] Ex 15. sexti.

I N A L I A M D E M O N S T R A T I O N E M
Q V A M A F F E R T E V T O C I V S.

- E** Itaque quoniam cb æqualis est be, erit & kb ipsi ba æqualis.] Ob similitudinem nanque triangulorum abc, Kbe, erit ut cb ad ba, ita eb ad bk: & permuando ut cb ad be, ita ab ad bk. æqualis igitur est kb ipsi ba.
- F** Sed & kb æqualis ah.] Ex octaua secundi huius. unde sequitur & ba æqualem esse ab.
- G** Ergo & ca ipsi ag æqualis erit.] Cum enim triangulum abg. sit æquale triangulo abc, & linea ba æqualis ab; rursus eadem ratione demonstrabitur linea ca æqualis ag.

T H E O R E M A X X V . P R O P O S I T I O X X V .

Iisdem positis si à sumpto punto recta linea ducatur, sectionem in duobus punctis secans; erit ut tota ad eam, quæ extra sumitur, ita inter se se portiones illius, quæ intra sectionem continetur.

Sit ab hyperbole, cuius asymptoti cd, de; contingensq; cb e; & hb æquidistans: ducatur autem per c recta linea cal fg, quæ sectionem in punctis af fecet. Dico ut fc ad ca, ita esle fl ad la. ducantur enim per puncta ca b f lineæ cnx, ka um, op br, fy, ipsi de æquidistantes & per af ducantur aps, tfr mx

A æquidistantes cd. Quoniam igitur æqualis est ac ipsi fg,
34. primi. erit & ka æqualis tg. sed ka est æqualis ds. ergo & tg ip-

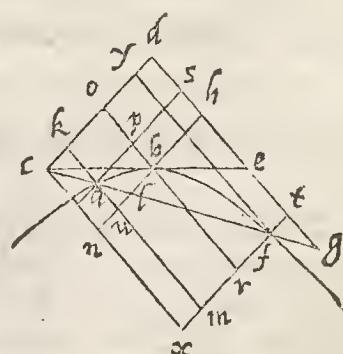
B si ds est æqualis: & propterea ck ipsi dy. Rursus quoniam c K æqualis est dy; & dk ipsi cy æqualis erit. Ut igitur dk

C ad kc, ita yc ad ck. & ut yc ad ck, ita fc ad ca sed ut fc
1. sexti. ad ca, ita mk ad ka: & ut mk ad ka, ita md rectangulum
ad rectangulum da. Ut autem dk ad kc, ita rectangulum
hk ad rectangulum kn. ergo ut rectangulum md ad re-

E ctangulum da, ita rectangulum hk ad ipsam kn. atque est
F rectangulum ad æquale rectangulo db, hoc est ipsi on. est

enim linea cb æqualis be, & do ipsi oc. quare ut rectangulum dm ad on, ita hk ad kn. reliquum igitur mh ad reliquum bk est, ut totum dm ad totum on. Quod cum rectangulum ks æquale sit ho, commune auferatur dp. erit reliquum kp reli-

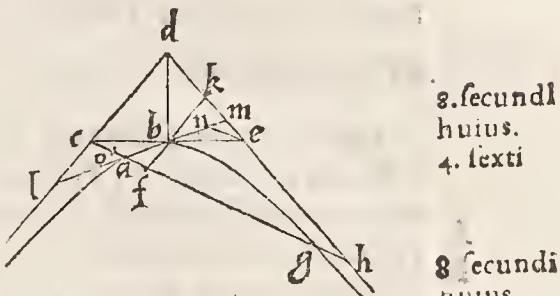
G quo ph æquale. commune apponatur ab. totum igitur kb æquale est ah: & ut md ad da, ita mh ad ha. sed ut md ad da, ita linea nrk ad ka, hoc est fc ad ca. Ut autem mh ad ha, ita mu ad ua, hoc est fl ad la. ergo ut fc ad ca, ita fl ad la.



E V T O

E V T O C I V S.

ALITER. Sit hyperbole ab, cuius asymptoti cd, de: & à punto c linea quidē cb ducta sectionem contingat; ca gh uero in duobus punctis fecet & per b ducatur fb k ipsi cd æquidistans. itaque demonstrare oportet ut gc ad ca, ita esse gf ad fa. coniungatur enim ab, atque ad lm producatur: & à pū cto e ducatur en e æquidistans ch. Quoniam igitur cb æqualis est be, & ca ipsi en est æqualis, & ab ipsi bn. sed cum bm sit æqualis la, erit nm excessus linearum la, ab. Et quoniam in triangulo amh duxta est en ipsi ah æquidistans, ut am ad mn, ita erit ah ad ne. & est ne æqualis ac. Ut igitur ha ad ac, ita am ad excessum linearum ab, bn, hoc est lb ad excessum linearum la, ab. Ut autem ha ad ac, ita gc ad ca est enim ca æqualis hg. ergo ut gc ad ca, ita lb ad excessum linearum la, ab; & cf ad excessum linearum ca, af. sed quoniam quereretur, si ut gc ad ca, ita sit gf ad fa, demonstrare oportet, ut tota gc ad totam ca, ita esse gf ablatam ad ablatam fa, & reliquam cf ad reliquam, uidelicet ad excessum linearum ca, af. quare demonstrandum est ut gc ad ca, ita cf ad excessum linearum ca, af.



s. secund
huius.
4. sexti

8 secundi
huius.
H

K

F E D. C O M M A N D I N V S.

Quoniam igitur æqualis est ac ipsi fg, erit & Ka æqualis tg.] Linea ac est æqualis A fg ex octava secundi huius, quare ob similitudinem triangulorum akc, gft, eodem, quo supra, modo demonstrabitur Ka ipsi tg æqualis.

B

Et propterea ck ipsi dy.] Est enim similiter ck æqualis ft, hoc est ipsi dy. C

Et ut yc ad ck, ita fc ad ca.] Ex quarta sexti ob similitudinem triangulorum fcy, C

ack.

D

E

Sed ut fc ad ca, ita mk ad ka.] Ob similitudinem triangulorum ack, afm. F

F

Atque est rectangulum ad æquale rectangulo db.] Ex 12. secundi huius.

G

Hoc est ipsi on, est enim linea cb æqualis be.] Nam cum sit linea cb æqualis be ex

tertia secundi huius, erit ob similitudinem triangulorum cbn, ebb, & hb æqualis bn, idcircoq;

rectangulum bo rectangulo on æquale.

Et ut md ad da, ita mh ad ha.] Superius enim demonstrauit, ut rectangulum md ad

da, ita esse mh ad bk.

H

I N A L I A M D E M O N S T R A T I O N E M

QVAM SCRIBIT E V T O C I V S.

Et cf ad excessum linearum ca, af.] Nanque ut gc ad ca, ita est lb ad excessum linearum la, ab: ut autem lb ad excessum linearum la, ab, ita cf ad excessum linearum ca, af, quod mox demonstrabimus. ergo ut gc ad ca, ita cf ad excessum ca, af. est enim ob similitudinem triangulorum acl, afb, ut la ad ab, ita ca ad af: & dividendo ut excessus, quo la excedit ab ad ipsam ab, ita excessus, quo ca excedit af ad ad af, & conuertendo. Rursum quoniam ut la ad ab, ita ca ad af; erit componendo ut lb ad ba, ita cf ad fa. Sed ut ab ad excessum, quo la excedit ab, ita af ad excessum, quo ca excedit af. ex æquali igitur ut lb ad excessum linearum la, ab, ita cf ad excessum linearum ca, af.

H

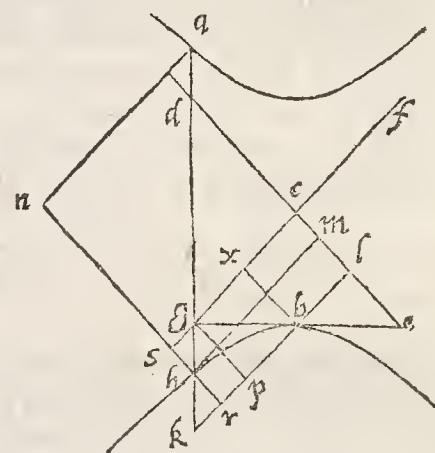
Quare demonstrandum est, ut gc ad ca, ita cf ad excessum linearum ca, af.] K Hoc autem est, quod proxime demonstrauit. sed licet etiam in hunc modum concludere. sit enim oa excessus, quo linea ca ipsam af excedit; ut sit co æqualis af. Quoniam igitur est ut tota gc ad totam ca, ita cf ablata ad ablatam ao; erit & reliqua gf ad reliquam oc, hoc est ad fa, ut gc ad ca. quod demonstrare oportebat.

A P O L L O N I I P E R G A E I

T H E O R E M A X X V I . P R O P O S I T I O X X V I .

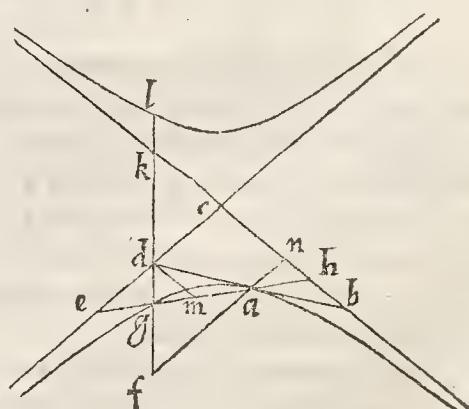
Iisdem positis, si à punto ducta linea, neque sectionem in duobus punctis secet, neque æquidistans sit asymptoto, sed cum opposita sectione conueniat: erit ut tota ad lineam, quæ inter sectionem, & æquidistantem per tactum ductam intericitur, ita quæ est inter oppositam sectionem, & asymptoton ad eam, quæ inter asymptoton & alteram sectionem.

- Sint oppositæ sectiones ab, quarum centrum c; asymptoti de, fg: & in linea gc sumatur punctum g; à quo ducatur gb e quidem sectionem contingens; gh uero neque æquidistans ipsi ce, neque sectionem in duobus punctis secans. iam constat hg productam conuenire cum linea cd. & propterea cum sectione a, ut demonstratum est. Conueniat igitur in punto a: & per b ducatur kb l æquidistans cg. Dico ut ag ad gh. ducantur enim à punctis ah lineæ hm, an, quæ ipsi cg æquidistant & à punctis bg h
- A** ducantur bx, gp, rh sn, quæ æquidistant de. Ita que quoniā ad æqualis est gh. erit ut ag ad gh, ita dh ad hg. Ut autem ag ad gh, ita ns ad sh: & ut dh ad hg, ita cs ad sg. Ut igitur ns ad sh, ita cs ad sg. sed ut ns ad sh, ita rectangulum nc ad rectangulum ch: & ut cs ad sg, ita rectangulum cr ad rectangulum rg. ergo ut rectangulum nc ad rectangulum ch, ita rectangulum cr ad ipsum rg. & ut unum ad unum, ita omnia ad omnia, quare ut nc ad ch, ita totum nl ad ch &
- B** rg. & quoniam eb est æqualis bg; erit & lb ipsi bp æqualis: & rectangulum lx æquale rectangulo bg. sed rectangulum lx rectangulo ch est æquale. ergo & bg ipsi ch. Ut igitur nc ad ch, ita totum nl ad bg, & gr; hoc est ad rx. sed rx est æquale lh, quoniam & ch ipsi bh, & mb ipsi xh. ergo ut nc ad ch, ita nl ad lh. Ut autem nc ad ch, ita ns ad sh, hoc est ag ad gh. & ut nl ad lh, ita linea nr ad rh, hoc est ak ad kh. quare ut ak ad kh; ita ag ad gh.
- C**
- D**
- E**
- F**
- G**
- H**



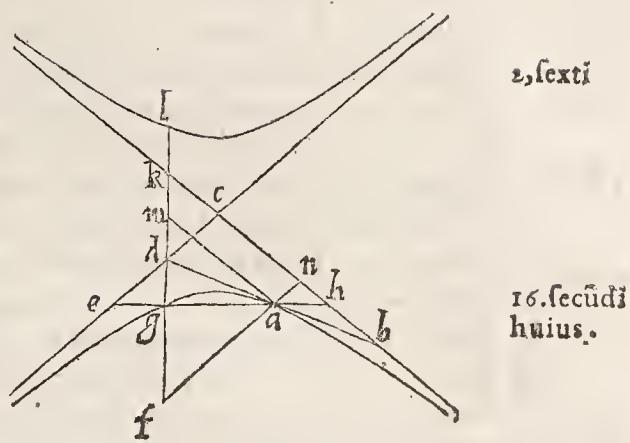
E V T O C I V S.

- A L I T E R.** Sint oppositæ sectiones al, quarum asymptoti bk, dc, & contingens bad. ducatur autem lk dgf: & sit fa ipsi cd æquidistans. demonstrandum est ut lf ad fg, ita ld ad dg. coniungatur enim ag, & ad eh protrahatur. erit ah æqualis eg, & hg ipsi ae. ducatur per d linea dm æquidistans ch. ergo ba ipsi ad est æqualis: & ha ipsi am. quare mg est excessus linearum ha, ag; hoc est ag, ge. & quoniam bk æquidistat dm, ut hg ad gm, ita erit kg ad gd. atque est ae æqualis hg, & ld ipsi kg. ergo ut ld ad dg, sic ae ad gm, hoc est ad excessum linearum ag, ge. sed ut ae ad excessum linearum ag, ge, ita df ad excessum linearum dg, gf. ergo ut ld ad dg, ita df ad excessum linearum dg, gf. & ut unū ad unum, ita omnia ad omnia. ut igitur ld ad dg ita tota lf ad dg, & excessum linearum dg, gf: hoc est ad gf.



ALITER.

ALITER Sint eadem, quæ supra, & per a ducatur a m ipsi b c æquidistans. Quoniam igitur b a est æqualis a d, erit & k m æqualis m d. & cum æquidistantes sint h k, a m, ut g m ad m k, ita erit g a ad a h, hoc est a g ad g e. Ut autem a g ad g e, ita f g ad g d: & ut g m ad m k, ita dupla ipsius g m ad duplam m k. ergo ut f h ad g d, ita dupla g m ad duplam m k. atque est l g dupla g m: est enim l k ipsi d g æqualis, & k m ipsi m d: & d k dupla k m. Ut igitur l g ad k d, ita f g ad g d: & permutoando, ut l g ad g f, ita k d ad d g. quare componendo ut l f ad f g, ita k g ad g d, hoc est l d ad d g.



F E D. C O M M A N D I N V S.

Iam constat h g productam conuenire cum linea c d.] Quoniam enim linea g h non æquidistat c e, neque sectionem in duobus punctis secat, necesse est ut conueniat cum ipsi c d ad partes d: nam si conueniret ad partes c, sectioni prius occurreret; atque ita eam in duobus punctis se caret, quod non ponitur. A

Et propterea cum sectione a ut demonstratum est.] In undecima secundi huius. B

Itaque quoniam a d æqualis est g h.] Ex sexta decima secundi huius. C

Erit ut a g ad g h, ita d h ad h g. ut autem a g ad g h, ita n s ad s h, & ut d h ad h g, ita e s ad s g.] Hunc locum nos restituimus; in græco enim exemplari ita legebatur. ἐπεὶ οὖν ἕστι τὸν αὐτὸν τὸν ἔστιν ὡς αὐτὸν πρὸς τὸν, ἔστιν ὡς αὐτὸν πρὸς τὸν, ἔστιν ὡς αὐτὸν πρὸς τὸν, ἔστιν ὡς αὐτὸν πρὸς τὸν.

Sed rx est æquale lh, quoniam & ch ipsi bh.] Vereor ne codex mendosus sit; non enim video, quorsum hæc faciant. At uero rx ipsi lh æquale esse manifesto constat. nam si à rectangulo cr auferantur æqualia, uidelicet rectangulum bc, & rectangulum ch; quæ remanent rx & lh æqualia erunt. Sed & aliter idem constare potest. est enim rectangulum bh utrique communis, & mb æquale xb, ex duodecima secundi huius. quare fortasse hoc modo legendum est. sed rx est æquale lh, quoniam & ch ipsi bc, & mb ipsi xb, ut utrumque demonstrationis modū inviat. E

I N A L I A M D E M O N S T R A T I O N E M,
Q V A E A B E U T O C I O A F F E R T V R.

Et h a ipsi a m.] Ob similitudinem triangulorum abh, adm. F

Sed ut a e ad excessum linearum ag, ge, ita df ad excessum linearum dg, gf.] Hoc G
demonstrabimus, ut in antecedente.

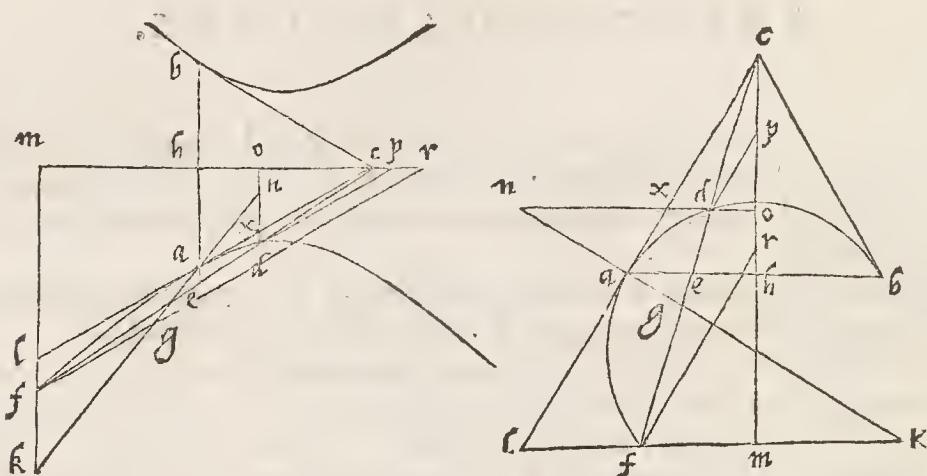
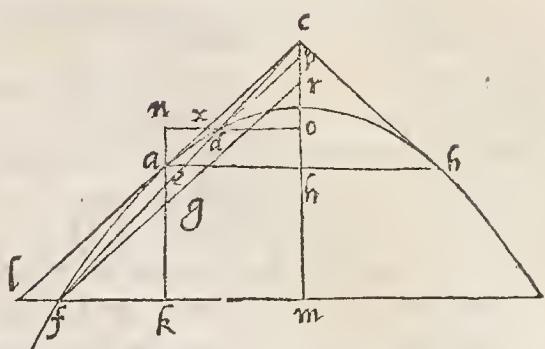
Hoc est ad gf.] Linea enim dg una cum excessu, quo exceditur à gf, est ipsi gf æqualis. H

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XXXVII.

Si coni sectionem, uel circuli circumferentiam, uel sectiones oppositas, contingentes duæ rectæ lineæ sibi ipsis occurrant; & per tactus linea producatur; ab occurso uero contingentium ducatur linea sectionem in duobus punctis secans: erit ut tota ad eam, quæ extra sumitur, ita portiones inter se se, quæ à linea tactus coniungente fiunt.

A P O L L O N I I P E R G A E I

- Sit coni sectio a b; contingentesq; a c, c b:
 & iuncta a b ducatur c d e f. Dico ut fc ad
 c d, ita esse fe ad e d. ducantur enim per ca
 sectionis diametri ch, a k: & per fd ducan
 tur d p, fr, l fm, n d o æquidistantes a h, l c.
 4. sexti Quoniam igitur l fm æquidistat x do, erit
 ut fc ad cd, ita lf ad xd, & fm ad do, &
 lm ad xo. ergo ut quadratum lm ad qua
 dratum xo, ita quadratum fm ad quadra
 tum do. sed ut quadratum lm ad quadra
 tum xo, ita lm c triangulum ad triægulum xc o: & ut quadratum fm ad quadratum
 do, ita triangulum fr m ad triangulum dp o. quare ut triangulum lcm ad triangu
 lum xo c, ita fr m triangulum ad triangulum dp o; & ita reliquum quadrilaterum
 19. quiti lcm ad reliquum xc pd. est autem lcm quadrilaterum triangulo alk æquale, &



- D quadrilaterum xc pd æquale triangulo an x. Ut igitur quadratum lm ad quadra
 tum xo, ita alk triangulum ad triangulum an x. sed ut quadratum lm ad quadra
 tum xo, ita quadratum fc ad quadratum cd: & ut triangulum alk ad triangulum
 an x, ita quadratum la ad quadratum ax; & quadratum fe ad quadratum ed. ergo
 22. sexti. ut quadratum fc ad quadratum cd, ita fe quadratum ad quadratum ed: & ideo ut
 linea fc ad cd, ita fe ad ed.

F. E. D. C O M M A N D I N V S.

- A Sed ut quadratum lm ad quadratum xo, ita lcm triangulum ad triangulum xc o.]
 20. sexti Quadratum enim lm ad quadratum xo duplam proportionem habet eius; quæ est lm ad xo. sed
 19 & triangulum lcm ad triangulum xc o proportionem habet duplam eius, quæ est lm ad xo;
 similia namque sunt triangula lcm, xc o. ergo ut quadratum lm ad quadratum xo, ita triangulum lcm ad triangulum xc o.
 B Et ut quadratum fm ad quadratum do, ita triangulum fr m ad triangulum dp o.] Ob similitudinem triangulorum fr m, dp o, ut dictum est.
 C Est autem lcm quadrilaterum triangulo alk æquale, & quadrilaterum xc pd
 æquale triangulo an x.] Nam in coni sectione, circuli circumferentia, & sectionibus oppo
 sitis diameter, quæ per occursum contingentia ducitur, uidelicet per punctum c bifariam secat
 lineam tactus coniungentem ex trigesima, & trigesima nona secundi huius; & propterea lineæ
 ab, fm ad diametrum cb ordinatim applicatae sunt. ergo ex ijs, quæ demonstrantur in quadra
 gesima nona, & quinquagesima primi huius quadrilaterum xc pd triangulo an x est æquale: &
 quadrilaterum ac rg (secet enim linea ak ipsam fr in g) æquale triangulo fg k. quare utrique
 addito quadrilatero lagf, erit totum quadrilaterum lcm æquale triangulo alk.. In oppositis
 uero

uero sectionibus illud idem sequitur ex demonstratis in undecima huius.

Sed ut quadratum lm ad quadratum xo , ita quadratum fc ad quadratum cd .] D

Nam ut lm ad xo , ita lc ad cx ; & ut lc ad cx , ita fc ad cd . ergo ut lm ad xo , ita fc ad cd : 4. sexti

& propterea ut quadratum lm ad quadratum xo , ita quadratum fc ad ipsum cd .

Ita quadratum la ad quadratum ax , & quadratum fe ad quadratum ed .] Est enim ut la ad ac , ita fe ad ec , ut autem ca ad ax , ita ce ad ed . ex æquali igitur ut la ad ax , ita fe ad ed ; & ut quadratum la ad quadratum ax , ita fe quadratum ad quadratum ed .

2.

2.

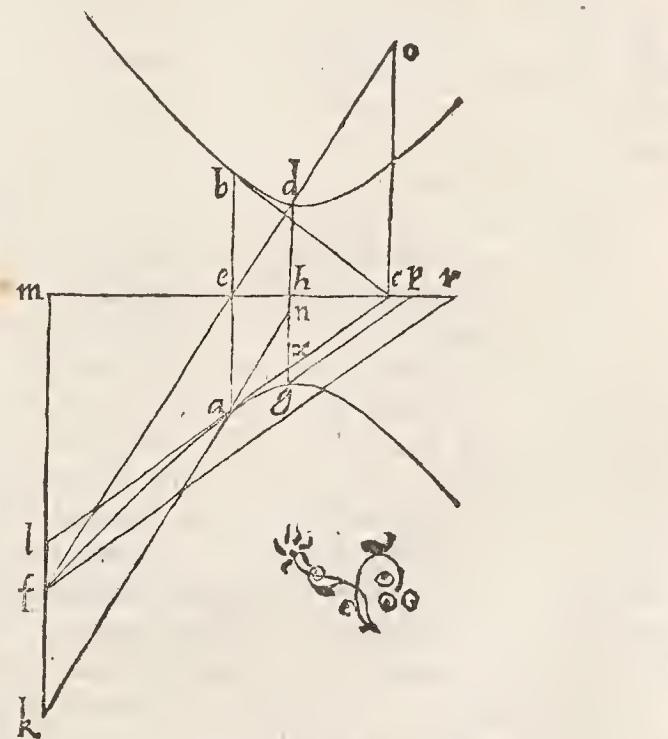
E

2. sexti

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

IISDEM positis si per contingentium occursum ducatur recta linea, tactus coniungenti æquidistans; & per punctum, quod coniungentem tactus bifariam diuidit, ducatur linea secans, & sectionem ipsam in duobus punctis, & lineam æquidistantem per occursum ductam: erit ut tota ad eam, quæ extra sumitur inter sectionem, & lineam æquidistantem, ita portiones inter se se, quæ à linea tactus coniungente efficiuntur.

Sit sectio ab , quam contingant rectæ lineæ $a c, cb$: sitq; ab coniungens tactus: & diametri an, cm . manifestum est lineam ab ad punctum e bifariam secari. Itaque ducatur à punto c linea co ipsi ab æquidistans. & per e ducatur feo . Dico ut fo ad od , ita esse fe ad ed . Ducantur enim à punctis fd, lk, m, dh, gx, n , æquidistantes ab ; & per fg ducantur fr, gp , quæ ipsi lc æquidistant. Eodem modo, quo supra, demonstrabimus ut quadratum lm ad quadratum xh , ita quadratum la ad quadratum ax . atque est ut quadratum lm ad quadratum xh , ita lc quadratum ad quadratum cx ; & quadratum fo ad quadratum od . ut autem quadratum la ad quadratum ax , ita fe quadratum ad quadratum ed . ergo ut quadratum fo ad quadratum od , ita quadratum fe ad quadratum ed . & ut linea fo ad od , ita fe ad ed .



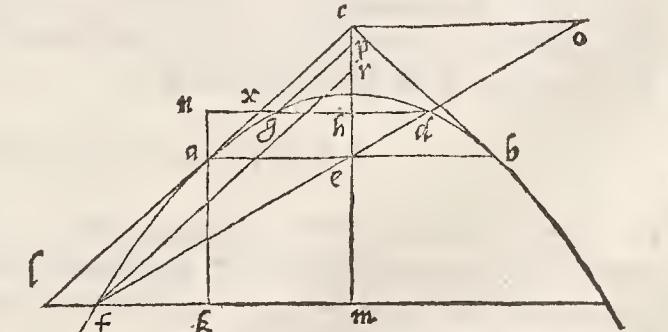
A

B

C

D

22. sexti



A

FED. COMMANDINVS.

Manifestum est lineam ab ad punctum e bifariam secari.] Ex trigesima, & trigesima nona secundi huius, ut supra admonuimus.

Eodem modo, quo supra, demonstrabimus, ut quadratum lm ad quadratum xh , ita quadratum la ad quadratum ax .] Demonstrabimus enim, ut quadratum lm ad quadratum xb , ita triangulum alK ad triangulum anx . sed ut triangulum alK ad triangulum anx , ita quadratum la ad quadratum ax :

B

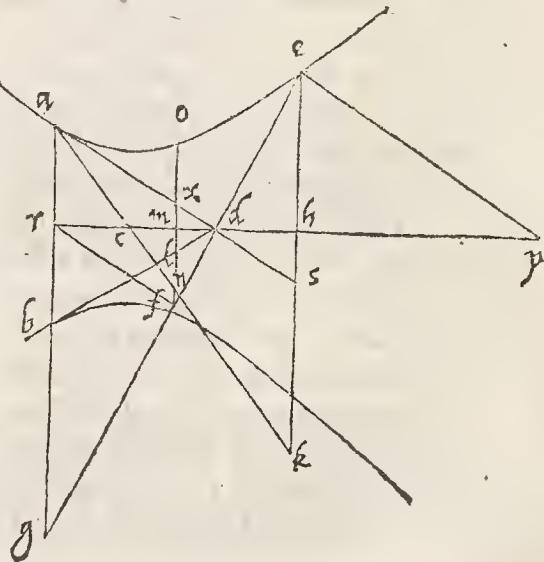
APOLLONII PERGAEI

- utrumque enim proportionem habet duplam eius, quæ est la ad ax. ergo ut quadratum lm ad quadratum xb, ita quadratum la ad quadratum ax.
- C** Atque est ut quadratum lm ad quadratum xb, ita lc quadratum ad quadratum cx; & quadratum fo ad quadratum od.] Est enim ut lc ad cx, ita fo ad od, propterea quod lineæ co, xd inter se æquidistant.
- D** Ut autem quadratum la ad quadratum ax, ita quadratum fe ad quadratum ed.] Rursus cum æquidistantes sint ae, xd, erit fe ad ed, ut la ad ax.

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XXXIX.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occur-
rant: & per tactus linea producatur: ab occurso uero contingentium
ducta linea, & utramque sectionem, & lineam tactus coniungentem se-
cer: erit ut tota ad eam, quæ extra sumitur, inter sectionem & coniun-
gentem tactus, ita portiones inter se se, quæ inter sectiones & contin-
gentium occursum intericiuntur.

- A** Sint oppositæ sectiones ab; quarum centrum c: & lineæ contingentes ad, db: iun-
ctæ uero ab, cd producatur; & per d ducatur edfg. Dico ut eg ad gf, ita esse ed
ad df. iungatur enim ac, producaturq; & per ef ducantur eh, hs, fm, mx ipsi ab.
æquidistantes; & ep, fr æquidistantes ad. Quoniam igitur fx, es inter se æquidi-
stant, & ad ipsas ducuntur ef, xs, hm; erit ut eh ad hs, ita fm ad mx: & permutan-
do ut eh ad fm, ita hs ad mx. ergo ut quadratum eh ad quadratum fm, ita qua-
dratum hs ad quadratum mx. ut autem quadratum eh ad quadratum fm, ita ehp
triangulum ad triangulum fm r: & ut quadratum hs ad quadratum mx, ita triangu-
lum dh s ad dm x triangulum. ergo ut trian-
gulum ehp ad triangulum fm r, ita triangu-
lum dh s ad triangulum dm x. Sed triangu-
lum ehp triangulis ask, hds est æquale: &
triangulum fm r æquale triangulis axn,
dm x. Ut igitur triangulum dh s ad trian-
gulum dm x, ita triangulum ask unà cum
triangulo dh s ad triangulum axn unà cum
B triangulo dm x: quare & reliquum trian-
gulum ask ad reliquum axn erit, ut trian-
gulum dh s ad ipsum dm x. ut autem trian-
gulum ask ad axn, ita quadratum ka ad qua-
C dratum an; hoc est quadratum eg ad qua-
dratum gf: & ut triangulum dh s ad trian-
gulum dm x, ita quadratum hd ad quadratum
dm, hoc est quadratum ed ad quadratum
D df. ergo ut eg ad gf ita ed ad df.



FED. COMMANDINVS.

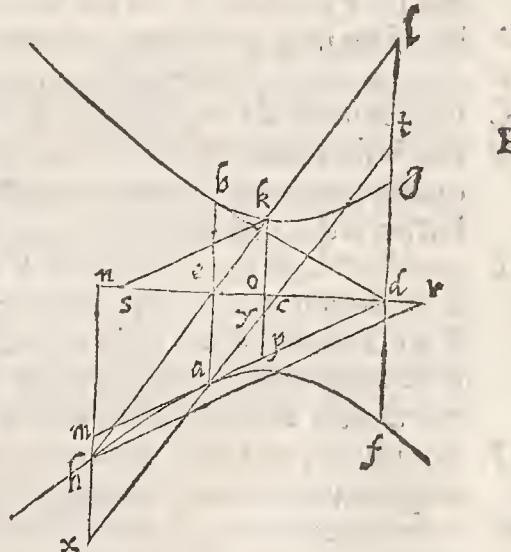
- A** Quoniam igitur fx, es inter se æquidistant; & ad ipsas ducuntur ef, xs, hm: erit
ut eh ad hs, ita fm ad mx.] Fiant enim triangula similia ehd, fdm; itemq; similia inter
se dh s, dm x. quare ut eh ad hd, ita fm ad md; & ut dh ad hs, ita dm ad mx. ex æquali
igitur ut eh ad hs, ita fm ad mx.
- B** Sed triangulum ehp triangulis ask, hds est æquale: & triangulum fm r æquale
triangulis axn, dm x.] Ex undecima huic.
- C** Hoc est quadratum eg ad quadratum gf.] Ob similitudinem triangulorum kn e, ang.
Ergo

Ergo ut eg ad gf, ita ed ad df.] Ex ijs, quæ dicta sunt, sequitur, ut quadratum eg ad quadratum gf, ita esse quadratum ed ad df quadratum. ergo ex 22. sexti ut linea eg ad gf, ita est ed ad df.

THEOREMA XL. PROPOSITIO XL.

Iisdem positis si per occursum contingentium ducatur recta linea, tactus coniungenti æquidistans; & à punto, quod coniungentem tactus bifariam diuidit, ducatur linea secans utraque sectionem, & æquidistantem ei, quæ tactus coniungit: erit ut tota ad eam, quæ extra sumitur inter æquidistantem & sectionem, ita portiones inter se se, quæ inter sectiones, & coniungentem tactus intericiuntur.

Sint oppositæ sectiones ab, quarum centrum c: & contingentes lineæ ad, db: iungaturq; ab, & cd. erit ae ipsi eb æqualis. ducatur per d linea fd g æquidistans ab: & per e quomodounque contingat h e k l. Dico ut hl ad lk, ita esse he ad ek. ducantur enim à punctis hk lineæ hn mx, ko p ipsi ab æquidistantes; & hr, ks æquidistantes ad: & ducatur ac xt. Itaque quoniam in lineas æquidistantes xm, kp cadunt xay, map; erit ut xa ad ay, ita ma ad ap. Vt autem xa ad ay, ita he ad ek: & ut he ad ek, ita hn ad Ko, propter similitudinem triangulorum hen, Keo. quare ut hn ad Ko, ita ma ad ap: & idcirco ut quadratum hn ad quadratum ko, ita ma quadratum ad quadratum ap. sed ut quadratum hn ad quadratum Ko, ita triangulum hrn ad triangulum kso: & ut quadratum ma ad quadratum ap, ita xm a triangulum ad triangulum ayp. ut igitur triangulum hrn ad triangulum kso, ita triangulum xm a ad triangulum ayp. triangulum autem hrn triangulis xam, mnd est æquale: & triangulum kso æquale triangulis ayp, pod. ergo ut triangulum xam unà cum triâculo mnd ad triangulum ayp unà cum triangulo pod, ita xm a triangulum ad triangulum ayp. quare & reliquum mnd ad reliquum dop est, ut totum ad totum. sed ut triangulum xm a ad triangulum ayp, ita quadratum xam ad quadratum ayp. Vt autem quadratum mnd ad quadratum pod, ita nd quadratum ad quadratum dop: & ut quadratum xam ad quadratum ayp, ita quadratum he ad quadratum ek. sed ut quadratum nd ad quadratum dop, ita quadratum he ad quadratum ek. ut igitur quadratum he ad quadratum ek, ita hl ad lk. D



F E D. C O M M A N D I N V S.

Erit a e ipsi eb æqualis.] Ex 39. secundi huius.

Erit ut xa ad ay, ita ma ad ap.] Ob similitudinem triangulorum amx, apy.

Vt autem xa ad ay, ita he ad ek.] Producantur ea, op usque ad lineam hr in puncta i q: erit bi ipsi ma æqualis, & bq æqualis mp. ergo ut xa ad ay, ita ma ad ap, hoc est bi ad iq: & ut bi ad iq, ita he ad ek. ut igitur xa ad ay, ita he ad ek.

Sed ut quadratum hn ad quadratum ko, ita trianguluni hrn ad triangulū kso] D
Sunt enim triangula hrn, kso inter se similia.

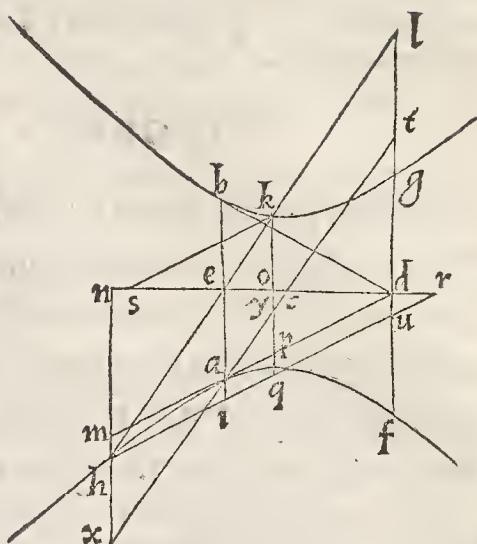
A
B
C
34 primi
2. sexi.
D

A P O L L O N I I P E R G A E I

E Triangulum autem $h r n$ triāgulis $x a m, m n d$ est æquale: & triangulum $k s o$ æquale triangulis $a y p, p o d.$] Ex undecima huius.

F Et ut quadratum $x a$ ad quadratū $a y$, ita quadratum $h e$ ad quadratum $e k.$] Superius enim ostensum est, ut $x a$ ad $a y$, ita $h e$ ad $e k.$

G Sed ut quadratum $n d$ ad quadratum $d o$, ita quadratum $h l$ ad quadratum $l k.$] Secet enim $d f$ lineam $h r$ in u . erit ut $n d$ ad $d o$, ita $m d$ ad $d p$, hoc est $h u$ ad $u q$. sed ut $h u$ ad $u q$, ita $h l$ ad $l K$. quare ut $n d$ ad $d o$, ita $h l$ ad $l K$. & ut quadratum $n d$ ad quadratum $d o$, ita quadratum $h l$ ad quadratum $l k.$



THEOREMA XLI. PROPOSITIO XLI.

Si parabolē contingentes tres rectæ lineæ inter se conueniant, in ean dem proportionem secabuntur.

Sit parabole $a b c$, quam rectæ lineæ $a d e, e f c, d b f$ contingant. Dico ut $c f$ ad $f e$, ita esse $e d$ ad $d a$, & $f b$ ad $b d$. coniungatur enim $a c$: &

A bifariam in g diuidatur. peripicum est lineam, quæ ab e ducitur ad g sectionis diametrum esse. si igitur per b tran-

B sit, erit linea $d f$ æquidistans $a c$, & ab $e g$ bifariam in pun-

C dō b secabitur: proptereaq; ad ipsi $d e$; & $e f$ ipsi $f c$ æ-
quals erit. constat igitur uerum esse illud, quod propone-
batur. Sed non transeat $e g$ per b , sed per aliud punctum,

E quod sit h . & per h ducatur $k h l$ æquidistans $a c$, quæ in
 h sectionem continget. erit per ea, quæ dicta sunt, $a k$ ip-
si $k e$ æqualis, & $c l$ ipsi $l e$. Itaque per punctum quidem
 b ducatur $m n b x$ æquidistans $e g$: per $a c$ uero duca-
tur $a o, c p$ æquidistantes $d f$. Quoniam igitur $m b$ ipsi $e h$

F æquidistat, erit $m b$ diameter: & $d f$ in b sectionem con-
tinget. quare $a o, c p$ ordinatim applicabūtur. & quoniam

35. primi
huius. $m b$ diameter est; & $c m$ sectionē contingit; ordiuatimq;
applicatur $c p$: erit $m b$ ipsi $b p$ æqualis. ergo $m f$ ipsi $f c$.

2. sexti. Quòd cum $m f$ sit æqualis $f c$; & $e l$ ipsi $l c$; ut $m c$ ad $c f$,
ita est $e c$ ad $c l$: & permutādo ut $m c$ ad $c e$, ita $f c$ ad $c l$.

exti Ut autem $m c$ ad $c e$, ita $x c$ ad $c g$. ergo ut $f c$ ad $c l$, ita
 $x c$ ad $c g$. sed ut $g c$ ad $c a$, ita $l c$ ad $c e$, quòd utraque

G utriusque dupla sit. ex æquali igitur, ut $c e$ ad $c f$, ita $a c$ ad
 $c x$: & per conuercionem rationis, ut $c e$ ad $e f$, ita $c a$ ad
 $a x$: diuidendoq; ut $c f$ ad $f e$, ita $c x$ ad $x a$. Rursus quoniā
diameter est $m b$, contingitq; $a n$: & ordinatim applicatur

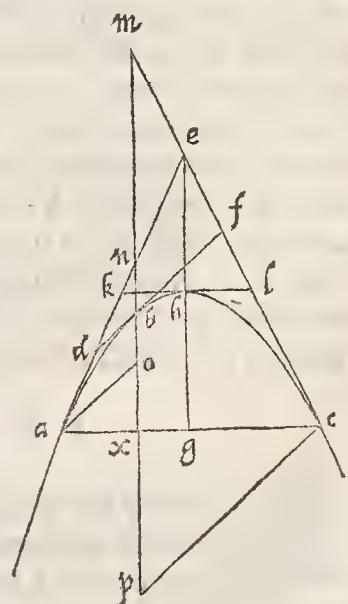
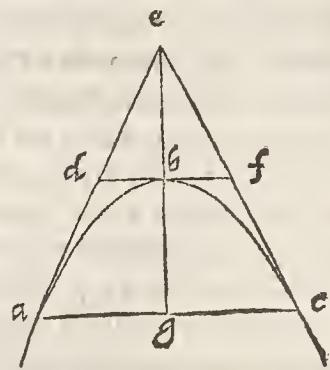
35. primi
huius. $a o$, erit $n b$ ipsi $b o$, & $n d$ ipsi $d a$ æqualis. est autem & $e K$

4. sexti æqualis $k a$. ergo ut $e a$ ad $a k$, ita $n a$ ad $a d$. & permutā-
do ut $e a$ ad $a n$, ita $k a$ ad $a d$. sed ut $e a$ ad $a n$, ita $g a$ ad

$a x$. quare ut $k a$ ad $a d$, ita $g a$ ad $a x$. atque est ut $c a$ ad
 $a g$, ita $e a$ ad $a k$: utraque enim utriusque est dupla. ex æquali igitur ut $c a$ ad $a x$, ita

$e a$ ad $a d$: & diuidendo ut $c x$ ad $x a$, ita $e d$ ad $d a$. demonstratum est autem, ut $c x$

H ad $x a$, ita $c f$ ad $f e$. ergo ut $c f$ ad $f e$, ita $e d$ ad $d a$. Rursus quoniā ut $c x$ ad $x a$, ita



c p

cp ad $a o$. & est linea quidem cp dupla $b f$, quod $c m$ ipsius $m f$ sit dupla; linea uero $a o$ dupla $d b$, quod & $a n$ ipsius $n d$. Ut igitur cx ad xa , ita $f b$ ad $b d$, & cf ad fe , & cd ad da .

F E D . C O M M A N D I N V . S.

Perpicuum est lineam, quae ab e ducitur ad g sectionis diametrum esse.] Ex 29. A secundi huius.

Si igitur per b transit, erit linea df æquidistans $a c$.] Ex 5. secundi huius. B

Et ab $e g$ bifariam in puncto b secabitur.] Est enim db ad $b f$, ut ag ad gc , quod de monstrauimus in commentarijs in sextam primi huius. C

Proptereaq; $a d$ ipsi $d e$, & cf ipsi fe æqualis erit.] Sequitur ex iam dictis, & ex 35. D primi huius, lineam gb ipsi be æqualem esse. quare ex secunda sexti, & $a d$ ipsi $d e$, & cf ipsi fe est æqualis.

Quæ in h sectionem continget.] Ex 32. primi huius, quod & aliter constare potest. si enim E $k h l$ non contingit sectionem, ducatur per h linea contingens, quæ æquidistat ipsi agc , ex quinta secundi huius. sed cum $k h l$ eidem æquidistet, erunt ambæ inter se æquidistantes, quod est absurdum: si quidem in puncto h conueniunt.

Erit $m b$ diameter.] Ex demonstratis in 46. primi huius. F

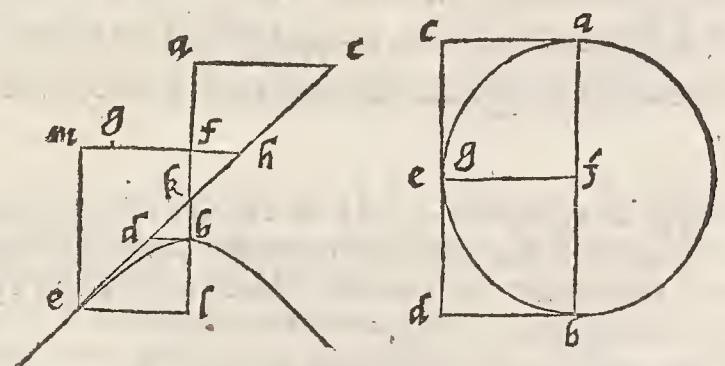
Ex æquali igitur ut $e c$ ad cf , ita ac ad cx .] Sequitur hoc ex æquali, & conuertendo. G

Rursus quoniam ut cx ad $x a$, ita cp ad $a o$] Ob similitudinem triangulorum $cp x, x a o$. H

THEOREMA XLII. PROPOSITIO XLII.

Si in hyperbola, uel ellipsi, uel circuli circumferentia, uel oppositis sectionibus ab extremo diametri ducantur lineæ æquidistantes ei, quæ ordinatim applicata est: & alia quæpiam linea quomodoconunque contingens ducantur: absindet ex ipsis lineas continentis rectangulum æquale quartæ parti figuræ, quæ ad eandem diametrum constituitur.

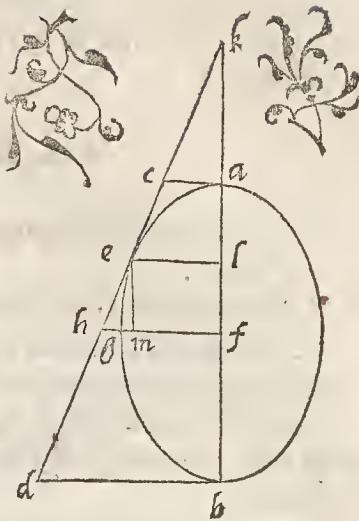
Sit aliqua prædictarum sectionum, cuius diameter $a b$: atque à punctis $a b$ ducantur lineæ $a c, b d$ æquidistantes ei, quæ ordinatim applicata est: & alia quæpiam linea $c e d$ in puncto e sectionem contingat. Dico rectangulum lineis $a c, b d$ contentum



æquale esse quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum $a b$ constituitur. sit enim sectionis centrum f : & per f ducatur fg h ipsis $a c, b d$ æquidistans. Itaque quoniam $a c, b d$ æquidistantes sunt, & est æquidistans fg : erit fg diameter ipsi $a b$ coniugata. ergo quadratum fg æquale est quartæ parti figuræ, quæ fit ad $a b$. si igitur in ellipsi & circulo linea fg per e transit, æquales sunt $a c, fg, b d$: & ideo per se manifestum est, rectangulum, quod continetur $a c, b d$ æquale esse quadrato fg , hoc est quartæ parti figuræ, quæ ad $a b$ constituitur. sed non transeat per e : & $d c, b a$ producuntæ conueniant

APOLLONII PERGAEI

- in k :ducaturq; per e linea quidem el ipsi ac æquidistans:
A em uero æquidistans ab. Quoniam igitur rectangulum
B kf quadrato af est æquale; ut kf ad fa, ita erit af ad
C fi. est autem ut kf ad fa, hoc est ad fb, ita ka ad al: & con-
 uertendo ut bf ad fk, ita la ad aK: componendoq; uel
D diuidendo, ut bk ad kf, ita lk ad ka. sed ut bK ad kf,
 ita db ad fh: & ut lk ad ka, ita el ad ca. ergo ut db
E ad fh, ita el ad ca: & propterea rectangulum contentum
 db, ca æquale est ei, quod fh, el continetur, hoc est recta-
F gulo h fm: rectangulum autem h fm est æquale quadrato
 fg; hoc est quartæ parti figuræ, quæ ad ab. rectangulum
 igitur ex db, ca æquale est quartæ parti figuræ, quæ ad dia-
 metrum ab constituitur.



F E D. C O M M A N D I N V S.

- A** Quoniam igitur rectangulum kf quadrato af est æquale.] Ex trigesima septima
 primi huius.
B Ut Kf ad fa, ita erit af ad fl.] Ex 15. sexti.
C Est autem ut kf ad fa, hoc est ad fb, ita ka ad al.] In hyperbola hoc sequitur ex 12.
 quinti. Quoniam enim ut kf ad fa, ita af ad fl, erit ut kf ad fa, ita kf, & fa ad af, & fl,
 hoc est ka ad al. sed in ellipsi & circulo ita dicimus. Quoniam ut kf ad fa, ita af ad fl, per
 conuerzionem rationis erit ut fk ad ka, ita fa ad al: & permutoando ut kf ad fa, ita ka
 ad al.
D Sed ut bk ad kf, ita db ad fh: & ut lk ad ka, ita el ad ca.] Hæc nos addidimus
 perspicuitatis causa, quem tamen desiderari uidebantur.
E Et propterea rectangulum contentum db, ca æquale est ei, quod fh, el contin-
 tetur.] Ex 16. sexti.
F Rectangulum autem h fm æquale est quadrato fg.] Ex 38. primi huius.

THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLIII.

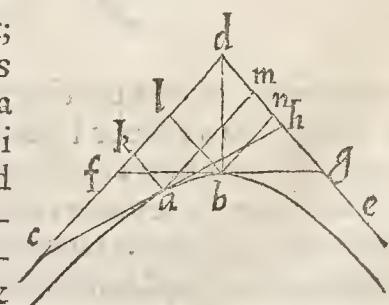
Si hyperbolæ recta linea contingat, absindet ex asymptotis ad sectionis centrum lineas continentæ rectangulum æquale ei, quod continentur lineis ab altera contingente abscissis ad uerticem sectionis, qui est ad axem.

Sit hyperbole ab, cuius asymptoti cd, de; & axis bd: ducatur autem per b linea fg sectionem contingens: & alia quæpiam utcunque contingens ducatur cah. Di-
 cō rectangulum fdg rectangulo cdh æquale esse. Ducatur enim à punctis ab lineæ
 ak, bl, quæ ipsi dg æquidistent; & lineæ am, bn, quæ æ-
 quidistent cd. Quoniam igitur cah sectionem contingit;
 erit ca æqualis ah, quare ch dupla est ha; & cd ipsius
 am; & dh ipsius ak dupla. ergo rectangulum cdh qua-
 druplum est rectanguli kam. Eodem modo demonstrabi-
 tur rectangulum fdg rectanguli lbn quadruplum. Sed
 rectangulum kam est æquale rectangulo lbn. rectangu-
 lum igitur cdh rectangulo fdg æquale erit. similiter de-
 monstrabitur etiam si db sit alia quæpiam diameter, &
 non axis.

3. secundi
huius.

4. sexti.

12. secundi
huius.

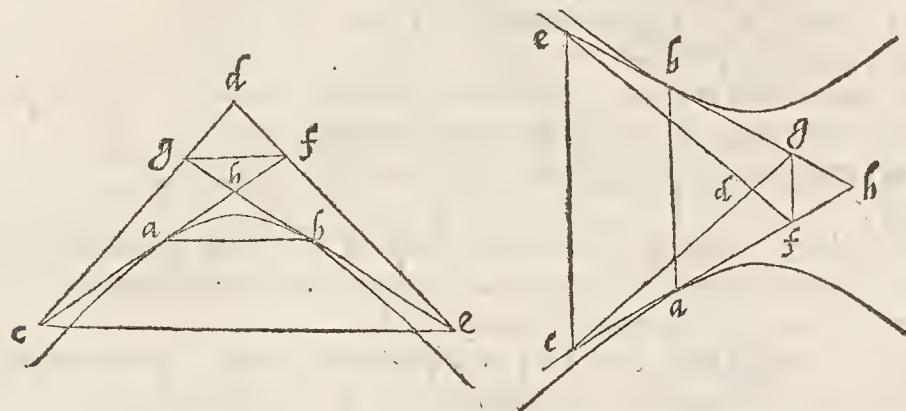


THEO

THEOREMA XLIVI. PROPOSITIO XLIVI.

Si hyperbolæ, uel oppositæ sectiones contingentes duæ rectæ lineæ asymptotis occurrant; quæ ad occursum ducuntur, lineæ tactus coniungenti æquidistantes erunt.

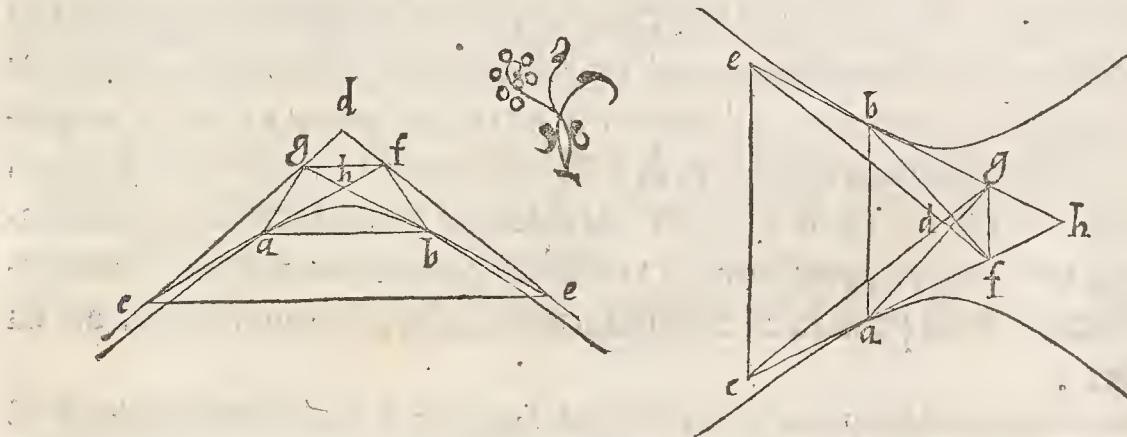
Sit hyperbole, uel oppositæ sectiones a b: asymptoti uero c d, d e; & contingentes c a h f, e b h g. iungantur q; a b, f g, c e. Dico eas inter se æquidistantes esse: Quoniam A enim rectangulum c d f æquale est rectangulo g d e; ut c d ad d e, ita erit g d ad d f. 15. sexti.



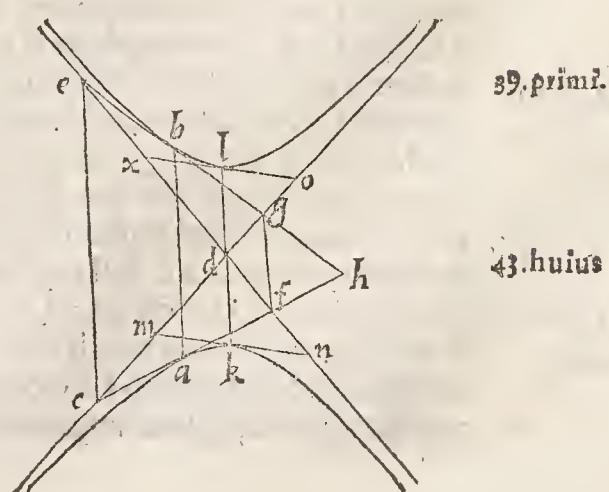
æquidistat igitur c e ipsi g f: & ideo ut h g ad g e, ita h f ad f c. Vt autem e g ad g b, B C ita c f ad f a: utraque enim utriusque est dupla. ergo ex æquali ut h g ad g b, ita h f ad f a. linea igitur g f ipsi a b est æquidistans. D

E V T O C I V S.

Demonstratis lineis c e, g f inter se æquidistantibus, coniungantur g a, f b. & quoniam æquidistant f g, c e; erit triangulum c g f triangulo e g f æquale. atque est triangulum quidem c g f du- 1. sexti.

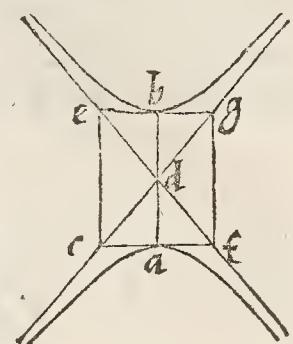


plum trianguli a g f; quod linea c f ipsius f a sit dupla: triangulum uero e g f duplum trianguli b g f. ergo triangulum a g f triangulo b g f est æquale: & propterea linea f g ipsi a b æquidistat. In oppositis uero sectionibus, si linea a b per centrum d non transeat, ducatur per d ipsi e c æquidistans K l: & per K l ducuntur m k n, x l o, quæ sectiones contingant. Quoniam igitur rectangulum x do æquale est rectangulo m d n: rectangulum autem x do rectangulo e d g est æquale: & rectangulum m d n æquale rectangulo c d f: sequitur rectangulum e d g rectangulo c d f æquale esse..



A P O L L O N I I P E R G A E
F E D . C O M M A N D I N V S .

A Quoniam enim rectangulum $c d f$ æquale est rectâgulo $g d e$, ut $c d$ ad $d e$, ita erit $g d$ ad $d f$.] Hoc in hyperbola ita esse ex antecedente constat: sed in oppositis sectionibus, cum linea $a b$ per centrum d non transit, ab Eutocio in fine commentarij demonstratur. Quod si $a b$ transeat per d , illud facile constare potest. descripta etenim figura lineæ $c f$, e g æquidistantes sunt. quare triangula $a d f$, $b d e$ similia: & cum $a d$ sit æqualis $d b$, etiam inter se æqualia erunt. Eadem quoque ratione æqualia ostendentur triangula $c d a$, $g d b$. ergo totum triangulum $c d f$ toti $g d e$ est æquale: & ex quintadecima propositione sexti elementorum, ut $c d$ ad $d g$, ita est $e d$ ad $d f$: permutoandoq; ut $c d$ ad $d e$, ita $g d$ ad $d f$. ergo $c e, g f$ inter se æquidistant.



Præterea ex demonstratis in quinta decima secundi huius, lineæ $c a$, $a f$, $e b$, $b g$ æquales sunt: ideoq; & æquales & æquidistantes lineæ, quæ ipsas coniungunt. cum igitur $c e, g f$ æquidistant ipsi $a b$, etiam inter se se æquidistant.

B Aequidistant igitur $c e$ ipsi $g f$.] Cum enim sit ut $c d$ ad $d e$, ita $g d$ ad $d f$: & angulus ad d , uel communis, uel æqualis: erit triangulum $g d f$ triangulo $c d e$ simile: & angulus $d g f$ æqualis angulo $d c e$. ergo $g f, c e$ inter se æquidistant necesse est.

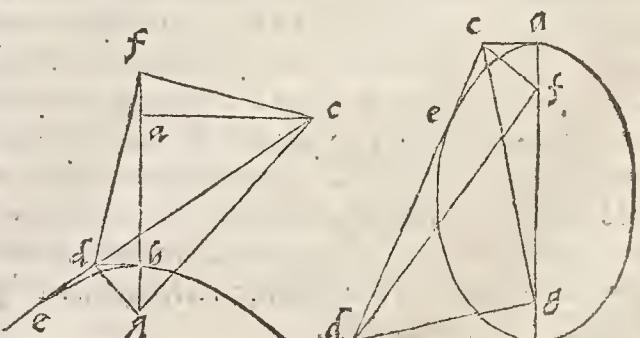
C 27. primi 28. Et ideo ut $h g$ ad $g e$, ita $h f$ ad $f c$.] In oppositis sectionibus sequitur illud ex secunda sexti. At uero in ellipsi ob similitudinem triangulorum $c h e$, $g h f$, ut $e b$ ad $h g$, ita est $c h$ ad $h f$: & componendo, conuertendoq; ut $h g$ ad $g e$, ita $h f$ ad $f c$. Hic autem incipit demonstrare lineam $g f$ ipsi $a b$ æquidistantem esse, quod quidem ab Eutocio etiam aliter demonstratur.

D 6. sexti Linea igitur $g f$ ipsi $a b$ est æquidistans.] Ex secunda sexti in oppositis sectionibus. sed in hyperbola cum sit ut $h g$ ad $g b$, ita $h f$ ad $f a$, & conuertendo, dividendoq; erit ut $b h$ ad $h g$, ita $a b$ ad $h f$: & permutoando ut $b h$ ad $h a$, ita $g h$ ad $h f$. sunt autem anguli ad h inter se æquales. triangulum igitur $a b h$ simile est triangulo $g h f$, & angulus $a b g$ æqualis angulo $b g f$. quare $g f$ ipsi $a b$ æquidistat.

THEOREMA XLV. PROPOSITIO XLV.

Si in hyperbola, uel ellipsi, uel circuli circumferentia, uel oppositis sectionibus ab extremo axis lineæ ad rectos angulos ducantur, & quartæ parti figuræ æquale rectangulum comparetur ad axem ex utraque parte; quod in hyperbola quidem, & sectionibus oppositis excedat figura quadrata; in ellipsi uero deficiat: & ducatur linea sectionem contingens, occurrensq; eis, quæ sunt ad rectos angulos: lineæ, quæ ab occurribus ducuntur ad puncta ex comparatione facta, angulos rectos ad ea efficient.

Sit una dictarum sectionum, cuius axis $a b$: & lineæ $a c$, $b d$ ad rectos angulos ducatur. contingat autem $c e d$: & quartæ parti figuræ æquale rectangulum comparetur ex utraque parte, sicuti dictum est; uidelicet rectangulum $a f b$, & $a g b$: & coniungantur $c f, c g, d f, d g$. Dico angulum $c f d$, & angulum $c g d$ rectū esse. Quoniam enim ostensum est rectangulum ex $a c, b d$ æquale quartæ parti figuræ, quæ ad $a b$ constituitur: atque est rectangulum $a f b$ æquale quartæ parti eiusdem figuræ: rectangulum ex $a c, b d$ rectangulo $a f b$ æquale erit. ergo ut $c a$ ad $a f$, ita $f b$ ad $b d$: & sunt anguli, qui ad $a b$ recti. angulus igitur $a c f$ angulo $b f d$ est æqualis: angulusq; $a f c$ æqualis angulo $f d b$. &



quoniam

quoniam angulus $c af$ est rectus, anguli $a cf, af c$ uni recto æquales erunt. demonstra 32. primi
tum autem est angulum $a cf$ æqualem esse angulo $d fb$. ergo $c fa, d fb$ anguli uni re-
cto sunt æquales. reliquo igitur angulus $d fc$ rectus est. similiter & angulus $c gd$ re-
ctus demonstrabitur.

F E D. C O M M A N D I N V S.

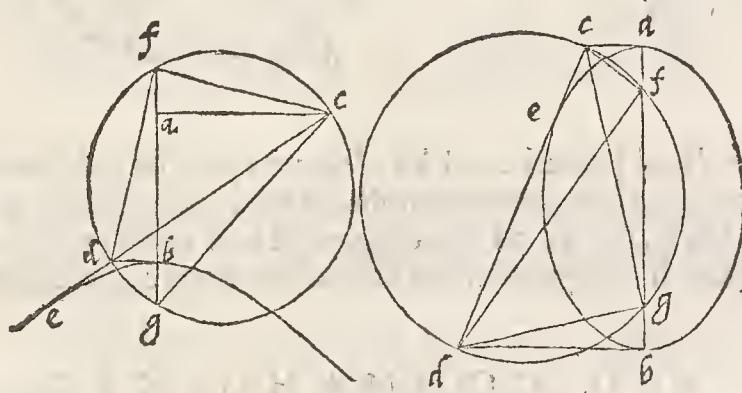
Reliquus igitur angulus $d fc$ rectus est.] In ellipsi scilicet, nam in hyperbola angulus $d fc$
ex duobus angulis $c fa, dfb$ constat.

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO XLVI.

Iisdem positis lineaæ coniunctæ æquales facient angulos ad contin-
gentes.

Iisdem nanque positis, dico angulum $a cf$ angulo $d cg$; & angulum $c df$ angulo
 $b dg$ æqualem esse. Quoniam enim ostendimus utrumque angulorum $c fd, cgd$ re-
ctum esse: si circa diametrum cd circulus describatur per puncta fg transibit. qua-

in antece-
dente.
31. tertii.
21. tertii.

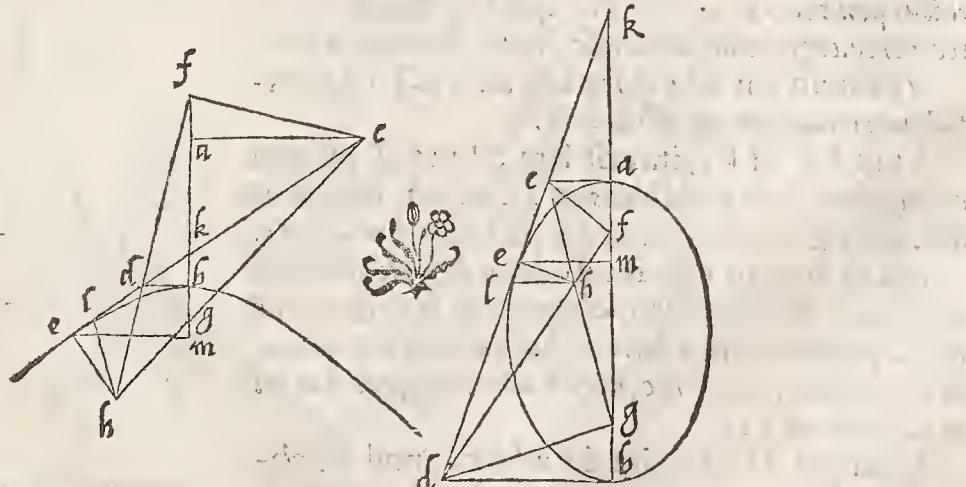


re angulus $d cg$ æqualis est angulo $d fg$, quod sint in eadem circuli portione. angu-
lus autem $d fg$ angulo $a cf$ est æqualis, ut demonstratum fuit. ergo & $d cg$ angulus
æqualis erit angulo $a cf$. Eodem modo & angulus $c df$ angulo $b dg$ æqualis osten-
detur.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO XLVII.

Iisdem positis linea ab occurso coniunctarum ad tactum ducta, per-
pendicularis est ad contingentem.

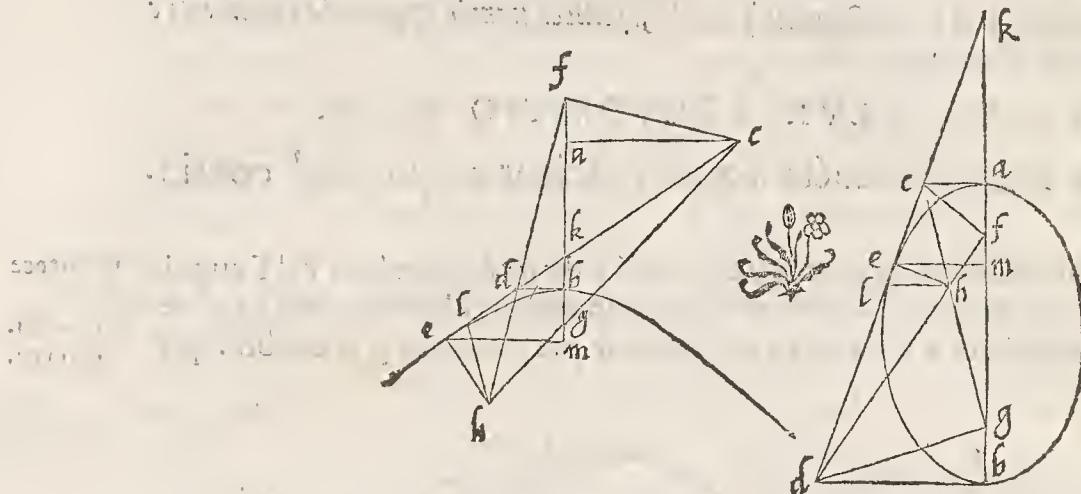
Ponantur eadem, quæ prius; & lineaæ $c g, fd$ sibi ipsis occurrant in h : & cd, ba pro-



ductæ occurrant in k : coniungaturq; eh . Dico eh ad cd perpendiculararem esse. si
enim non est ita, ducatur à punto h ad cd perpendicularis hl . Quoniam igitur an- A

A P O L L O N I I P E R G A E I

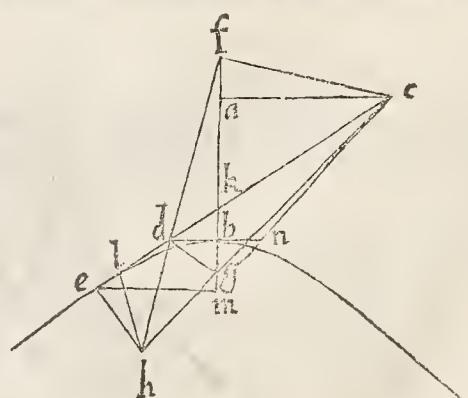
gulus c d f æqualis est angulo g d b, & angulus d b g rectus æqualis recto d l h: trian-
 4. sexti gulum d g b triangulo l h d simile erit. quareut g d ad d h, ita b d ad d l. Sed ut g d
 B ad d h, ita f c ad c h, propterea quod anguli ad f g recti, & qui ad h æquales sunt. &
 C ut f c ad c h, ita a c ad c l, ob similitudinem triangulorum a f c, l c h. Vt igitur b d ad
 D d l, ita a c ad c l: & permutando ut d b ad c a, ita d l ad l c. ut autem d b ad c a, ita



b k ad k a. ergo ut d l ad l c, ita b k ad k a. Itaque à punto e ducatur linea e m ipsi
 E a c æquidistans, quæ ad a b ordinatim applicata erit; & ut b k ad k a, ita erit b m ad
 F G m a. sed ut b m ad m a, ita d e ad e c. quareut d l ad l c, ita erit d e ad e c: quod est
 absurdum. non igitur h l perpendicularis est ad l c, neque alia ulla, præter ipsam h e.

F E D. C O M M A N D I N V S.

- A Quoniam igitur angulus c d f æqualis est angulo g d b.] Est enim ex antecedente an-
 gulus c d f æqualis angulo g d h: itemq; angulo l d ex quintadecima primi elementorum. ergo an-
 gulus g d b ipsi l d h est æqualis. est autem & d b g rectus æqualis recto d l b. triangulum igitur
 d g b triangulo d h l simile erit.
 B Et qui ad h æquales sunt.] In ellipsi enim anguli ad h sunt secundum uerticem. sed in hyper-
 bola idem est utriusque communis. ergo & reliquo reliquo æqualis, & triangulum f c b triangulo
 g d b simile erit.
 C Ob similitudinem triangulorum a f c, l c h.]
 Nonque angulus f a c rectus est æqualis angulo c l b, qui
 rectus ponitur; & angulus f c a ipsi l c b æqualis ex an-
 tecedente. ergo triangulum a f c simile est triangulo l b c.
 D Vt autem d b ad c a, ita b k ad k a.] Ob simili-
 tudinem triangulorum d b k, c a k.
 E Et ut b k ad k a, ita erit b m ad m a.] Est enim
 ex trigesima sexta primi hisius, ut a k ad k b, ita a m ad
 m b. quare & conuertendo ut b k ad k a, ita b m ad m a.
 F Sed ut b m ad m a, ita d e ad e c.] Hoc in ellipsi
 perspicuum est, sed in hyperbola iungatur m c, & d b ad
 ipsam producatur in n. erit ut b m ad m a, ita n m ad
 m c. ut autem n m ad m c, ita d e ad e c. ergo ut b m ad
 m a, ita d e ad e c.
 G Quare ut d l ad l c, ita d e ad e c, quod est ab-
 surdum.] Si enim fieri potest, sit ut d l ad l c, ita d e ad e c. erit conuertendo ut c l ad l d, ita c e
 ad e d: & dividendo ut c d ad d l, ita c d ad d e. ergo ex nona quinti d l est æqualis d e, pars toti,
 quod est absurdum.

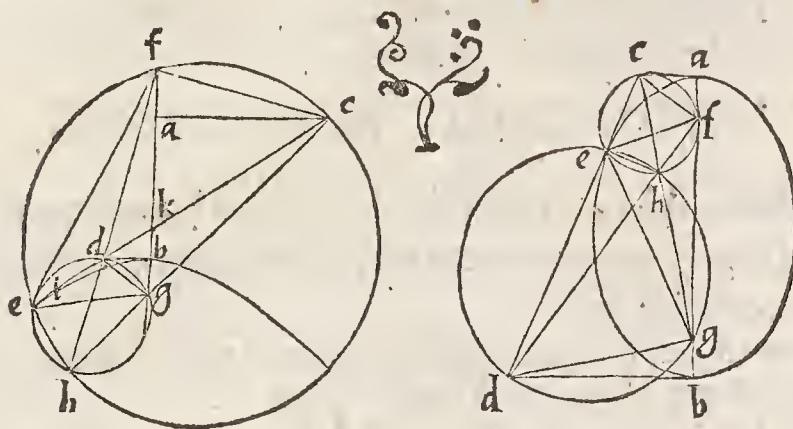


THEO

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO XLVIII.

Iisdem positis, ostendendum est lineas, quæ à tactu ducuntur, ad puncta ex comparatione facta, & quales continere angulos ad contingentem.

Ponantur eadem, quæ prius: & coniungantur e f, e g. Dico angulum c e f angulo g e d æqualem esse. Quoniam enim anguli d g h, d e h recti sunt: circulus circa diametrum d h descriptus per puncta e g transibit. quare angulus d h g æqualis erit angu-



lo d e g in eadem enim portione consistunt. Similiter & c e f angulus angulo c h f est æqualis, & angulus c h f angulo d h g; quod sint secundum uerticem. angulus igitur A c e f angulo g e d æqualis erit.

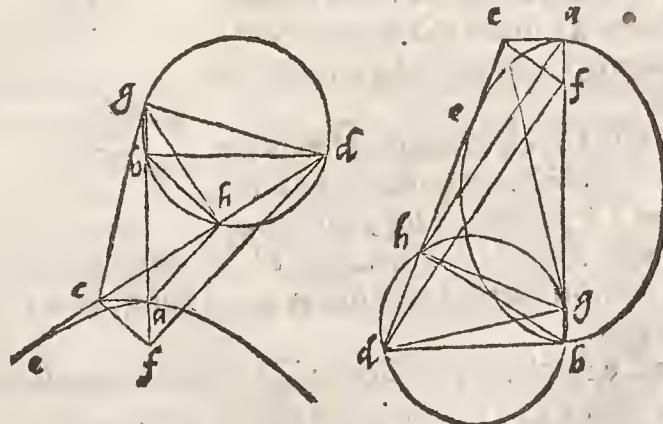
F E D . C O M M A N D I N V S.

Quod sint secundum uerticem.] Intelligendum est hoc in ellipsi, nam in hyperbola est A idem angulus.

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO XLIX.

Iisdem positis si ab aliquo punctorum ad contingentem perpendicularis agatur, quæ à facto punto ducuntur ad axis extrema, rectos angulos continebunt.

Ponantur eadem; & à punto g ad c d ducatur perpendicularis g h; & a h, b h iungantur. Dico angulum a h b rectum esse. Quoniam enim angulus d b g, & d h g



est rectus, si circa diametrum d g circulus describatur, transibit per puncta h b, & angulus g h b angulo b d g æqualis erit. angulus autem a g c ostensus est æqualis angu-

b

lo b d g. ergo g h b angulus æqualis est angulo a g c, hoc est angulo a h c: & propterea angulus c h g angulo a h b. sed rectus est angulus c h g. ergo & a h b rectus erit.

F E D. C O M M A N D I N V S.

- A Angulus autem a g c ostensus est æqualis angulo b d g.] In 45. huius.
Hoce est angulo a h c.] Sunt enim anguli c a g, c h g recti. quare si circa diametrum c g circulus describatur, per puncta a h transibit; & anguli a g c, a h c in eadem circuli portione inter se æquales erunt.
C Et propterea angulus c h g angulo a h b.] Addito scilicet utriusque angulo communi; in hyperbola quidem b h c, in ellipsi uero a h g angulo.

THEOREMA L. PROPOSITIO L.

Iisdem positis, si à centro sectionis ducatur linea contingenti occurrens; æquidistansq; linea per tactum, & per unum punctorum ductæ: dimidio axis æqualis crit.

Sint eadem, quæ supra, & centrum sit h. iungatur autem e f: & linea d c, b a inter se conueniant in K: & per h ducatur h l æquidistans e f. Dico l h ipsi h b æqualem esse. Iungantur enim c g, a l, l g, l b: & per g ducatur g m ipsi e f æquidistans.

A Quoniam igitur rectangle a f b est æqua le rectangulo a g b: & linea a f linea g b æqualis erit. est autem & a h æqualis h b. ergo & f h ipsi

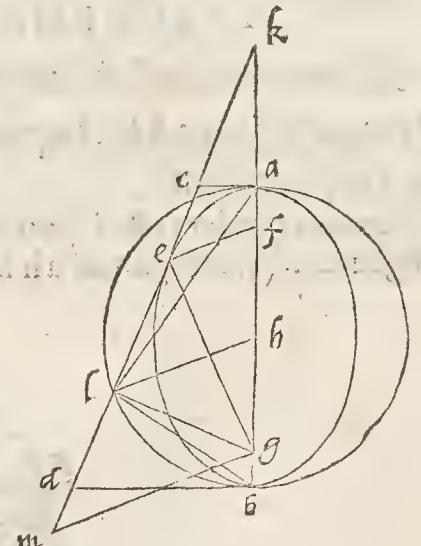
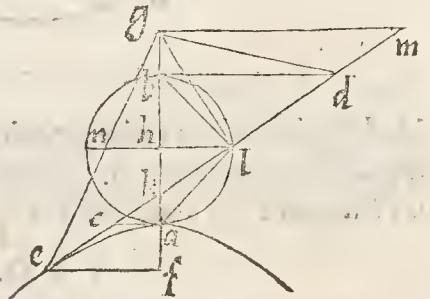
B C h g: & propterea e l ipsi l m est æqualis. Itaque 29. primi. quoniam demonstratum est angulum c e f angulo d e g æqualem esse: estq; angulus c e f æqualis

A angulo e m g: erit & e m g angulus ipsi m e g æ qualis: & linea e g linea g m. sed & e l est æqualis

D l m, ut demonstrauimus. linea igitur g l ad e m est

E perpendicularis. est autem & angulus a l b rectus. quare si circa diametrum a b circulus describatur, per punctum l transibit. atque est a h æqualis h b. ergo & h l, quæ est ex centro circuli, ipsi h b æqualis erit.

~~Si dicitur quod non possit transibit h l h b~~
F E D. C O M M A N D I N V S.



A Quoniam igitur rectangle a f b est æquale rectangulo a g b: & linea a f linea g b æqualis erit.]

Hoc a nobis demonstratum est in commentarijs in sextam decimam secundi huius.

B Et propterea e l ipsi l m est æqualis.] Hoc in ellipsi manifestum est, in hyperbola uero producatur l b usque ad e g in n: & cum f h sit æqualis h g, erit e n æ qualis n g. ut autem e n ad n g, ita e l ad l m. ergo e l ipsi l m æqualis erit.

C Itaque quoniam demonstratum est angulum c e f angulo d e g æqualem esse.] In quadrageinta octava huius.

D Linea igitur g l ad e m est perpendicularis.] Ex definitione linea perpendicularis. quitur enim ex dictis angulum g l e angulo g l m esse æqualem.

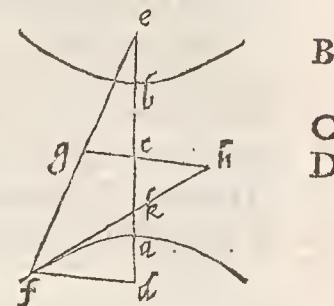
E Est autem & angulus a l b rectus.] Ex antecedente.

~~Ita si quod non possit transibit h l h b~~
Ergo alius est angulo e g m mutato in g l m. ergo h l h m

THEOREMA LI. PROPOSITIO LI.

Si in hyperbola, uel oppositis sectionibus ad axem comparetur rectangulum æquale quartæ parti figuræ: excedensq; figura quadrata: & à punctis ex comparatione factis ad quamlibet sectionem rectæ lineæ inclinentur: maior minorem quantitatem axis superabit.

Sit hyperbole, uel oppositæ sectiones, quarum axis $a b$, centrum c : & quartæ parti figuræ æquale sit utrumq; rectangulorum $a d b, a e b$: & à punctis e, f ad sectionem inclinentur $e f, f d$. Dico $e f$ ipsam $f d$ superare quantitate $a b$. ducatur enim per f linea $f k h$ sectionem contingens: & per c ducatur $g c h$ æquidistans $f d$. erit angulus $k h g$ ^{29: primi} A
angulo $K f d$ æqualis; alterni enim sunt: & angulus $k f d$ æqualis angulo $g f h$. ergo $\angle g f h$ ipsi $g h f$ lineaq; $g f$ linea $g h$, & linea $f g$ ipsi $g e$ æqualis erit; quod & $a e$ æqualis sit $d b$, & $a c$ ipsi $c b$, & $d c$ ipsi $c e$. est igitur linea $g h$ æqualis $g e$: & ob id fe ipsius $g h$ dupla. Itaque quoniam demonstrata est $c h$ ipsi $c b$ æqualis; erit $e f$ utriusque $g c, c b$ dupla. sed ipsius quidem $g c$ dupla est $f d$; ipsius uero $c b$ dupla $a b$. linea igitur $e f$ utriusque $f d, a b$ est æqualis: & propterea $e f$ ipsam $f d$ superat quantitate $a b$.



F E D. C O M M A N D I N V S.

Et angulus $k f d$ æqualis angulo $g f h$.] Ex 40. octaua huius. A

Quod & $a e$ æqualis sit $d b$.] Superius enim demonstravimus $e b$ ipsi $a d$ æqualem esse, B
quare addita utriusque $a b$, erit $a e$ æqualis $b d$. uereor tamen, ne potius legendum sit: quod & $a d$ æqualis sit $b e$. hoc enim ad propositum magis attinere uidetur.

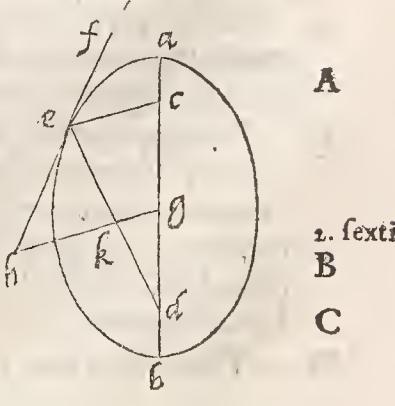
Itaque quoniam demonstrata est $c h$ ipsi $c b$ æqualis.] In antecedente scilicet. C

Sed ipsius quidem $g c$ dupla est $f d$.] Est enim ut $f e$ ad $e g$, ita $f d$ ad $g c$. sed $f e$ dupla est $e g$. ergo & $f d$ ipsius $g c$ dupla. D
4. sexti.

THEOREMA LII. PROPOSITIO LII.

Si in ellipsi ad maiorem axem ex utraque parte comparetur rectangulum æquale quartæ parti figuræ, deficiensq; figura quadrata: & à punctis ex comparatione factis ad sectionem rectæ lineæ inclinentur; ipsi axi æquales erunt.

Sit ellipsis; cuius maior axis $a b$: & sit utrumque rectangulum $a c b, a d b$ æquale quartæ parti figuræ: & à punctis c, d ad sectionem inclinentur rectæ lineæ $c e, e d$. Dico $c e, e d$ axi $a b$ æquales esse. Ducatur enim linea contingens $e f h$: & per centrum, quod sit g , ducatur $g k h$ ipsi $c e$ æquidistans. Quoniam igitur angulus $c e f$ est æqualis angulo $h e K$, & angulus $f c e$ angulo $h k$; & $e h K$ angulus ipsi $h e k$ æqualis erit; & linea $h k$ æqualis linea $k e$. & quoniam $a g$ est æqualis $g b$, & $a c$ ipsi $d b$; erit & $c g$ ipsi $g d$ æqualis. ergo & $e k$ æqualis $k d$. & ob id linea quidem $e d$ dupla est $h k$; linea uero $e c$ dupla $k g$. Utraque igitur $c e, e d$ ipsius $h g$ est dupla. sed & $a b$ dupla $h g$. quare ab ipsis $c e, e d$ æqualis erit.



A P O L L O N I I P E R G A E I

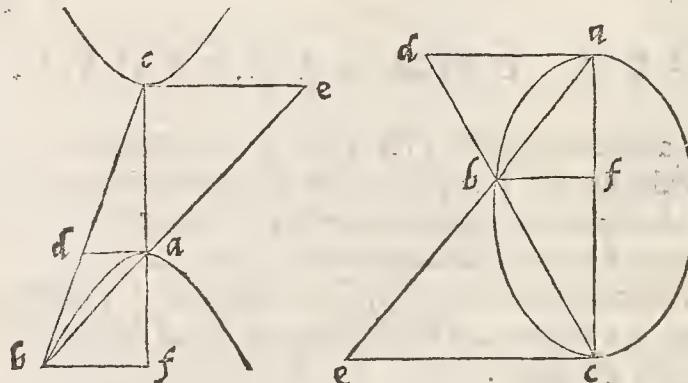
F E D . C O M M A N D I N V S .

- A Quoniam igitur angulus cef est æqualis angulo h e k.] Ex 40. octaua huius.
 B Et ob id linea quidem ed dupla est h k.] Est enim de dupla e k , hoc est h k , quæ ipsi
 k e æqualis demonstrata est.
 C Sed & ab dupla h g.] In quinquagesima enim huius demonstravit h g æqualem esse ga.

T H E O R E M A L I I I . P R O P O S I T I O L I I I .

Si in hyperbola, uel ellipsi, uel circuli circumferentia , uel sectionibus oppositis ab extremo diametri ducantur lineæ ordinatim applicatis æquidistantes ; & à dictis terminis ad idem sectionis punctum lineæ ductæ secant æquidistantes: rectangulum ex abscissis factum æquale erit figuræ, quæ ad eandem diametrum constituitur.

Sit una dictarum sectionum a b c, cuius diameter a c : ducanturq; a d, c e ordinatim applicatis æquidistantes: & a b e, c b d producantur. Dico rectangulum contentum a d, c e figuræ, quæ sit ad a c æquale esse. à punto enim b linea b f ordinatim applicetur. ergo ut rectangulum a f c ad quadratum f b, ita transuersum figuræ latuš ad rectum; & ita quadratum a c ad ipsam figuram. sed rectanguli a f c ad quadratum f b proportio componitur ex proportione a f ad f b, & proportione c f ad f b. ergo



proportio figuræ ad quadratum a c composita est ex proportione b f ad f a , & pro-
 D portione b f ad f c . Vt autem a f ad f b , ita a c ad c e: & ut c f ad f b , ita c a ad a d .
 E proportionio igitur figuræ ad quadratum a c componitur ex proportione e c ad c a , &
 23. sexti d a ad a c . sed rectangulum contentum a d, c e ad a c quadratum ex eisdem propo-
 portionibus componitur. ergo ut figura ad quadratum , ita est rectangulum contentum
 a d, c e ad quadratum a c . rectangulum igitur contentum a d, c e figuræ, quæ fit ad
 a c æquale erit.

F E D . C O M M A N D I N V S .

- A Ergo ut rectangulum a f c ad quadratum f b , ita transuersum figuræ latus ad re-
 etum.] Ex 21. primi huius.
 B Et ita quadratum a c ad ipsam figuram .] Est enim ut transuersum latus ad rectum, ita
 quadratum transuersi literis, hoc est quadratum a c ad rectangulum dictis lateribus contentum,
 hoc est ad figuram ipsam , ex prima sexti, uel ex lemmate in 22. decimi elementorum.
 C Ergo proportio figuræ ad quadratum a c composita est ex proportione b f ad f a ;
 & proportione b f ad f c .] Quoniam enim ut rectangulum a f c ad quadratum f b , ita qua-
 dratum a c ad ipsam figuram ; erit conuertendo, ut quadratum f b ad rectangulum a f c , ita figu-
 ra ipsa ad quadratum a c . sed proportio quadrati f b ad rectangulum a f c componitur ex propo-
 rtione b f ad f a , & b f ad f c . ergo & proportio figuræ ad quadratum a c ex eisdem propor-
 tionibus componitur.
 D Vt autem a f ad f b , ita a c ad c e ; & ut c f ad f b ita c a ad a d .] Ex quarta sexti ob
 simili

similitudinem triangulorum abf, dec : & triangulorum $c b f c d a$.

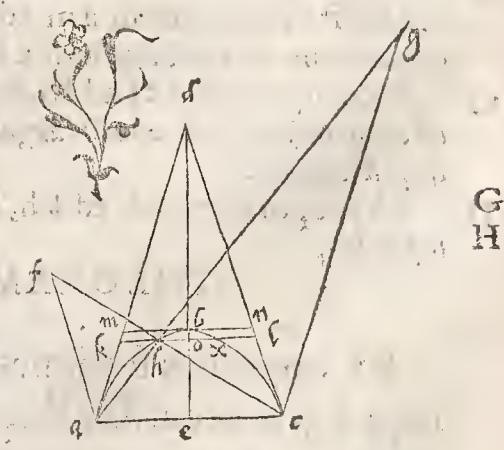
Proportio igitur figuræ ad quadratum ac componitur ex proportione ec ad ca . E & da ad ac .] Nam conuersa proportio ex eisdem proportionibus conuersis componitur, ut superius probatum est. uereor tamen ne hæc propositio ab aliquo inuersa sit, manifestior enim esset, si hoc modo explicaretur.

A puncto enim b linea bf ordinatim applicetur. ergo ut quadratum fb ad rectangulum afc , ita rectum figuræ latus ad transuersum: & ita figura ipsa ad quadratum ac . sed proportio quadrati fb ad rectangulum afc componitur ex proportione bf ad fa ; & proportione bf ad fc . ergo & proportio figuræ ad quadratum ac ex eisdem proportionibus componitur. Ut autem bf ad fa , ita ec ad ca : & ut bf ad fc , ita da ad ac . proportio igitur figuræ ad quadratum ac composita est ex proportione ec ad ca , & proportione da ad ac . & reliqua, quæ deinceps sequuntur.

THEOREMA LIII. PROPOSITIO LIII.

Si coni sectionem, uel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ sibi ipsis occurrant: & per tactus ducantur contingentibus æquidistantes: à tactibus uero ad idem sectionis punctum ductæ lineæ æquidistantes secant: rectangulum ex abscissis constans ad quadratum lineæ tactus coniungentis, proportionem habebit compositam ex proportione, quam habet quadratum portionis lineæ ab occurso contingenti ad punctum medium coniungentis tactus ductæ, quæ est intra sectionem, ad reliquæ portionis quadratum: & ex proportione, quam habet rectangulum ex contingentibus factum ad quartam partem quadrati lineæ tactus coniungentis:

Sit coni sectio, uel circuli circumferentia abc ; quam contingant rectæ lineæ ad , dc : & iuncta ac , bifariam in punto e diuidatur: iungaturq; $d b e$. à puncto autem a ducatur linea af ipsis cd æquidistans: & à puncto c linea cg æquidistans ad. denique sumpto in sectione quouis punto h , iungantnr ah, ch : & ad puncta gf producantur. Dico rectangulum constans ex af, cg ad quadratum ac proportionem habere compositam ex proportione quadrati eb ad quadratum bd , & proportione rectanguli ad dc ad quartam partem quadrati ac ; hoc est ad rectangulum aec . Ducatur enim à puncto quidem h linea hk lx o : à puncto autem b linea bmn , quæ ipsis ac æquidistent. perspicuum est lineam mn sectionem contingere. & cum a e sit æqua lis e c , erit & $m b$ ipsis $b n$ æqualis; & ko ipsis ol ; & ho ipsis ox ; & kh ipsis xl . Itaque quoniam $b m$ in a sectionem contingunt, & ipsis $m b$ æquidistans ducta est kh , erit ut quadratum am ad quadratum mb , hoc est ad rectangulum $m b n$, ita ak quadratum ad rectangulum xkh , hoc est ad rectangulum lhk : & permutando ut quadratum am ad quadratum ak ; ita $m b n$ rectangulum ad rectangulum lhk , ut autem rectangulum ex $ncma$ ad quadratum am , ita rectangulum ex lc, ka ad quadratum ak . ergo ex æquali ut rectangulum ex nc, ma ad rectangulum $m b n$, ita rectangulum ex lc, ka ad rectangulum lhk . sed rectangulum ex lc, ka ad rectangulum lhk proportionem habet compositam ex proportione cl ad lh , hoc est fa ad ac , & proportione ak ad kh , hoc est gc ad ca . hæc autem eadem est, quæ proportio rectanguli ex gc, fa ad quadratum ac . Ut igitur rectangulum ex nc, ma ad rectangulum $m b n$, ita rectangulum ex gc, fa ad quadratum ac . rectangulum uero ex nc, ma ad rectangulum $m b n$, sumpto medio rectangulo ndm , habet proportionem compositam ex propor-



A P O L L O N I I P E R G A E I

tione rectanguli ex n c, m a ad rectangulum n d m, & proportione rectanguli n d m ad rectangulum m b n. ergo & rectangulum ex g c, f a ad quadratum a c compositam habet proportionem ex proportione rectanguli ex n c, m a ad rectangulum n d m, & K proportione rectanguli n d m ad rectangulum m b n. sed ut rectangulum ex n c, m a L ad rectangulum n d m, ita quadratum e b ad quadratum b d: & ut rectangulum n d m ad rectangulum m b n, ita rectangulum c d a ad rectangulum a e c. rectangulum igitur ex g c, f a ad quadratum a c compositam propositionem habet ex proportione quadrati e b ad b d quadratum, & proportione rectanguli c d a ad rectangulum a e c.

E V T O C I V S.

- F** Ut autem rectangulum ex n c, m a ad quadratum a m, ita rectangulum ex l c, k a ad quadratum a k.] Quoniam enim ut a d ad d m, ita c d ad d n, erit per conuersionem ratio-
nis ut d a ad a m, ita d c ad c n. eadem quoque ratione, & convertendo demonstrabitur ut k a ad
a d, ita l c ad c d. ergo ex aequali & conuertendo ut m a ad a k, ita n c ad c l: & permutando ut
m a ad n c, ita a k ad c l. Ut igitur rectangulum ex n c, m a ad quadratum a m, ita rectangulum
ex l c, k a ad quadratum a k.
- K** Sed ut rectangulum ex n c, m a ad rectangulum n d m, ita quadratum e b ad qua-
dratum b d.] Nam cum rectangulum ex a m, c n ad rectangulum n d m compositam propor-
tionem habeat ex proportione a m ad m d, & proportione c n ad n d: ut autem a m ad m d, ita
e b ad b d: & ut c n ad n d, ita e b ad b d: habebit rectangulum ex a m, c n ad rectangulum n d m
proportionem duplam eius, quae est e b ad b d. sed & quadratum e b ad quadratum b d duplam
proportionem habet eius, quae est e b ad b d. quare ut rectangulum ex a m, c n ad rectangulum n d m,
ita quadratum e b ad b d quadratum.
- L** Et ut rectangulum n d m ad rectangulum m b n, ita rectangulum c d a ad rectan-
gulum a e c.] Quoniam enim rectangulum n d m ad rectangulum m b n proportionem habet
compositam ex proportione d n ad n b, & proportione d m ad m b: ut autem d n ad n b, ita d c
ad c e: & ut d m ad m b, ita d a ad a e: habebit quoque proportionem compositam ex proportione
d c ad c e, & proportione d a ad a e: quae quidem proportio eadem est, quam rectangulum c d a ha-
bet ad rectangulum a e c. ut igitur rectangulum n d m ad rectangulum m b n. ita rectangulum
c d a, ad rectangulum a e c.

F E D. C O M M A N D I N V S.

- A** Perspicuum est lineam m n sectionem contingere.] Ex trigesima secunda primi huius.
- B** Et cum a e sit aequalis c c, erit & m b ipsi b n aequalis, & k o ipsi o l.] Ex demon-
stratis in sextam primi huius.
- C** Et h o ipsi o x.] Ex quadragesima sexta, & quadragesima septima primi huius.
- D** Et k h ipsi x l.] Quoniam enim k o est aequalis o l, & h o ipsi o x, erit & reliqua k h re-
liqua x l aequalis.
- E** Itaque quoniam m b, m a sectionem contingunt, & ipsi m b aequalitatem duxit ducta est
K h l, erit ut quadratum a m ad quadratum m b, hoc est ad rectangulum m b n, ita a k
quadratum ad rectangulum x k h.] Ex sexta decima huius.
- G** Ex proportione c l ad l h, hoc est fa ad a c.] Ob similitudinem triangulorum l b c, c f a.
est enim angulus l c h aequalis angulo a f c: & angulus l h c angulo f c a: quare & reliqua reli-
quo est aequalis.
- H** Et proportione a k ad k h, hoc est g c ad c a.] Sunt enim triangula k b a, a c g inter-
se similia.

THEOREMA LV. PROPOSITIO LV.

S I oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occur-
rant: & per occursum ducatur linea coniungenti tactus aequalitatem duxit:
per tactus uero ducantur aequalitantes contingentibus: & a tactibus ad
idem

idem alterius sectionis punctum ducantur lineaæ, quæ æquidistantes secent: rectangulum ex abscissis constans ad quadratum lineaæ tactus coniungentis eandem proportionem habebit, quam rectangulum ex contingentibus factum ad quadratum lineaæ ab occursu ad sectionem ducet, quæ quidem coniungenti tactus æquidistet.

Sint oppositæ sectiones a b c, d e f, quas contingent rectæ lineaæ a g, g d: & iunctæ a d, ducatur per g linea c g e, ipsi a d æquidistans: & à punto a ducatur a m æquidistans d g: atque à d linea d m æquidistans a g.

Sumatur autem in sectione d f aliquod puctum f: & iungantur a f n, d f h. Dico ut quadratum c g ad rectangulum a g d, ita esse a d quadratum ad rectangulum ex a h, n d. ducatur enim per f linea f l k b, quæ ipsi a d æquidistet. Quoniam igitur demonstratum est, ut quadratum e g ad quadratum g d, ita rectangulum b l f ad l d quadratum: & est c g æqualis g e; & b k ipsi f l: erit ut quadratum c g ad quadratum g d, ita rectangulum k f l ad quadratum l d: est autem & ut quadratum d g ad rectangulum d g a, ita quadratum d l ad rectangulum ex d l, a k. ergo ex æquali ut quadratum c g ad rectangulum d g a, ita rectangulum k f l ad rectangulum ex d l, a k. sed proportio rectanguli k f l ad rectangulum ex d l, a k componitur ex proportione f k ad k a, & proportione f l ad l d. ut autem f k ad k a, ita a d ad d n: & ut f l ad l d, ita d a ad a h. proportio igitur quadrati c g ad rectangulum d g a composita est ex proportione a d ad d n, & proportione d a ad a h. sed quadrati a d ad rectangulum ex a h, n d proportio ex eisdem componitur. ergo ut quadratum c g ad rectangulum a g d, ita est a d quadratum ad rectangulum ex a h, n d: & conuertendo ut rectangulum a g d ad quadratum c g, ita rectangulum ex a h, n d ad quadratum a d.

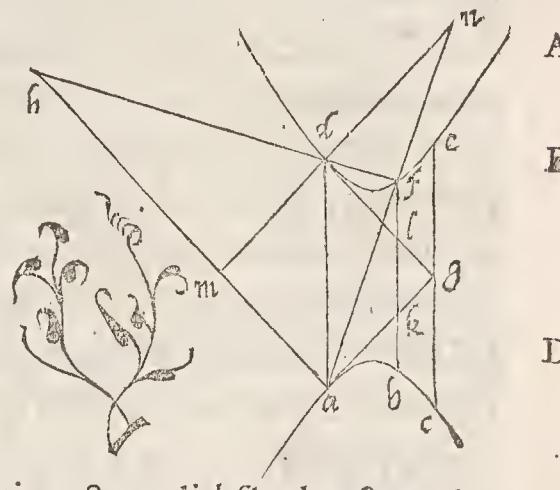
FED. COMMANDINVS.

Dico ut quadratum c g ad rectangulum a g d, ita esse a d quadratum ad rectangulum ex a h, n d.] Sic habent græci codices, sed ego potius ita legendum arbitror. Dico ut rectangulum a g d ad c g quadratum, ita esse rectangulum ex a h, n d ad quadratum a d. hoc enim est, quod & in principio proponit, & in fine concludit.

Quoniam igitur demonstratum est, ut quadratum e g ad quadratum g d, ita rectangulum b l f ad l d quadratum.] In uigesima huius.

Et est c g æqualis g e: & b k ipsi f l.] Secetur linea a d bifariam in puncto o, & iungatur g o, quæ lineam b f in p secet. erit o g oppositarum sectionum diameter recta; transuersa uero, quæ per centrum dicitur, ipsi a d æquidistans. ergo c g est æqualis g e, & b p ipsi p f. sed & k p æqualis est p l, quoniam & a o ipsi o d. reliqua igitur b k reliqua l f est æqualis.

Est autem & ut quadratum d g ad rectangulum d g a, ita quadratum d l ad rectangulum ex d l, a k.] Quoniam enim æquidistant a d, b f, ut d l ad l g, ita erit a K ad k g: componendoq; ut d g ad g l, ita a g ad g k: & per conuersionem rationis, ut g d ad d l, ita g a ad a k: & permixtando ut d g ad g a, ita d l ad a k. Ut uero d g ad g a, ita quadratum d g ad rectangulum d g a: & ut

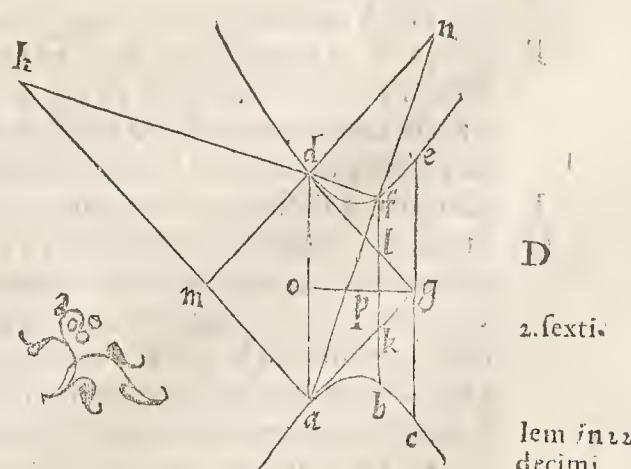


A

B

D

E



C

D

2. sexti.

lem in 12
decimi.

A P O L L O N I I P E R G A E I

dl ad aK , ita dl quadratum ad rectangulum ex dl , & aK . ergo ut quadratum dg ad rectangulum dg a, ita quadratum dl ad rectangulum ex dl : & aK .

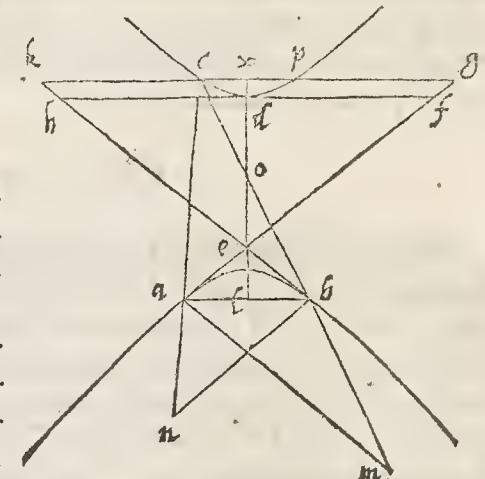
- E Vt autem fK ad ka , ita ad ad dn : & ut fl ad ld , ita da ad ah .] Ob similitudinem triangulorum afk, nad ; itemq; triangulorum lfd, adb .

THEOREMA LVI. PROPOSITIO LVI.

Si unam oppositarum sectionum duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant: & per tactus ducantur contingentibus æquidistantes: à tactibus uero ad idem alterius sectionis punctum ducantur lineæ, quæ æquidistantes secant: rectangulum ex abscissis constans ad quadratum lineæ tactus coniungentis proportionem habebit compositam ex proportione, quam habet quadratum portionis lineæ ad pūctum medium coniungentis tactus ductæ, quæ est inter dictum punctum, & alteram sectionem, ad quadratum eius, quæ inter sectionem & occursum interiicitur: & ex proportione, quam habet rectangulum ex contingentibus factum ad quartam partem quadrati lineæ tactus coniungentis.

Sint oppositæ sectiones a, b, c, d , quarum centrum o : lineæq; contingentes $aefg, behk$: & iuncta ab dividatur bifariam in l ; & iungatur le , & ad d producatur à punto autem a ducatur am ipsi be æquidistans: & à punto b ducatur bn æquidistans $a e$. denique sumpto in cd sectione quovis punto c , iungantur cbm, can . Dico rectangulū ex bn, am constans ad quadratum ab proportionem habere compositam ex proportione quadrati ld ad quadratum de , & proportione rectanguli acb ad quartam partem quadrati ab ; hoc est ad rectangulum alb . ducantur enim à punctis c, d lineæ cg, kh, df, f , quæ æquidistant ab . Cum igitur al sit æqualis lb ,

- A erit & hd ipsi df æqualis: & kx ipsi xg . sed cx
 B est æqualis xp . ergo & kc ipsi pg . Et quoniam
 C a, b, c, d oppositæ sectiones sunt: lineæq; contingentes, $behk, aefg$, & ducata est kg æquidistans hd : erit ut quadratum bh ad quadratum hd , ita quadratum bk ad rectangulum pkc . quadratum autem hd est æquale rectangulo hdf : & rectangulum pkc rectangulo kgc . ergo ut quadratum bh ad rectangulum hdf , ita quadratum bk ad rectangulum kgc . sed & ut rectangulum ex fa, hb ad quadratum hb , ita rectangulum ex ga, kb ad quadratum kb . ex æquali igitur ut rectangulum ex af, hb ad rectangulum hd , ita rectangulum ex ag, kb ad rectangulum kd . proportio autem rectanguli ex af, hb ad rectangulum hd , sumpto medio rectangulo hef , componitur ex proportione rectanguli ex af, hb ad rectangulum hef , & proportione rectanguli hef ad rectangulum hd . sed ut rectangulum ex af, hb ad rectangulum hef , ita quadratum ld ad quadratum de . & ut rectangulum hef ad rectangulum hd , ita rectangulum ag, kb ad rectangulum kd . ergo proportio rectanguli ex ag, kb ad rectangulum kd , composita est ex proportione quadrati ld ad quadratum de , & proportione rectanguli acb ad rectangulum alb . habet autem rectangulum ex ag, kb ad rectangulum kd proportionem compositam ex proportione bk ad kc , & proportione ag ad gc . Vtq; bk ad kc , ita est ma ad ab : & ut ag ad gc , ita nb ad ba . proportio igitur composita ex proportione ma ad ab , & proportione nb ad ba , quæ quidem eadem est, quam



quam habet rectangulum ex a m, b n ad quadratum a b; cōponitū ex proportione quadrati l d ad quadratum d e, & proportione rectanguli a e b ad rectangulum a l b.

F E D. C O M M A N D I N V S.

Cum igitur a l sit æqualis l b; erit h d ipsi d f æqualis, & k x ipsi x g.] Ob simili- A
tudinem triangulorum a e l, f e d, g e x: & triangulorum b e l, h e d, k e x.

Sed est c x æqualis x p. ergo & k c ipsi p g.] c x est æqualis x p ex quadragesima septi- B
ma primi huius, quare & reliqua k c reliqua p g æqualis erit.

Et quoniam a b, c d oppositæ sectiones sunt; lineæq; contingentes b e h k; a e f g C
& ducta est k g æquidistans h d: erit ut quadratum b h ad quadratum h d, ita quadra-
tum b k ad rectangulum p k c.] Ex decima octava huius.

Quadratum autem h d est æquale rectangulo h d f: & rectangulum p k c rectan- D
gulo k c g.] Nam h d est æqualis d f, ut demonstratum est, & g c ipsi p k.

Sed & ut rectangulum ex f a, h b ad quadratum h b, ita rectangulum ex g a, k b ad E
quadratum k b.] Quoniam enim triangula a e b, h e f, k e g similia sunt, erit ut f e ad e a, ita
h e ad e b: & componendo ut f a ad a e, ita h b ad b e. idem quoque ratione demonstrabimus, ut
g a ad a c, ita k b ad b e. quare & conuertendo ut e a ad a g, ita e b ad b k. erat autem ut f a
ad a e, ita h b ad b e. ergo ex æquili ut f a ad a g, ita h b ad b k: & permuto ut f a ad h b,
ita g a ad k b. Sed ut f a ad h b, ita rectangulum ex f a, h b ad quadratum h b: & ut g a ad k b;
ita rectangulum ex g a, k b ad quadratum k b ex prima sexti, uel ex lemmate in 22. decimi. ut igi-
tur rectangulum ex f a, h b ad quadratum h b, ita rectangulum ex g a, k b ad quadratum k b.

Sed ut rectangulum ex a f, h b ad rectangulum h e f, ita quadratum l d ad quadra- F
tum d e.] Nam rectangulum ex a f, h b ad rectangulum h e f proportionem habet compositam
ex proportione a f ad f e, & proportione b b ad h e. Ut autem a f ad f e, ita l d ad d e; & ut b b
ad h e, ita l d ad d e. rectangulum igitur ex a f, h b ad rectangulum h e f duplam proportionem ha-
bet eius, que est l d ad d e. sed & quadratum l d ad quadratum d e proportionem habet eiusdem
proportionis duplam. ergo ut rectangulum ex a f, h b ad rectangulum h e f, ita quadratum l d
ad quadratum d e.

Et ut rectangulum h e f ad rectangulum h d f, ita rectangulum a e b ad rectangu- G
lum a l b.] Rectangulum enim h e f ad rectangulum h d f proportionem compositam habet ex
proportione e b ad h d, & proportione e f ad f d. Ut autem e b ad h d, ita e b ad b l; & ut e f
ad f d, ita e a ad a l. quare rectangulum h e f ad rectangulum h d f proportionem quoque compo-
sitam habebit ex proportione e b ad b l; & proportione e a ad a l; que quidein proportio eadem
est, quam habet rectangulum a e b ad rectangulum a l b. ergo ut rectangulum h e f ad rectangu-
lum h d f, ita erit rectangulum a e b ad rectangulum a l b. hoc etiam ex quartodecimo lemmate
Pappi constare potest.

T E R T I I L I B R I F I N I S.

A P O L L O N I I P E R G A E I

C O N I C O R V M L I B E R I I I .

C U M C O M M E N T A R I I S E V T O C I I A S C A L O N I T A E ,
E T F E D E R I C I C O M M A N D I N I .

A P O L L O N I V S A T T A L O S . D .



Rivs quidem ex octo libris, quos de conicis compsuimus, tres primos edidi ad Eudemum Pergamenum scriptos. Eo autem mortuo cum reliquos ad te mittere decreuerimus, quod meorum scriptorum lectionem ambitiose desideras; in praesentia quartum librum mittimus. in eo haec continentur, ad quot puncta plurima conorum sectiones inter se & circuli circumferentiae occurtere possint, nisi totae totis congruant. præterea coni sectio, & circuli circumferentia, & oppositæ sectiones oppositis sectionibus ad quot puncta plurima occurrant: ad haec alia non pauca his similia. Ex his quod primo loco dictum est, Conon Samius ad Trasideum scribens explicauit, non recte in demonstrationibus uersatus. Itaque Nicoteles Cyrenæus eum leuiter reprehendit. De secundo Nicoteles in libro contra Cononem mentionem sic fecit, tanquam quod demonstrari facile posset. Sed tamen nos neque ab ipso, neque ab alio quopiam demonstratum inuenimus. Tertium uero, & eiusdem generis alia, ne in mentem quidem alicui unquam uenisse compumperimus. At quæ diximus ab aliis demonstrata non fuisse, omnia multis, ac uariis, nouisq; theorematibus indigent, quorum plurima in tribus primis libris, reliqua in hoc exposuimus. Horum igitur contemplatio non paruam utilitatem affert, & ad compositiones problematum, & ad determinationes. Nicoteles quidem ob dissensionem, quæ illi cum Conone erat, scribit nihil eorum, quæ à Conone inuenta sunt, ad determinationes pertinere. quod ille falso affirmat, nam & si omnino absque his determinationes reddere possimus, tamen ex his ipsis non nulla facilius percipiuntur; uelut hoc, quod aliquid multipliciter fiat, uel quotupliciter, uel rursus quod nullo modo fiat. quæ quidem cognitionis, si antecesserit, ad quæstiones magnam præstat facultatem. præterea ad diffinitionum resolutiones theorematata haec ualde utilia sunt. quæ etiam si absit utilitas, propter ipsas demonstrationes digna sunt, ut recipiantur. multa enim alia in mathematicis disciplinis ob hoc ipsum, & non ob aliquod aliud recipere consueuimus.

EVTO

DE V T O C H I V S .

QUARTVS liber Anthemii Sodalis charissime quæstionem quidem habet, quot modis conorum sectiones inter se se, & circuli circumferentia; itemq; oppositæ sectiones oppositis sectionibus occurrant. Sed est tamen elegans, & legentibus perspicuus, præsertim ex editione nostra: ac ne commentarijs quidem ullis indiget: quod enim deest ipsæ explent adscriptiones. In eo autem omnia demonstrantur argumentatione ducente ad id, quod fieri non potest; sicut & Euclides fecit in ijs, quæ de sectionibus, circulo, & tangentibus conscripsit, quæ sane ratio & ad usum accommodata, & necessaria Aristoteli, ac Geometris, præcipue uero Archimedi uisa est. Itaque tibi quatuor libros perlegendi licebit ex conicorum tractatione resoluere, & componere quodcumque propositum fuerit. quo circa & ipse Apollonius in principio libri dixit quatuor libros ad huius disciplinæ elementa sufficere: reliquos autem quatuor ad abundantiorē scientiam pertinere. perlege igitur eos diligenter: & si tibi placuerit reliquos ad eandem formam à nobis edi, id quoque Deo duce fiet. Vale.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si in coni sectione uel circuli circumferentia aliquod punctum extra sumatur: atque ab eo ad sectionem ducauntur duæ rectæ lineæ, una quidem contingens, altera uero in duobus punctis secans: & quam proportionem habet tota linea secans ad partem sui ipsius, quæ extra sumitur inter punctum & sectionem interiecta: in eandem diuidatur, quæ est intra, ita ut rectæ lineæ eiusdem rationis ad unum punctum conueniant: quæ à tactu ad divisionem ducitur occurret sectioni: & quæ ab occurso ducitur ad punctum, extra sumptum sectionem contingens: in

Sit coni sectio, uel circuli circumferentia a b c; & puncto extra sectionem sumpto, quod sit d, ab eo ducatur linea d b quidem contingens sectionem in b: d e c uero in punctis e c secans: & quam proportionem habet c d ad d e, eandem habeat c f ad f e. Dico lineam, quæ à punto b ad d f ducitur, occurrere sectioni; & quæ ab occurso ducitur ad d, sectionem contingere. Quoniam enim linea d c sectionem in duobus punctis secat, non erit ipsius diameter. quare licebit per d & diametrum, & lineam contingentem ducere, ducatur à punto d linea d a. sectionem contingens: & iuncta b a fecet ipsam, e c non in f, sed in alio punto g, si fieri possit. Itaque quoniam lineæ b d, d a sectionem contingunt: & ad tactus ducta est b a: linea uero c d sectionem in punctis c e secat; & ipsam a b secat in g: erit ut c d ad d e, ita c g ad g e, quod est absurdum. posuimus enim, ut c d ad d e, ita es- se c f ad f e. non igitur b a secat, e c in alio punto, quare in ipso f fecet necesse est.

F E D. M C O M M A N D U I N V I S.

Itaque quoniam lineæ b d, d a sectionem contingunt, & ad tactus ducta est b a; linea uero c d sectionem in punctis c e secat; & ipsam a b secat in g; erit ut c d ad d e, ita c g ad g e.] Ex triginta septima tertij huius.

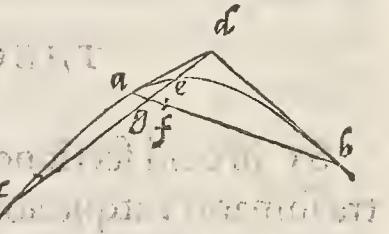
Quod est absurdum.] Nam cum posuerimus c f ad f e, ut c d ad d e, esset c g ad g e ut c f ad f e; & permuto g e ad c f, ut g e ad e f, est autem g e maior, quam c f, ergo c g e maior, quam e f, sed & minor. quod fieri non potest.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

HAEC quidem communiter in omnibus sectionibus demonstrata sunt. at in sola hyperbola, si linea d b sectionem contingat: & d c in punctis e c secet: puncta uero e c contineant tactum ad b: & punctum d sit intra angulum asymptotis compræhensum: similiter fiet demonstratio. possumus enim à punto d aliam ducere contingentem da, & quæ reliqua sunt ad demonstrationem, perficere.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

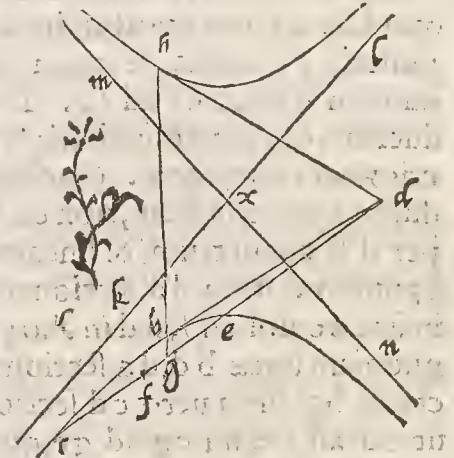
IIS DEM existentibus puncta e c tactum ad b non contineant: sitq; punctum d intra angulum asymptotis compræhensum. poterimus à punto d alteram contingentem ducre, quæ sit d a; & reliqua similiter demonstrare.



THEOREMA III. PROPOSITIO III.

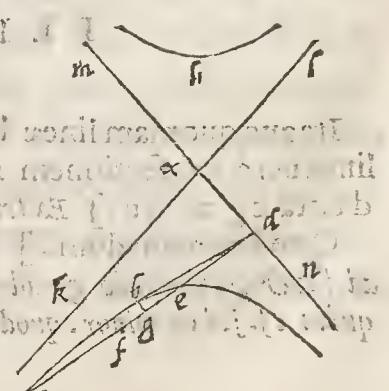
IIS DEM positis, si occursus e c contineant tactum ad b: & punctum d sit in angulo, qui deinceps est angulo asymptotis compræhenso: linea, quæ à tactu ad diuisionem ducitur, occurret oppositæ sectioni: & quæ ab occursu ducitur eandem sectionem continget.

Sint oppositæ sectiones b h, quarum asymptoti k l, m n: & punctum d sit in angulo l x n. ab eo autem ducata linea d b sectionem contingat: & d c secet, ita ut occursus e c tactum ad b contineant: & quam proportionem habet c d ad d e, habeat c f ad f e. demonstrandum est lineam, quæ à punto b ad f ducitur, occurre sectioni h: & quæ ab occursu ducitur ad d sectionem contingere. ducatur enim à punto d linea d h sectionem contingens: & iuncta h b, si fieri possit, non transeat per f, sed per aliud punctum g. est igitur ut c d ad d e, ita c g ad g e. quod est absurdum: posuiimus enim ut c d ad d e, ita esse c f ad f e.



THEOREMA V. PROPOSITIO V.

IIS DEM positis, si punctum d sit in una asymptoton; quæ à punto b ad f ducitur, eidem asymptoto æquidistantib: Ponantur enim eademi: & punctum d sit in aliqua asymptoton, uidelicet in m n. demonstrandum est lineam, quæ à punto b ipsum æquidistantem ducitur, in punctum f cadere. non enim, sed si fieri potest, sit b g. erit igitur ut c d ad d e, ita c g ad g e. quod est absurdum.



THEO-

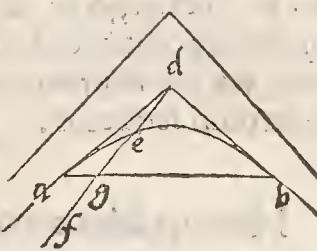
35. tertii
huius.

50

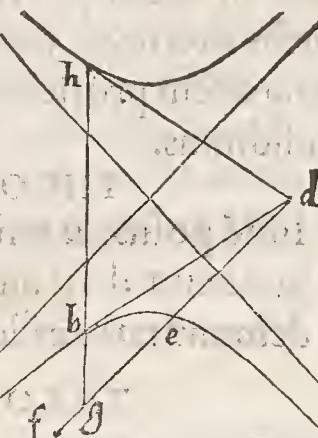
THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si in hyperbola aliquod punctum extra sumatur, à quo ad sectionem ducantur duæ rectæ lineæ; altera quidem contingens; altera uero æquidistantis unius asymptoton: & portio æquidistantis inter sectionem, & punctum interiecta, æqualis sit ei, quæ intra sectionem continetur: linea, quæ à tactu ad factum punctum ducitur occurret sectioni; & quæ ab occurso ducitur ad punctum extra sumptum sectionem continget.

Sit hyperbole a e b, & supnatur aliquod punctum extra, quod sit d. sit autem primo d intra angulum asymptotis contentum: & ab ipso d linea quidem d b ducta sectionem contingat; d e f uero æquidistantis alteri asymptoton: ponaturq; ipsi d e æqualis e f. Dico lineam, quæ à punto b ad f ducitur, occurre sectioni, & quæ ab occurso ducitur ad d, sectionem contingere. Ducatur enim d a, quæ sectionem contingat: & iuncta b a fecerit ipsam d e, si fieri potest, non in f, sed in alio punto g. erit d e æqualis e g, quod est absurdum, ponebatur enim de ipsi e f æqualis.



30. tertii huius.



31. tertii huius.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

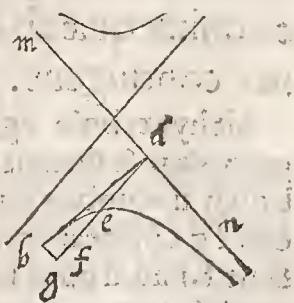
Iisdem positis, sit punctum d in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur. Dico etiam sic eadem euenire.

Ducatur enim d h sectionem contingens, & iuncta h b, si fieri potest, non cadat in f, sed in aliud punctum g. ergo d e est æqualis e g. quod est absurdum; ponebatur enim de æqualis e f.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Iisdem positis, sit punctum d in una asymptoton; & reliqua eadem fiant. Dico lineam, quæ à tactu ad extremam partem sumptæ ducitur; æquidistantem esse asymptoto, in qua est punctum d.

Sint enim eadem, quæ supra: ponaturq; ipsi d e æqualis e f: & à punto b ducatur b g æquidistantis m n, si fieri posset. æqualis igitur est d e ipsi e g. quod est absurdum: posuimus enim d e ipsi e f æqualem esse.



THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si ab eodem punto duæ rectæ lineæ ducantur, quarum ultraque coni sectionem, uel circuli circumferentiam in duobus punctis fecerit: & quam proportionem habent totæ lineæ ad portiones, quæ extra sumuntur, in eam diuidantur, quæ sunt intra, ita ut partes eiusdem rationis ad idem punctum conueniant: quæ per divisiones ducitur linea sectioni in duobus punctis occurret: & quæ ab occurso ad punctum extra sumptum ducuntur, sectionem contingent.

APOLLONIUS PERGAEI

Sit aliqua prædictarum sectionum ab & ab aliquo puncto d ducatur linea e, d f quæ sectionem fecent; illa quidem in h e punctis, hæc uero in fg: & quam proportionem habet e d ad d h, eandem habeat el ad l h: & rursus quam habet fd ad dg, habeat fk ad kg. Dicò lineam quæ ab l ad k ducitur utraque ex parte occurrere sectioni: & quæ ab occursibus ducuntur ad d sectionem contingere. Quoniam enim utraque linearum e d, d f sectionem in duobus punctis fecerit, poterimus ab ipso d sectionis diametrum ducere. quare & contingentes ex utraque parte ducantur igitur da, d b, quæ sectionem contingant: & iuncta ba, si fieri possit, non transeat per lk, sed uel per alterum ipsorum tantum, uel per neutrum. transeat primo per l tantum, & lineam fg in punto m fecet. ergo ut fd ad dg, ita fm ad mg, quod est absurdum; ponitur enim ut fd ad dg, ita fk ad kg. si uero linea ba per neutrum punctorum lk transeat, in utraque ipsarum de, d f, id quod est absurdum sequetur.

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Hæc quidem communiter in omnibus, at in sola hyperbola, si alia quidem eadem sint, unius autem rectæ lineæ occursus contineant occursus alterius: & punctum d sit intra angulum asymptotis comprehensum, eadem prorius euenerit, quæ dicta sunt, ut in secundo theoremate tradidimus.

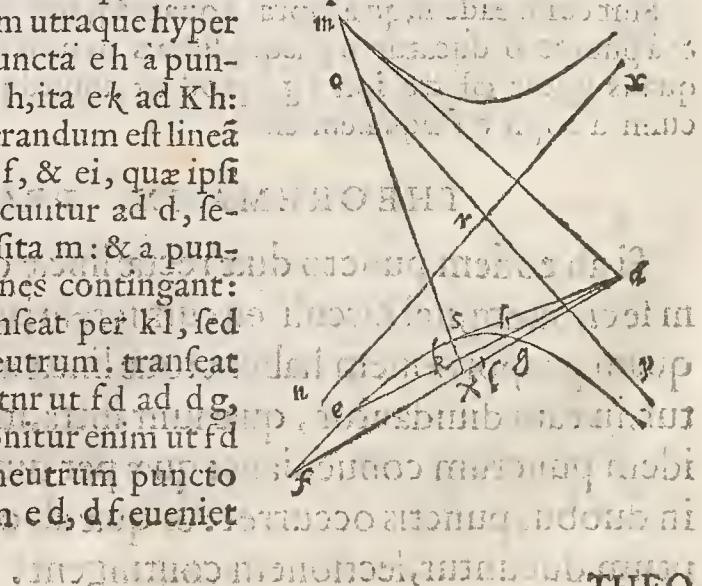
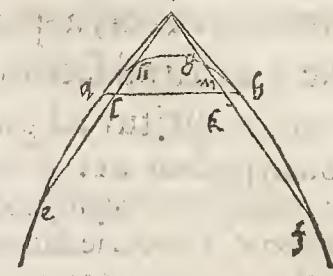
THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

Iisdem positis, si unius lineæ occursus occursus alterius non contineat, & punctum d sit intra angulum asymptotis comprehensum; & figura, & demonstratio eadem erit, quæ in tertio theoremate.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

Iisdem positis si occursus unius lineæ, alterius occursus contineant: & punctum sumptum sit in angulo deinceps ei, qui asymptotis comprehenditur: linea per diuisiones ducta, si producatur, occurret oppositæ sectioni: & quæ ab occursibus ducuntur ad punctum d, oppositas sectiones contingent.

Sit hyperbole eg, cuius asymptoti n x, o p, & centrum r: punctum uero d sit in angulo xrp: & ducantur de, df, quarum utraque hyperbolam in duobus punctis fecerit: & puncta e h à punctis fg cointineantur sítq; ut e d ad dh, ita ek ad kh: & ut fd ad dg, ita fl ad lg. demonstrandum est linea per kl ductam occurrere sectioni ef, & ei, quæ ipsi opponitur: & quæ ab occursibus ducuntur ad d, sectiones contingere. sit sectio opposita m: & a puncto d ducatur d m, d s, quæ sectiones contingant: iunctaq; ms, si fieri possit, non transeat per lk, sed uel per alterum ipsorum, uel per neutrum, transeat primū per k, & fecet fg in x. est igitur ut fd ad dg, ita fx ad xg, quod est absurdum; ponitur enim ut fd ad dg, ita fl ad lg. si uero ms per neutrum puncto rum xl transeat, in utraque ipsarum de, d f euenerit illud, quod fieri non potest.

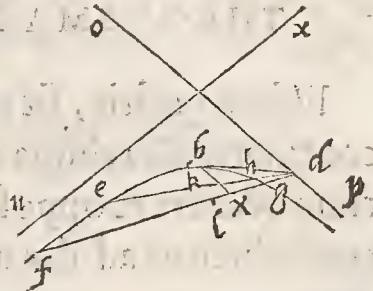


THEO

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

Iisdem positis si punctum d sit in una asymptoton, & reliqua eadem existat: quæ per diuisiones transit linea asymptoto, in qua est punctum, æquidistabit; & producta occurret sectioni: quæ uero ab occursu ad punc-
tum ducitur, sectionem continget.

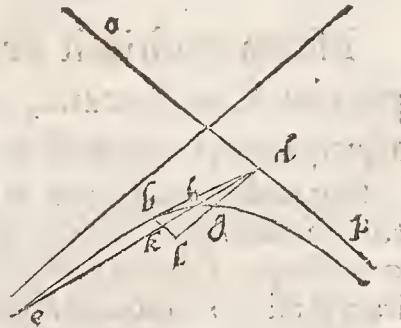
Sit hyperbole, & asymptoti: sumptoq; in una asymptoton puncto d, ducantur rectæ lineæ, & diuidantur, ut dictum est: & ab ipso d linea db sectionem contingat. Dico eam, quæ à puncto b ducitur ipsi opæquidistans, per pūctā k l transire. si enim non, uel per unum ipsorum transibit, uel per neutrum. transeat primo per k tantum. qnare ut fd ad dg, ita f ad g. quod est absurdum. non igitur à puncto b ducta æquidistans po per unum tantum eorum transibit. ergo per utrumque transeat necesse est.



THEOREMA XIV. PROPOSITIO XIV.

Iisdem positis si punctum d sit in una asymptoton: & linea quidem de sectionem in duobus punctis fecet; dg uero alteri asymptoto æqui distans fecet in uno tantum, quod sit g: fiatq; ut ed ad dh, ita ek ad kh: & ipsi dg ponatur æqualis gl: quæ per puncta k l transit linea, & asymptoto æquidistabit, & sectioni occurret: quæ uero ab occursu du-
citur ad d, sectionem continget.

Similiter enim, ut in superioribus, ducta linea db con-
tingente, dico eam, quæ à puncto b ducitur, asymptoto po æquidistans, per puncta k l transire. si enim per K solum transeat, non erit dg ipsi gl æqualis; quod est absurdum: si uero per l solum, non erit ut ed ad dh,
ita ek ad kh. Quòd si neque per K transeat, neque per l, in utrisque id, quod est absurdum, sequetur. ergo
per utraque puncta transire necessarium est.



THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

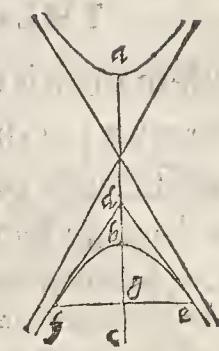
Si in sectionibus oppositis inter duas sectiones sumatur aliquod punc-
tum, & ab ipso duæ lineæ ducantur; altera quidem contingens unam
oppositarum; altera uero utramque secans: & quam proportionem ha-
bet linea inter sectionem, quam non contingit, & punctum interiecta
ad lineam, quæ est inter punctum, & alteram sectionem, eandem habeat
linea quædam maior ea, quæ inter sectiones interiicitur ad excessum ip-
sius in eadem recta, & ad eundem terminum cum linea eiusdem ratio-
nis: quæ à termino maioris lineæ ad tactum ducitur, occurret sectioni;
& quæ ab occursu ducitur ad sumptum puncum, sectionem continget.

Sint sectiones oppositæ ab sumptoq; inter sectiones aliquo punto d, intra angu-
lum asymptotis contentum, ab ipso ducatur linea quidem df contingens sectionem;
ad b uero sectiones secans: & quam proportionem habet ad ad db, habeat ac ad

c b. demonstrandum est, lineam à punto f ad c productam occurrere sectioni: & eam, quæ ab occurso ducitur ad d sectionem contingere. Quoniam enim punctum d est intra angulum, qui sectionem continet; poterimus ab ipso d aliam contingen tem ducere, quæ sit d'e: & iuncta se, si fieri potest, per c non transeat, sed per aliud punctum g. erit igitur ut ad ad d b! ita a g ad g b, quod est absurdum: posuimus enim ut a d ad d b ita esse a c ad c b.

49. secundi huius.

36. primi huius.

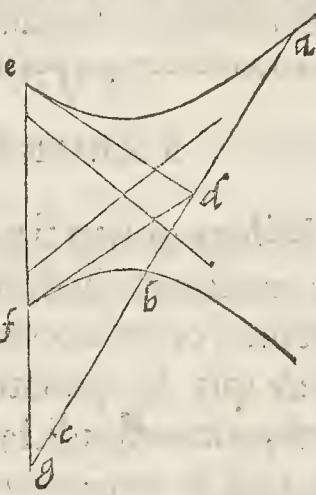


THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

Iisdem positis, sit punctum d in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur: & reliqua eadem fiant. Dico lineam à punto f ad c productam occurrere oppositæ sectioni: & quæ ab occurso ducitur ad d, eandem sectionem contingere.

Sint enim eadem, quæ supra: & punctum d sit in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur: atque à punto d' ducatur d e sectionem a contingens: iuncta autem e f, & producta, si fieri potest, non transeat per c, sed per aliud punctum g: erit ut a g ad g b, ita a d ad d b; quod est absurdum: ponebatur enim ut a d ad d b, ita a c ad c b.

39. tertii. huius.

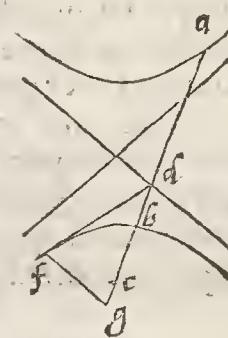


THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

Iisdem positis sit punctum d in una asymptoton. Dico lineam, quæ ab f ad c ducitur, asymptoto, in qua est punctum, æquidistare.

36. tertii. huius.

Sint eadem, quæ supra: & punctum d in una asymptoto: ducataq; per f eidem asymptoto æquidistans non transeat per c, si fieri potest, sed per g. erit ut a d ad d b, ita a g ad g b, quod est absurdum. ergo quæ à punto f ducitur asymptoto æquidistans per punctum c transibit.

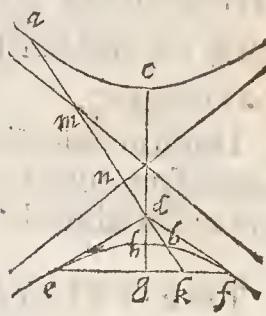


THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si in sectionibus oppositis aliquod punctum sumatur inter duas sectiones: & ab ipso duæ lineæ ducantur, utramque sectionem secantes: & quam proportionem habent interiectæ inter unam sectionem & punctum ad eas, quæ inter idem punctum, & alteram sectionem intericiuntur, eandem habeant lineæ maiores iis, quæ sunt inter sectiones oppositas ad excessus ipsarum: quæ per terminos maiorum linearum transeunt, occurrent sectionibus: & quæ ab occurribus ad sumptum punctum ducentur, sectiones contingent.

Sint oppositæ sectiones a b: & punctum d inter sectiones: quod quidem primum ponatur in angulo asymptotis contento: & per d lineæ a d b, c d h ducantur. maior igitur est a d, quam d b, & c d maior, quam d h; quoniam b n est æqualis a m: quam uero

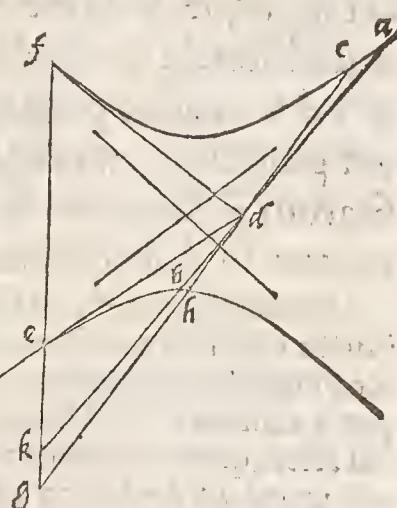
uero proportionem habet ad ad. d b, habeat a k ad. k b: & quā c d habet ad d h, habeat c g ad g h. Dico lineam, quā per k g transit, occurrere sectioni; & quā à puncto d ad occursus ducuntur, sectionem contingere. Quoniam enim punctum d est in angulo asymptotis cōtentio, possumus ab eo duas lineas contingentes ducere. Itaque ducantur d e, d f: & e f iungatur, quā per puncta k g transibit. si enim non, uel transibit per unum ipsorum tantum, uel per neutrum: & si quidem per unum tantum, altera linearum in eandem proportionem ad aliud punctum secabitur; quod fieri non potest: si uero per neutrum, in utrisque id, quod fieri non potest, continget.



THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

Sumatur punctum d in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur: ducanturq; rectæ lineaæ sectiones secantes: & ut dictum est, diuidantur. Dico eam, quā per k g producitur, occurrere utriusque sectionum: & quā ab occursibus ducuntur ad d sectiones contingere.

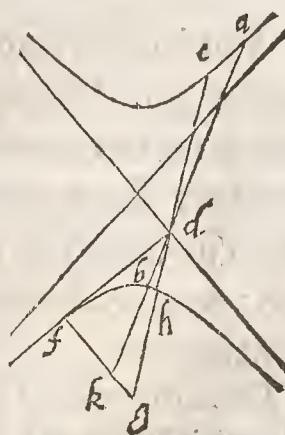
Ducantur enim à puncto d lineaæ d e, d f, quā utramque sectionem contingent. ergo quā ducitur per e f, per k g transibit. si enim non, uel transibit per alterum ipsum, uel per neutrum; & rursus eodem modo id, quod est absurdum, concludetur.



THEOREMA XX. PROPOSITIO XX.

Si sumptum punctum sit in una asymptoton, & reliqua eadem fiant: linea, quā transit per terminos excessuum, asymptoto, in qua est punctū æquidistabit: & quā à puncto ducitur ad occursum sectionis, & lineaæ per terminos transeuntis, sectionem continget.

Sint oppositæ sectiones a b: & punctum d sit in una asymptoton: & reliqua eadem fiant. Dico lineam, quā per k g transit, occurrere sectioni; & quā ab occursu ad d ducitur, sectionem contingere. ducatur enim à puncto d contingens linea d f: & ab f ducatur asymptoto æquidistans, in qua est punctum d. transibit igitur ea per puncta k g; alioqui uel per alterum tantum transibit, uel per neutrum: & ita ea, de quibus dictum est, absurdare sequentur.



THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXI.

Sint rursus oppositæ sectiones a b: sitq; punctum d in una asymptoton: & linea quidem d b k in uno tantum puncto occurrat sectioni b, alteri asymptoto æquidistans; linea uero c d h g utriusque sectioni occurrat: & ut c d ad d h, ita c g ad g h; & ipsi d b æqualis sit b k. Dico li-

d

neam, quæ per puncta k g transit, occurrere sectioni; asymptotoq; , in qua est punctum d , æquidistare : & quæ ab occursu ad punctum d ducitur, sectionem contingere.

Ducatur enim linea contingens d f : & ab f ducatur æquidistans asymptoto, in qua est d . transibit ea per puncta k g : alioqui eadem absurdâ sequantur necesse est.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXII.

Sint similiter oppositæ sectiones, asymptotiæ: & punctum d sumatur in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur: linea uero c d h fecet utrasque sectiones: & d b alteri asymptoto æquidistet: sitq; ut c d ad d h , ita c g ad g h : & ipsi d b æqualis ponatur b k . Dico lineam, quæ per puncta k g transit, occurrere utriusque oppositarum sectionum: & quæ ab occursibus ducuntur ad d , sectiones easdem contingere.

Ducantur enim d e , d f , quæ sectiones contingant: & iuncta e f , si fieri possit, non transeat per k g : sed uel per alterum ipsorum tantum, uel per neutrum. & siquidem per g tantum transeat, linea d b non erit æqualis ipsi b k , sed alteri, quod est absurdum. si uero tantum per k , non erit ut c d ad d h , ita c g ad g h , sed alia quædam ad aliā. Quod si per neutrum ipsorum k g transeat, utraque absurdâ sequentur.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

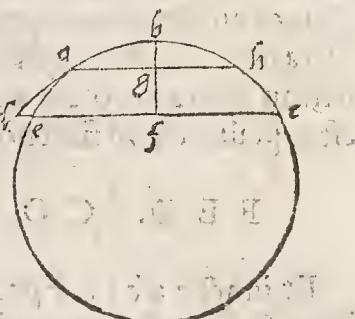
Sint itidem oppositæ sectiones a b : punctumq; d sit in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur: & linea quidem b d sectionem b in uno puncto tantum fecet, alteri asymptoto æquidistans: linea uero d a similiter fecet sectionem a : sitq; d b ipsi b g æqualis; & d a ipsi a k . Dico lineam, quæ transit per K g occurrere sectionibus: & quæ ab occursibus ad d ducuntur, sectiones contingere.

Ducantur enim d e , d f , quæ contingant sectiones: & iuncta e f non transeat per k g , si fieri potest, sed uel per alterum ipsorum, uel per neutrum. ex quibus sequitur, ut uel d a non sit æqualis a k , sed alij cuiquam, quod est absurdum: uel d b non sit æqualis b g : uel neutra neutræ sit æqualis: & ita in utrisque idem contingat absurdum. linea igitur e f per puncta k g necessario transibit.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXIIII.

Coni sectio coni sectioni, uel circuli circumferentiae non occurrit ita; ut pars quidem eadem sit; pars uero non sit communis.

Si enim fieri potest, coni sectio d a b c circuli circumferentiae ea b c occurrat, ut ipsarum communis pars sit eadem a b c, non communis autem a d, a e: & sumpto in ipsis puncto h iungatur h a: & per quod uis punctum e ducatur d e c, æquidistans a h: secta q; a h bifariam in g, ducatur per g diameter b g f, ergo quæ per b ipsi a h æquidistans ducitur, utramque sectionem contingit: & æquidistans d e c eritq; in altera quidem sectione d f æqualis f c: in altera uero e f æqualis f c: quare & d f ipsi f e æqualis erit, quod fieri non potest.

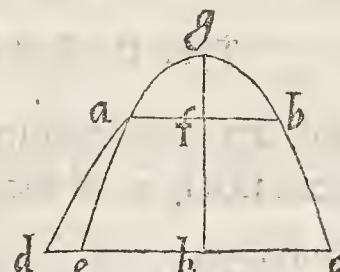
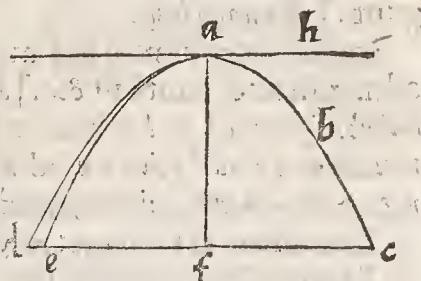


32. primi
huius.
30. primi
elem.
46. & 47.
primi hu
ius.

E V T O C I V S.

ALITER. Sint sectiones d a b c, e a b c: ducaturq; linea d e c quomodo cumque contingat: & per a ipsi d e c æquidistans ducatur a h: si igitur a h intra sectiones cadit, congruet ea demonstratio, quæ ab Apollonio assertur: si uero contingit in punto a, & utrasque sectiones contingit, ergo diameter alterius sectionis, quæ ab a ducitur, reliqua etiam diameter erit: & propterea in punto f secabit, & lineam d c, & c e, quod fieri non potest.

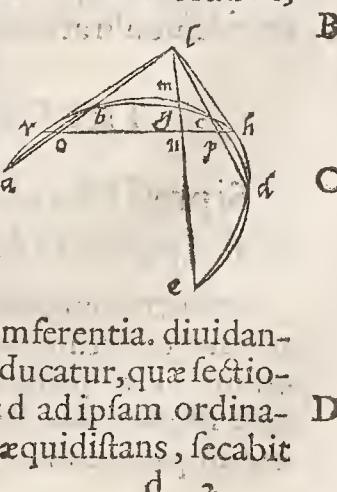
ALITER. Sint sectiones d a b c, e a b c, ut dictum est: & in communi ipsarum parte a b c sumatur punctum b: & ducta a b bifariam secetur in f, perq; f ducatur diameter g f h: & per c linea c e d ipsi a b æquidistans. Quoniam igitur f h diameter est, quæ bifariam secat lineam a b; erit a b ordinatim applicata, & æquidistans c e d. ergo c e bifariam secatur in h: sed in sectione e a b c descripta est e c; & in sectione d a b c, ipsa c d linea igitur e h linea h d est æqualis. quod fieri non potest.



THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

Coni sectio coni sectionem, uel circuli circumferentiam in pluribus punctis, quam quatuor non secat.

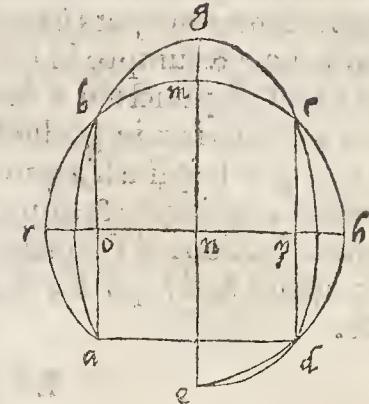
Si enim fieri potest, secet in quinque punctis a b c d e: sintq; a b c d e occursums deinceps, nullum intermedium relinquentes: & iunctæ a b, c d producantur, quæ conuenient inter se extra sectionem in parabola & hyperbola. Itaque conueniant in l: & quam proportionem habet al ad l b, habeat a o ad o b: quam uero d l habet ad l c, habeat d p ad p c. ergo quæ à punto p ad o iuncta producuntur ex utraque parte, occurret sectioni: & quæ ab occursumbus ducuntur ad l sectiones contingent. occurrat in punctis h r: & h l, l r iungantur. contingent igitur hæ sectiones; & e l utræque secabit, quoniam inter b c nullus est occursus. Itaque secet in punctis m g. ergo in altera quidem sectione erit ut e l ad l g, ita e n ad n g: in altera autem ut e l ad l m, ita e n ad n m, quod fieri non potest. quare neque illud, quod à principio ponebatur. si uero a b, d c æquidistant, sectiones erunt ellipsis, uel circuli circumferentia. diuidantur a b c d bifariam in o p; & iuncta p o ad utrasque partes producatur, quæ sectionibus occurrat in h r. erit igitur h r diameter sectionum, & a b, c d ad ipsam ordinatim applicabuntur. quare à punto r ducta e n m g ipsi a b, c d æquidistans, secabit



lineam h r, & utramque sectionem, propterea quod
E alius cursus non est præter a b c d e. ergo ex ijs, quæ
dicta sunt, in altera quidem sectione erit e n æqualis
n m, in altera uero e n æqualis n g. quare n m ipsi n g
est æqualis. quod fieri non potest.

F E D. C O M M A N D I N V S.

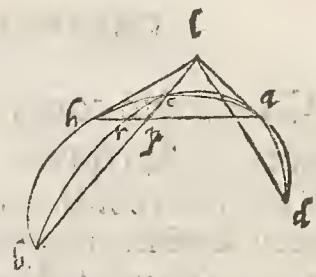
- A Et iunctæ a b, c d producantur; quæ conuenient
inter se extra sectionem in parabola, & hyperbola.]
Ex 24. & 25. secundi huius.
- B Ergo quæ à puncto p ad o iuncta producitur ex
utraque parte occurrit sectioni, & quæ ab occursibus ducuntur ad 1 sectiones contin
gunt.] Ex nona huius.
- C Itaque fecet in punctis m g. ergo in altera quidem sectione, erit ut e l ad 1 g, ita e n
ad n g, in altera autem ut &c.] Sit linea l g maior, quam l m, erit contra n m maior, quam n g.
s. quinti. habebit igitur e l ad l m maiorem proportionem, quam e l ad l g. ut autem e l ad l m, ita e n ad
n m, & ut e l ad l g, ita e n ad n g. ergo e n ad n m maiorem proportionem habet, quam e n ad
n g: & idcirco n m minor est, quam n g. sed & erat maior. quod fieri non potest.
14. quinti
10.
- D Erit igitur h r diameter sectionum.] Ex 28. secundi huius.
- E Ergo ex ijs, quæ dicta sunt, in altera quidem sectione erit e n æqualis n m, in altera
uero e n æqualis n g.] Sunt enim & e m, e g, ad diametrum h r ordinatim applicatae.



T H E O R E M A X X VI. P R O P O S I T I O X X VI.

Si dictarum linearum aliquæ in uno puncto se se contingant, non oc
current sibi ipsis ad alia puncta plura, quam duo.

Contingant enim se se duæ quæpiam dictarum linearum in puncto a. Dico eas non
occurrere sibi ipsis ad alia puncta plura, quam duo. nam si fieri potest, occurrant ad
puncta b c d: sintq; occursus deinceps, nullum intermedium relinquentes: & iuncta
b c producatur. à puncto autem a ducatur contingens a l,
quæ quidem continget duas sectiones, & cum linea b c co
ueniet. Conueniat in l: & fiat ut c l ad l b, ita c p ad p b:
iungaturq; a p, & producatur. occurret ea sectionibus, &
quæ ab occursibus ad punctum l ducuntur, sectiones con
tingent. Itaque occurrat in punctis h r, & iungantur h l,
l r, quæ contingent sectiones. ergo quæ à puncto d ad l
ducitur utramque sectionem secabit; & eadem quæ dicta
sunt, absurdâ sequentur. non igitur se secant ad plura pun
cta, quam duo. si uero in ellipsi, & circuli circumferentia c b ipsi a l æquidistet, simi
liter demonstrationem faciemus, lineam a h diametrum ostendentes.

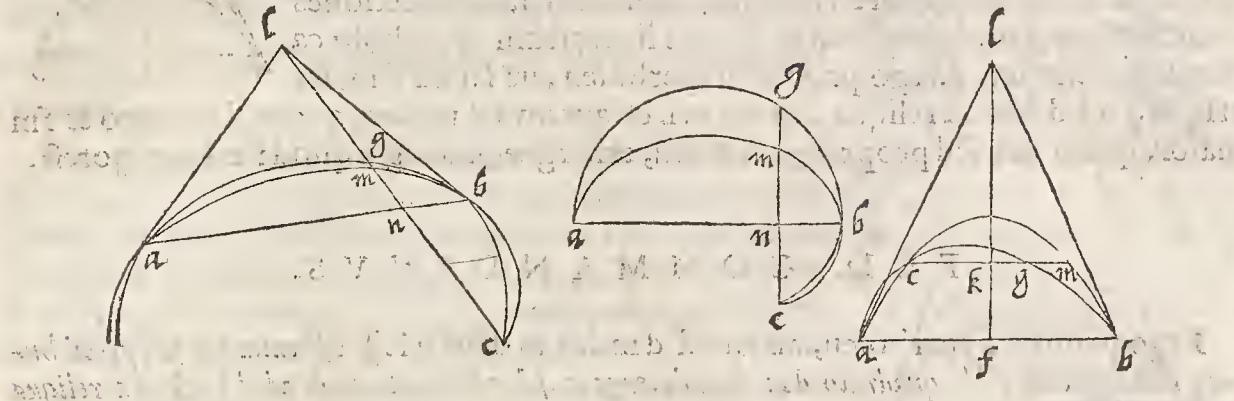


T H E O R E M A X X VII. P R O P O S I T I O X X VII.

Si prædictarum linearum aliquæ in duobus punctis se se contingant,
in alio puncto sibi ipsis non occurrent.

Prædictarum enim linearum duæ se se contingant in duobus punctis a b. Dico eas
ad aliud punctum sibi ipsis non occurtere. nam si fieri potest, occurrant etiam ad pun
ctum c: sitq; primum c extra a b tactus: & ab ipsis ducantur lineæ contingentes,
quæ in punctum l conueniant, ut in prima figura appetat. contingent igitur hæ
utramque sectionem: & iuncta c l utramque secabit. fecit in punctis g m, & iunga
tur

tur a n b . ergo in altera quidem sectione erit, ut cl ad lg, ita cn ad ng; in altera uero, ut cl ad lm, ita cn ad nm. quod est absurdum.



At si cg æquidistans sit lineis ad puncta ab contingentibus, ut in ellipsi in secunda figura, iungemus lineam ab, quæ sectionum diameter erit. ergo utraque linearum cg, cm iu puncto n bifariam secabitur; quod est absurdum. non igitur sectiones ad aliud punctum sibi ipsis occurruunt, sed ad ab tantum.

Sit deinde c inter tactus, ut in tertia figura perspicuum est sectiones non contingere se se ad punctum c: quoniam ad duo tantum contingentes ponebantur. secent igitur se ipsas in c: & à punctis ab ducantur al, lb, quæ sectiones contingant: iungaturq; ab, & in f bifariam diuidatur. ergo à punto l ad f duxta diameter erit, quæ quidem per c non transibit: si enim transeat, quæ per c ipsis ab æquidistans ducitur, continget utramque sectionem, quod fieri non potest. Itaque ducatur à punto c linea ck gm æquidistans ab. erit in altera quidem sectione ck æqualis kg: in altera uero ck æqualis km. quare km ipsis kg est æqualis; quod fieri non potest. Eodem modo si contingentes inter se æquidistant, ex iis, quæ diximus, illud, quod fieri non potest, concludetur.

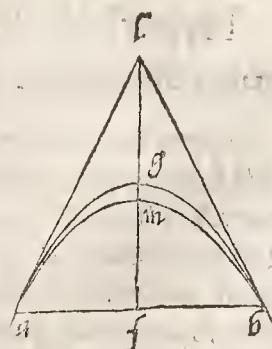
27. secundum
di huius.

29. secundi
huius.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXVIII.

Parabole parabolē non contingit, præterquam in uno puncto.

Si enim fieri potest, parabolæ agb, amb in punctis ab se se contingant: & ducantur lineæ contingentes al, lb. contingent haec utrasque sectiones; & in punctum l conuenient. Itaque iuncta ab, secetur bifariam in f, & ducatur lf. quoniam igitur duæ lineæ agb, amb se se contingunt in punctis ab ad aliud punctum sibi ipsis non occurrent. quare lf utramque sectionem secabit. secet in gm. ergo in altera quidem sectione erit lg æqualis gf; in altera uero lm æqualis mf. quod fieri non potest. non igitur parabole parabolē, præterquam in uno puncto, contingit.



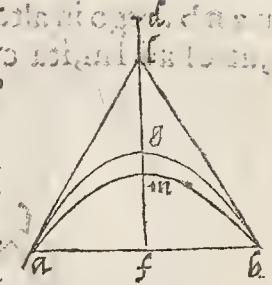
ex precedente.
35. primi
huius.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXIX.

Parabole hyperbolē non contingit in duobus punctis extra ipsam cadens.

APOLLONIIV PERGAEI

Sit parabole quidem agb, hyperbole uero amb: & si fieri potest, se se contingant in punctis ab & ab ipsis ducantur linea ϵ utrāque sectionem contingentes, quā in l conueniant: iunctaq; ab bifariam secetur in f: & lf ducatur. Itaque quoniam sectiones agb, amb se se contingunt in punctis ab, ad aliud punctum sibi ipsis non occurunt. quare lf in alio, atque alio punto sectiones secat. secet in gm: & producatur lf, quā in centrum hyperbolæ cadet: sitq; centrum d. ergo propter hyperbolē, ut fd ad dm, ita erit md ad dl: & ita reliqua fm ad ml. est autem fd maior, quādm. ergo & fm maior, quāml. sed propter parabolē, erit fg aequalis gl: quod fieri non potest.



27. huius
29. secundi
huius.

A
19. qui iti.

14.
35. primi
huius.

F E D. C O M M A N D I N V S.

A Ergo propter hyperbolē, ut fd ad dm, ita md ad dl.] Est enim ex 37. primi huius, rectangulum fdl quadrato dm aequalē. ergo ut fd ad dm, ita md ad dl, & ita reliqua fm ad ml.

B Quod fieri non potest.] Eset enim gf minor, quām fm.

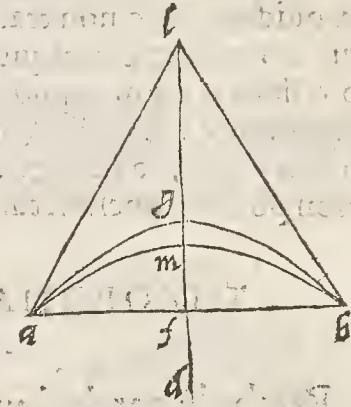
THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

Parabole ellipſim, uel circuli circumferentiam non contingit in duobus punctis intra ipsam cādens.

37. huius
14. sexti

37. primi
huius.
14. sexti

Sit ellipsis, uel circuli circumferentia agb, parabole uero amb: & si fieri potest, in duobus punctis ab se se contingant: & ab ipsis ducantur linea ϵ contingentes sectiones, quāe conueniant in punctum l: iunctaq; ab bifariam; & ducatur lf. secabit igitur lf utramque sectionem in alio, atque alio punto, uti dictum est. secet in gm: & producatur lf usque ad d, quod sit centrum ellipsis, uel circuli. ergo propter ellipſim & circulum, erit ut ld ad dg, ita gd ad df: & reliqua lg ad gf. estq; ld maior, quām dg. ergo & lg maior, quām gf. sed propter parabolē, erit lm aequalis mf. quod fieri non potest.



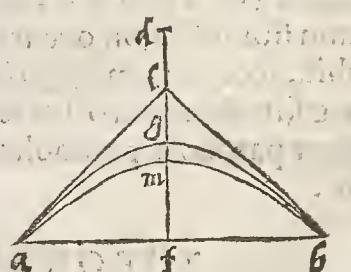
THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

Hyperbole hyperbolē idem centrum habens in duobus punctis non continget.

30. secundi
huius.

37. primi
huius.

Hyperbolæ enim agb, amb idem habentes centrum d, si fieri potest, in punctis ab se se contingant: & ducantur ab ipsis linea ϵ contingentes, quāe inter se conueniant a l, lb: iunctaq; dl producatur: & iungatur ab: ergo df secat bifariam linea ϵ ab in f: & utrasque sectiones in gm secat. quare propter hyperbolē agb, rectangulum fdl est aequalē quadrato dg: & propter hyperbolē amb, rectangulum fdl aequalē est quadrato dm. quadratum igitur md quadrato dg aequalē erit. quod fieri non potest.

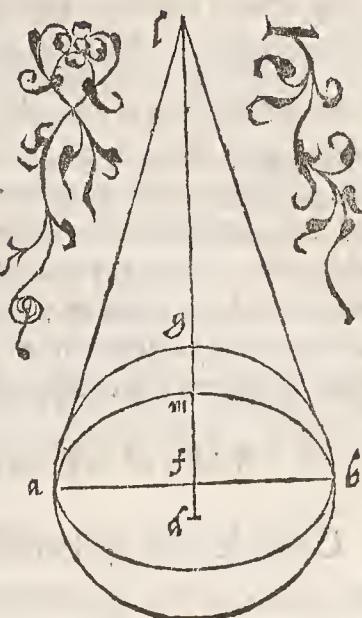


THEO-

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXII.

Si ellipsis ellipsum, uel circuli circumferentiam, idem centrum habens in duobus punctis contingat: linea coniungens tactus per centrum transibit.

Contingant enim se se dictæ lineæ in punctis a b: & iuncta a b, per a b puncta ducantur lineæ sectiones contingentes, quæ si fieri possit, conueniant in l: & linea a b in f bisariam diuidatur: & iungatur l f. ergo l f diameter est sectionum. Sit centrum d, si fieri potest. rectangulum igitur d l f propter alteram quidem sectionem est æquale quadrato d g; propter alteram uero æquale quadrato d m. quare g d quadratum quadrato d m æquale erit: quod fieri non potest. non igitur lineæ contingentes à punctis a b ductæ conueniunt. ergo æquidistant inter se se: & idcirco linea a b diameter est, quæ per centrum transibit. id quod demonstrandum proponebatur.

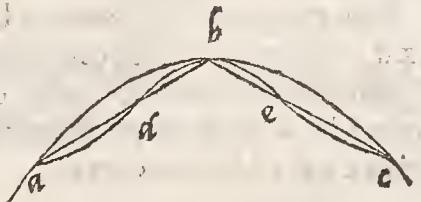


29. secūdi
huius.
37. primi
huius.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

Coni sectio, uel circuli circumferentia, coni sectioni, uel circuli circumferentia, quæ non ad easdem partes conuexa habeat, ad plura puncta, quam duo non occurret.

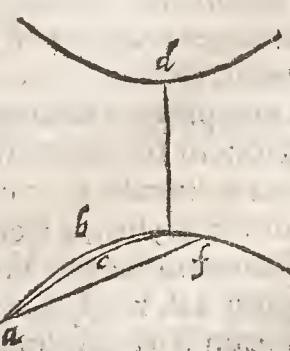
Si enim fieri potest, coni sectio, uel circuli circumferentia a b c coni sectioni, uel circuli circumferentia a d b e c occurrat ad plura puncta, quam duo, non habens conuexa a b c ad easdem partes. Quoniam igitur in linea a b c sumuntur tria puncta a b c; & a b, b c iunguntur: continent angulum ad easdem partes, in quibus sunt concava lineæ a b c: & simili ratione lineæ a b, b c eundem angulum continent ad eas partes, in quibus sunt concava lineæ a d b e c. ergo dictæ lineæ ad easdem partes habent concavæ, & conuexæ. quod fieri non potest.



THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

Si coni sectio, uel circuli circumferentia occurrat uni oppositarum sectionum in duobus punctis: & lineæ, quæ inter occursum interiiciuntur, ad easdem partes concaua habeant: producta linea ad occursum alteri oppositarum sectionum non occurret.

Sint oppositæ sectiones d, a c f: & coni sectio, uel circuli circumferentia a b f occurrat alteri oppositarum sectionum in duobus punctis a f: habeantq; a b f, a c f concaua ad easdem partes. Dico lineam a b f productam sectioni d non occurrere. iungatur enim a f: & quoniam d a c f oppositæ sectiones sunt: & recta linea a f in duobus punctis hyperbolæ secat, producta non occurret oppositæ sectioni d. quare neque linea a b f eidem occurret.



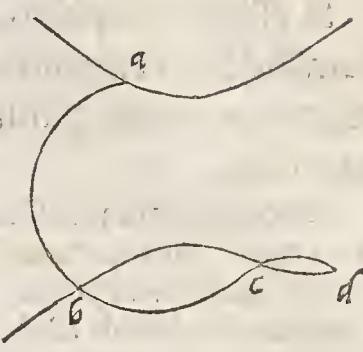
33. secūdi
huius.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XXXV.

Si coni sectio, uel circuli circumferentia uni oppositarum sectionum occurrat; reliquæ ipsarum non occurret ad plura puncta, quam duo.

33. huius

Sint oppositæ sectiones a b: & ipsi a occurrat coni sectio, uel circuli circumferentia a b c: fecetq; b in punctis b c. Dico ad aliud punctum ipsi b non occurrere. si enim fieri possit, occurrat in d. ergo linea b c d sectioni b c occurrit ad plura puncta, quam duo, non habens concava ad easdem partes. quod fieri non potest. similiter demonstrabitur & si linea a b c oppositam sectionem contingat.



THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XXXVI.

Coni sectio, uel circuli circumferentia oppositis sectionibus ad plura puncta, quam quatuor non occurret.

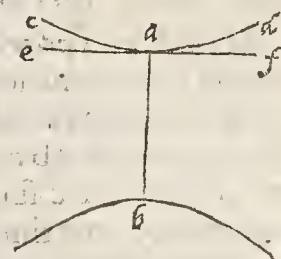
ex antecedente.

Hoc autem perspicue constat; nam linea occurrentis uni oppositarum sectionum; reliquæ non occurrit ad plura puncta, quam duo.

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XXXVII.

Si coni sectio, uel circuli circumferentia unam oppositarum sectionum concava sui parte contingat, alteri oppositum non occurret.

Sint oppositæ sectiones a b: & sectionem a contingat linea c a d. Dico c a d sectioni b non occurrere. ducatur enim per a punctum linea contingens e a f, quæ utramque linearum contingit in a. quare non occurret sectioni b: & propterea neque linea c a d eidem occurret.



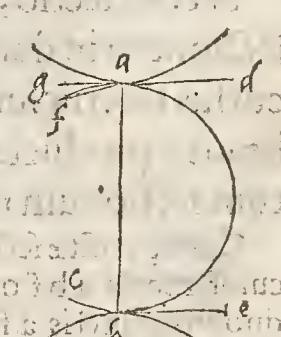
THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

Si coni sectio, uel circuli circumferentia utramque oppositarum sectionum contingat in uno punto; oppositis sectionibus in alio punto non occurret.

Sint oppositæ sectiones a b: coni autem sectio, uel circuli circumferentia a b c utramque ipsarum in punctis ab contingat. Dico lineam a b c oppositis sectionibus a b in alio punto non

A occurrere. Quoniam enim a b c sectionem a in uno punto contingit, sectioni b occurrens: non contingit sectionem a concava sui parte. Similiter demonstrabitur neque ita contingere sectionem b. Ducantur lineæ a d, b e contingentes sectiones a b; quæ & lineam a b c contingunt; si enim fieri potest, altera ipsa

B rum fecet; sitq; a f. ergo inter lineam a f contingentem, & inter sectionem a, cadit linea intermedia g, quod est absurdum. lineæ igitur a d, b e ipsam quoque a b c contingunt. ex quo apparet lineam a b c ad aliud punctum oppositis sectionibus non occurrere.



FED.

FED. COMMANDINVS.

Quoniam enim ab c sectionem a in uno puncto contingit, sectioni b occurrit. A non continget sectionem a concava sui parte.] Si enim fieri potest, contingit sectionem a concava sui parte. ergo ex antecedente, alteri oppositarum sectionum non occurret. Sed et' occurrat sectioni b, quod est absurdum.

Ergo inter lineam af contingentem, & inter sectionem a, cadit linea intermedia B g, quod est absurdum.] Ex demonstratis in trigesima sexta primi huius, in græcis autem co-dicibus ante hæc uerba, non nulla alia legebantur, quæ nos tanquam superflua omisimus.

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XXXIX.

Si hyperbole uni oppositarum sectionum in duobus punctis occurrat, conuexa habens è regione sita; quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret.

Sint oppositæ sectiones ab d f & hyperbole ab c sectioni a b d occurrat in punctis ab, habens conuexa è regione sita: sitq; sectioni a b c opposita sectio e. Dico ipsam e sectioni f non occurre in iungatur enim a b, & ad g producatur. Quoniam igitur ab g recta linea secat hyperbolam ab d, producata ex utraque parte extra sectionem cadet: quare non occurret sectioni f. similiter propter hyperbolam ab c, neque occurret oppositæ sectioni e. ergo sectio e sectioni f non occurret.

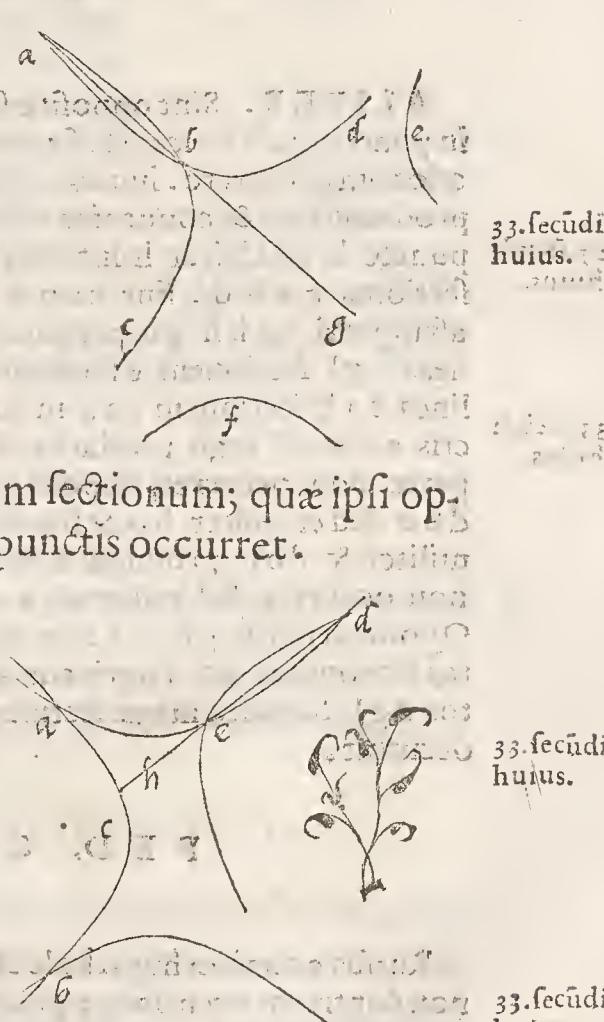
THEOREMA XL. PROPOSITIO XL.

Si hyperbole occurrat utriusque oppositarum sectionum; quæ ipsi opponitur sectio, nulli oppositarum in duobus punctis occurret.

Sint oppositæ sectiones ab & acb hyperbole utriusque occurrat. Dico sectionem, quæ ipsi acb opponitur, sectionibus ab non occurrere in duobus punctis. si enim fieri potest, occurrat in punctis de; & iuncta de producatur. ergo propter sectionem de recta linea de sectioni ab non occurret: & propter sectionem ae, non occurret ipsi b: per tres enim locos transibit, quod fieri non potest. Similiter demonstrabitur neque sectioni b in duobus punctis occurre. Eadem etiam ratione utramque ipsarum non contingat. ducatur enim linea contingens he, quæ contingat utramque sectionem. ergo propter sectionem dc ipsi ac non occurret: & propter sectionem ae non occurret sectioni b. quare neque ac sectio sectioni b occurret quod non ponitur.

THEOREMA XLI. PROPOSITIO XLI.

Si hyperbole utramque oppositarum sectionum in duobus punctis fecerit, conuexa habens è regione utriusque sita; quæ ipsi opponitur sectio nulli oppositarum occurret.



AT P O L L O N I I P E R G A E I

25. secundi
huius.

Sint oppositæ sectiones a b: & hyperbole c a b d utramque ipsarum que fecet in duobus punctis, conuexa habens è regione utrisq; sita. Dico sectionem oppositam e f nulli ipsarum a b occurrere. si enim fieri potest, occurrat sectioni a in puncto e: & iunctæ c a, d b producantur; conuenient hæc inter se se. Itaque conueniant in h. erit igitur h in angulo asymptotis sectionis c a b d consentio, cui oppositur sectio e f. ergo quæ à punto e ad h ducitur, cadit intra angulum contentum lineis a h b. Rursus quoniam hyperbole est c a e, occuruntq; sibi ipsis c a h, h e: & c a occursus non continent occursum e: punctum h erit inter asymptotos sectionis c a e. atq; est ipsi opposita sectio b d. ergo quæ à punto b ducitur ad h intra angulum c h e cadit, quod est absurdum; cædebat enim intra angulum a h b. non igitur e f alicui oppositarum sectionum a b occurret.

E V T O L C O I T V S.

25. secundi
huius.

33. secundi
huius.

A L I T E R. Sint oppositæ sectiones a b: & hyperbole c a b d utramque ipsarum in punctis c a b d fecerit: & sit sectio ipsi opposita e f. Dico e f nulli oppositarum sectionum occurrere. iunctæ enim d b, c a producantur: & conueniant inter se in puncto h. erit igitur h inter asymptotos sectionis c a b d. sint c a b d sectionis asymptoti k g l, m g n, perspicuum est lineas n g l sectionem e f continere. At linea c a h sectionem c a x in duobus punctis c a fecat. ergo producta ex utraque parte non occurret oppositæ sectioni d b o: sed erit inter b o, & lineam g l. Similiter & d b h producta sectioni c a x non occurret, sed erit inter a x, & g n. Quoniam igitur p h, h r non occurrentes sectionibus a b, continent asymptotos n g l, & multo magis sectionem e f; sequitur ut e f nulli oppositarum sectionum occurrat.

F E D . C O M M A N D I N V S.

25. secundi
huius.

Rursus quoniam hyperbole est c a e, occuruntq; sibi ipsis c a h, h e; & c a occursus non continent occursum e: punctum h erit inter asymptotos sectionis c a e. Vereor ne locus corruptus sit, neq; enim punctum h necessario cadere uidetur inter asymptotos sectionis c a e, nisi linea e h sectionem c a e, vel contingat, vel in duobus punctis fecerit; quod non ponitur. præterea quomodo ex his absurdum sequatur, non facile appareat. sed tamen possimus demonstrationem absoluere in hunc modum.

Rursus quoniam recta linea d b h sectionem d b o fecat in duobus punctis, producta non occurret oppositæ sectioni c a e. quare si à punto e eiusdem sectionis linea ducatur e h, cadet extra ipsam h b, hoc est extra angulum a h b: quod est absurdum; cædebat enim intra. non igitur e f nulli oppositarum sectionum a b occurret.

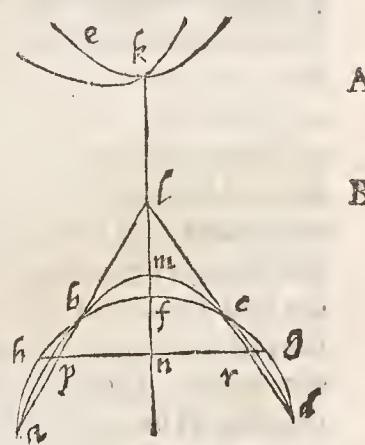
IN ALIAM DEMONSTRATIONEM,
QVAM AFFERT EVTOCIVS.

Sed erit inter bo & lineam gl.] Recta enim linea cabr, quæ hyperbolæ cabd in duobus punctis secat, si producatur, asymptoto kg l occurret ad partes k ex oœtaua secundi huius. quare ei non occurret in alio punto, & intersectionem bo, & asymptoton gl cadet. Eadem quoque ratione recta linea db bp inter ax sectionem, & asymptoton gn cadat necesse est.

THEOREMA XLII. PROPOSITIO XLII.

Si hyperbole unam oppositarum sectionum in quatuor punctis fecet, quæ ipsi opponitur sectio, non occurret alteri oppositarum.

Sint oppositæ sectiones abcd, e; & hyperbole ipsam abcd secet in quatuor punctis abcd: sitq; ei opposita sectio k. Dico k sectioni e non occurtere. si enim fieri potest, occurrat in k: & iunctæ ab, cd producantur, quæ inter se conuenient. conueniant in l: & quam proportionem habet al ad lb, habeat ap ad pb: quam uero habet dl ad le, habeat dr ad rc. ergo linea, quæ per pr producitur, utriusque sectioni occurret: & quæ ab l ad occursus ducuntur sectionem contingent. iungatur kl, & producatur . secabit ea angulum blc, & sectiones in alio, atque alio punto. Itaque fecet in fm. ergo propter oppositas sectiones ahfgd, k, erit ut nk ad kl, ita nf ad fl: & propter sectiones abcd, e, ut nk ad kl, ita nm ad ml. quod fieri non potest. non igitur sectiones e k sibi ipsis occurunt.



F E D. C O M M A N D I N V S.

Quæ inter se conuenient.] Ex uigesima quinta secundi huius.

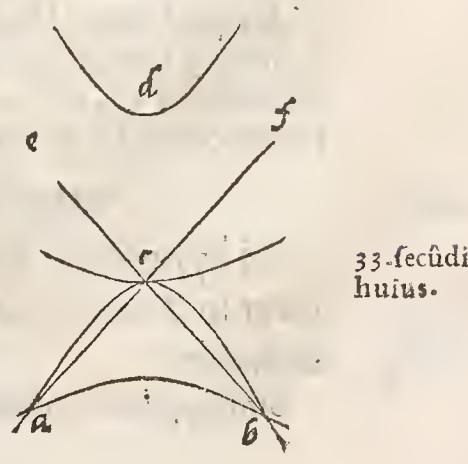
Ergo lineæ, quæ per pr producitur, utriusque sectioni occurret; & quæ ab l ad occursus ducuntur, sectionem contingent.] Ex nona huius.

Ergo propter oppositas sectiones ahfgd, k, erit ut nk ad kl, ita nf ad fl.] Est enim per trigesimam sextam primi huius, ut kn ad nf, ita kl ad lf. quare & permutoando ut nk ad kl, ita nf ad fl.

THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLIII.

Si hyperbole alteri oppositarum sectionum in duobus punctis occurrat, concaua habens ad easdem partes; alteri uero occurrat in uno punto: quæ ipsi opponitur sectio nulli oppositarum occurret.

Sint oppositæ sectiones ab, c: & hyperbole acb sectioni quidem ab in punctis ab occurrat: sectioni uero c occurrat in uno punto c: sitq; ipsi acb opposita sectio d. Dico d nulli sectionum ab, c occurtere. iungantur enim ac, bc, & producantur. lineæ igitur ac, bc sectioni d non occurrent. sed neque occurrent sectioni c præterquam in uno punto c: si enim in alio punto; oppositæ sectioni ab non occurrent. positum autem est, ac, bc, occurtere sectioni ab. quare sequitur, ut ac, bc sectioni c in uno punto c occurrant; sectioni



A P O L L O N I I P E R G A E I

uero d nullo modo. ergo d erit sub angulo e c f: & propterea sectionibus a,b,c minime occurret.

THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLIII.

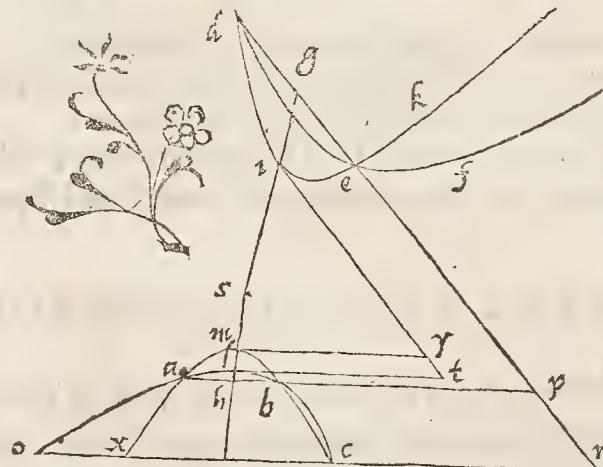
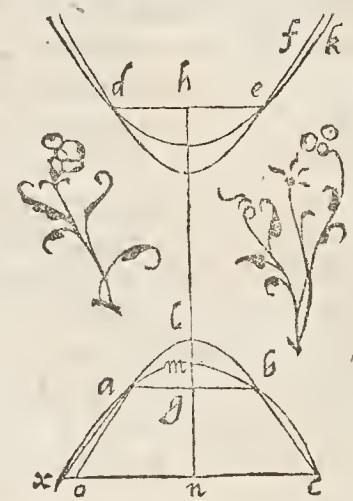
Si hyperbole uni oppositarum sectionum occurrat in tribus punctis; quæ ipsi opponitur alteri oppositarum, præterquam in uno punto, non occurret.

Sint oppositæ sectiones a b c, d e f: & hyperbole a m b c occurrat a b c sectioni in tribus punctis a b c. sit autem sectioni a m b c opposita sectio d e k, & ipsi a b c opposita d e f. Dico d e k non occurrere sectioni d e f, præterquam in uno punto. si enim fieri potest, in punctis d e occurrat: & iungantur a b, d e; quæ uel æquidistantes sunt inter se, uel non æquidistantes. sint primum æquidistantes: secenturq; a b, d e bifariam in punctis g h: & iungatur g h. est igitur g h diameter omniū sectionum: atque ad eam applicantur ordinatim a b, d e. Ducatur à puncto c linea c n o x æquidistans a b. erit & ipsa ad diametrum ordinatim applicata: & sectionibus in alio, atq; alio punto occurret. Si enim in eodem punto, non occurrent sectiones sibi ipsis in tribus punctis, sed in quatuor. ergo in sectione a m b erit c n ipsi n x æqualis & in a l b sectione, c n æqualis n o. quare o n est æqualis n x: quod fieri non potest. Sed non sint æquidistantes a b, d e: producanturq; & conueniant in p: & ducatur c o ipsi a p æquidistans; quæ cum d p producta conueniat in r. Secentur autem a b, d e bifariam in punctis g h: & per g h ducantur diametri g i h, h l m s: atque à punctis i l m lineæ i y t, m y, l t sectiones contingent. erit igitur i t æquidistans d p: & l t, m y æquidistantes ipsis a p, o r. & quoniam ut quadratum m y ad quadratum y i, ita rectangulum a p b ad rectangulum d p e; erit ut quadratum m y ad quadratum y i,

36. secundū
huius.

5. secundi
huius.

19. tertii
huius.



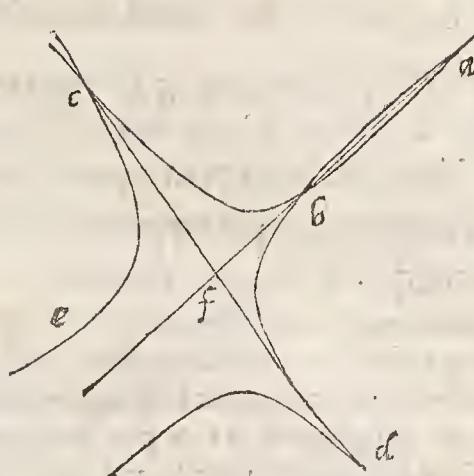
y i, ita quadratum l t ad quadratum t i. Eadem ratione, ut quadratum m y ad quadratum y i, ita erit rectangulum x r c ad rectangulum d r e. sed ut quadratum l t ad quadratum t i, ita o r c rectangulum ad rectangulum d r e. ergo rectangulum o r c rectangulo x r e est æquale. quod fieri non potest.

THEOREMA XLV. PROPOSITIO XLV.

Si hyperbole unam oppositarum sectionum contingat, alteram uero secet in duobus punctis; quæ ipsi opponitur sectio, nulli oppositarum occurret.

Sint oppositæ sectiones a b c, d: & hyperbole a b d sectionem quidem a b c in punctis

&is ab fecet; sectionem uero d contin-
gat in d: & sit hyperbole abd opposita
sectio ce. Dico ce nulli ipsarum abc, d
occurrere. si enim fieri potest, occurrat ip-
si abc in c punto: iungaturq; ab: & per
d ducatur contingens, quæ cum linea ab
conueniat in f. punctum igitur f erit in-
tra asymptotos abd sectionis. est autem
ipsi opposita sectio ce. ergo quæ à pun-
cto c ad f ducitur cadit intra angulum li-
neis b fd contentum. Rursus quoniam hy-
perbole est abc, cui occurunt lineæ ab,
cf: & ab occursum occursum c non con-
tinent: erit punctum f intra asymptotos
sectionis abc. opponitur autem ipsi sectio d. quæ igitur à c ad f ducta fuerit, intra
angulum afc cadet: quod est absurdum; cadebat enim & intra angulum b fd. quare
ce nulli oppositarum sectionum abc, d occurret.



F E D. C O M M A N D I N V S.

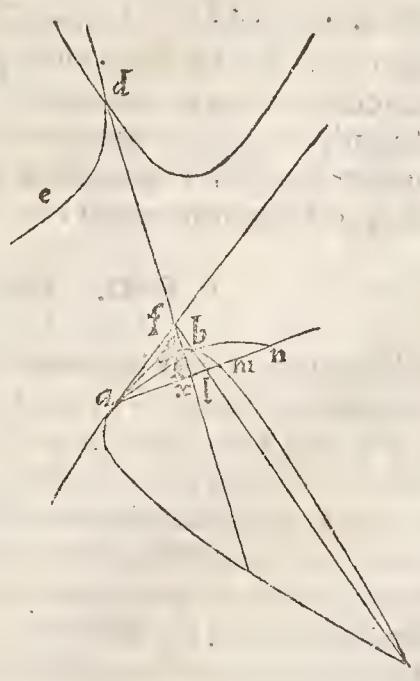
Rursus quoniam hyperbole est abc, cui occurunt lineæ ab, cf: & ab occursum c non continent: erit punctum f intra asymptotos sectionis abc.] Hoc non necessario sequi uidetur, nisi linea cf sectionem abc uel contingat, uel in duobus punctis se-
cet, quod non ponitur, ut etiam superius diximus in commentarijs in 41. huius. potest tamen simi-
liter demonstratio perfici hoc modo.

Rursus quoniam recta linea df sectionem d contingit, si producatur non occur-
ret oppositæ sectioni abc. ergo à punto c eiusdem sectionis ducta linea ad f, cadet
extra ipsam fd, hoc est extra angulum b fd: quod est absurdum; cadebat enim intra.
quare ce nulli oppositarum sectionum abc, d occurret.

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO XLVI.

Si hyperbole unam oppositarum sectionum in uno punto contin-
gat; & fecet in duobus punctis; quæ ipsi opponitur sectio, alteri opposi-
tarum non occurret.

Sint oppositæ sectiones abc, d; & hyper-
bole agc sectionem abc contingat qui-
dem in punto a; secet uero in b c: & ipsi agc
opposita sit sectio e. Dico e sectioni d non
occurrere. si enim fieri potest, occurrat in d:
iunctaq; bc producatur ad f: & à punto a
ducatur linea af contingens. similiter de-
monstrabitur punctum f esse intra angulum
asymptotis contentum: & linea af utrasque
sectiones contingat: & df producta secabit
sectiones inter ab, uidelicet in punctis g k.
quam uero proportionem habet cf ad fb,
habeat cl ad lb: & iuncta al producatur;
quæ sectiones in alio atque alio punto seca-
bit. secet in mn. ergo quæ à punto f ad mn
ducuntur sectiones contingent: & similiter
ijs, quæ dicta sunt propter alteram quidem
sectionem, ut xd ad df, ita erit xg ad gf:
propter alteram uero, ut xd ad df, ita xk



i. huius.

36. primi
huius, &
permuta-
do.

A P O L L O N I I P E R G A E I

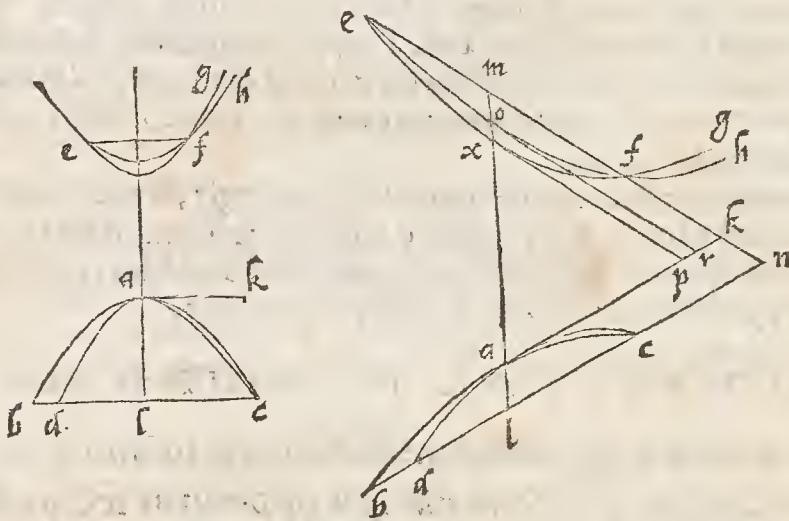
ad k f. quod fieri non potest. non igitur sectio alteri oppositarum occurret.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO XLVII.

Si hyperbole unam oppositarum sectionum contingens in alio puncto secet; quæ ipsi opponitur sectio alteri oppositarum non occurret præterquam in uno punto.

Sint oppositæ sectiones a b c, e f g: & hyperbole quædam d a c contingat a b c in a, & in c secet: opponaturq; ipsi d a c sectio e f h. Dico eam alteri oppositarum non occurrere, præterquam in uno punto. si enim fieri potest, occurrat in duobus punctis e f: iungaturq; e f: & per a ducatur sectiones contingens a k. uel igitur a k, e f

- A** æquidistantes sunt inter se, uel non. sint primum æquidistantes: & ducatur diameter bifariam secans ipsam e f, quæ per a transibit: atque erit diameter duarum coniugatarum. ducatur etiam per c linea c l d b æquidistans ipsis a k, e f. secabit igitur eas sectiones in alio, atque alio punto: & in altera quidem erit c l æqualis l d, in altera uero c l æqualis l b. quod fieri non potest. sed non sint æquidistantes a k, e f: & cōueniant



- in k, linea uero c d ipsis a h æquidistans ducta cōueniat cum e f in n: & diameter a m bifariam diuidens e f, sectiones in punctis x o secet: atque ab x o ducantur x p, o r sectiones contingentes. erit igitur ut quadratum a p ad quadratum p x, ita quadratum c a r ad quadratum r o: & propterea ut rectangulum d n c ad rectangulum e n f, ita rectangulum b n c ad rectangulum e n f, ergo rectangulum d n c rectangulo b n c est æquale. quod fieri non potest.

F E D. C O M M A N D I N V S.

- A** Et ducatur diameter bifariam secans ipsam e f, quæ per a transibit.] Si enim fieri potest, diameter à medio linea e f ducta non transeat per a, sed per aliud punctum: & ducatur linea à punto a ad medium e f. erit & ea diameter ex 34. secundi huius. quare duæ diametri inter se extra centrum conuenient, quod est absurdum.
- B** Erit igitur ut quadratum a p ad quadratum p x, ita quadratum a x ad quadratum r o.] Ob similitudinem triangulorum a p x, a r o.
- C** Et propterea ut rectangulum d n c ad rectangulum e n f, ita rectangulum b n c ad rectangulum e n f.] Est enim ex 19. tertij huius, ut quadratum a p ad quadratum p x, ita rectangulum d n c ad rectangulum e n f, & ita rectangulum b n c ad idem e n f.
- D** Ergo rectangulum d n c rectangulo b n c est æquale.] Ex nona quinti elementorum.

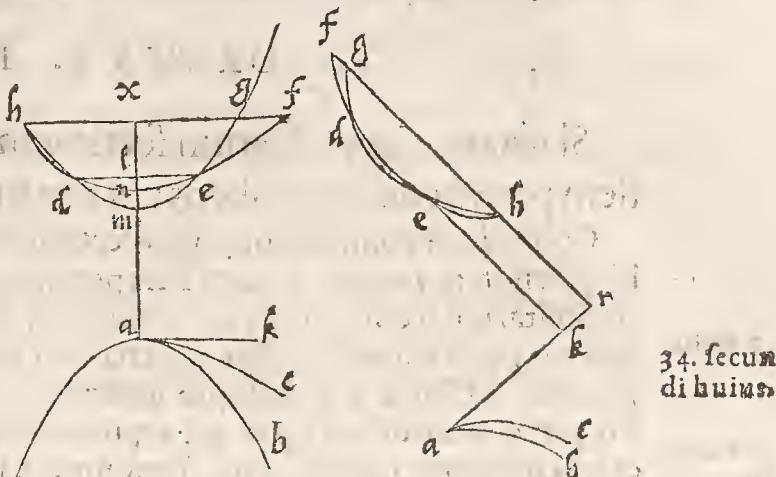
THEO

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO XLVIII.

Si hyperbole unam oppositarum sectionum in uno puncto contingat; quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret ad plura puncta, quam duo.

Sint oppositæ sectiones a b, d e g; & hyperbole a c sectionem a b in punto a contingat: sitq; ipsi a c opposita sectio d e f.

Dico d e f non occurrere sectioni d e g ad plura puncta, quam duo. si enim fieri potest, occurrat ad puncta tria d e h; & ducatur recta linea a k, sectiones a b, a c contingens. iuncta uero d e producatur: & sint primum a k, d e inter se æquidistantes: seceturq; d e bifariam in l: & iungatur a l. erit igitur a l diameter duarum coniugatarum, quæ sectiones inter puncta d e secant in m n: quoniam d e in puncto l bifariam secta est. ducatur ab h linea h x g f æquidistantis d e. ergo in altera quidem sectione erit h x æqualis x f in altera uero h x æqualis x g. quare x f ipsi x g est æqualis: quo d fieri non potest. sed non sint a k, d e æquidistantes, conueniantq; in k: & reliqua eadem fiant. producta uero a k occurrat ipsi f h in r. similiter atque in ijs, quæ dicta sunt, demonstrabimus ut rectangulum d k e ad quadratum a k, in sectione f d e, ita esse rectangulum f r h ad quadratum r a: & in sectione g d e, ita rectangulum g r h ad quadratum r a. rectangulum igitur g r h æquale est rectangulo f r h: quod fieri non potest. ergo d e, ipsi d e g ad plura puncta, quam duo, non occurret.



F E D . C O M M A N D I N V S .

Intelligatur hyperbole, quæ unam oppositarum sectionum contingit, uel easdem partes concavæ habens; alioquin hæc uera non essent, quod ex 52. huius manifesto apparere potest.

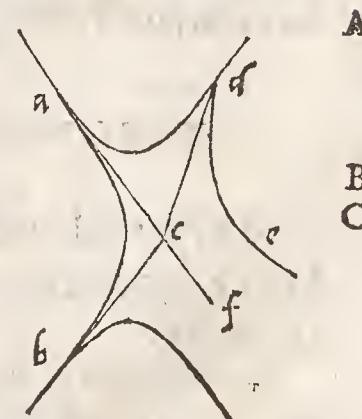
THEOREMA XLIX. PROPOSITIO XLIX.

Si hyperbole contingat utramque oppositarum sectionum; quæ ipsi opponitur sectio nulli oppositarum occurret.

Sint oppositæ sectiones a b: & hyperbole a b utramque ipsarum in punctis a b contingat: opponaturq; ei sectio e. Dico e nulli sectionum a b occurrere. si enim fieri potest, occurrat sectioni a in d: & à punctis a b ducantur lineæ contingentes sectiones, quæ quidem intra asymptotos sectionis a b conuenient. conueniant in c: & iungatur c d. ergo c d est in loco intermedio inter a c, c b. sed est etiā inter b c, c f. quod fieri non potest. non igitur e sectionibus a b oppositis occurret.

E V T O C I V S .

Dico e nulli sectionum a b occurrere. [Ducantur enim à punctis a b lineæ contingentes sectiones, quæ conueniant inter se in puncto c, uidelicet intra angulum sectionem a b continentem. Itaque constat lineas a c, b c, si producantur, asymptotis sectionis e non occurrere, sed ipsas continere, & multo magis continent sectionem e. Quoniam igitur a c sectionem a d contingit, non occurret ipsi b g. similiter ostendemus lineam b c sectioni a d non occurrere. ergo sectio e nulli ipsarum a d, b g sectionum occurret.]



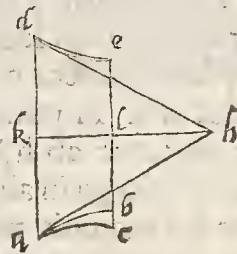
A
25. secundi huius.
ex demonstratis in
33. secundi huius.
33

- B Ergo c d est in loco intermedio inter a c, c b.] Hoc est à puncto d sectionis e d duota linea ad c intra angulum a c b cadet.
- C Séd est etiam inter b c, c f.] Quoniam enim linea b c sectionem b contingit, producit non occurret oppositæ sectioni a d. quare si à puncto d eiusdem sectionis linea ducatur ad c, intra angulum b c f cadet; quod est absurdum, cadebat enim intra angulum a c b.

THEOREMA L. PROPOSITIO L.

Si utraque oppositarum sectionum in uno punto contingat, ad easdem partes concava habens; in alio punto non occurret.

Contingant enim se se oppositæ sectiones in punctis a d. Dico eas in alio punto sibi ipsis non occurtere. si enim fieri potest, occurrant in e. & quoniam hyperbole unam oppositarum sectionum in d contingens, secat in e, sectio a b ipsis a c, præterquam in uno punto non occurret. ducantur a punctis a d lineæ a h, h d, quæ sectiones contingant: iunctaq; a d, per e ducatur e b c ipsi a d æquidistans, & per h ducatur se cunda diameter oppositarum sectionum h l k, quæ secabit a b bifariam in k. ergo utraque e b, e c in puncto l bifariam secabitur: & propteræ b l æqualis erit l c; quod fieri non potest. non igitur in alio punto sibi ipsis occurrent.

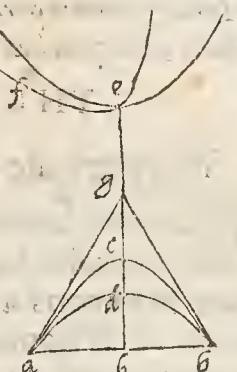


THEOREMA LI. PROPOSITIO LI.

Si hyperbole unam oppositarum sectionum contingat in duobus punctis; quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret.

Sint oppositæ sectiones a d b, e: & hyperbole a c sectionem a d b in duobus punctis a b contingat: opponaturq; ipsi a c sectio f. Dico f ipsi e nō occurtere. si enim fieri potest, occurrat in e: & à punctis a b ducantur contingentes sectiones a g, g b: iungaturq; a b, & e g, ac producatur. secabit igitur sectiones in alio, atque alio punto: & sit e g c d h.

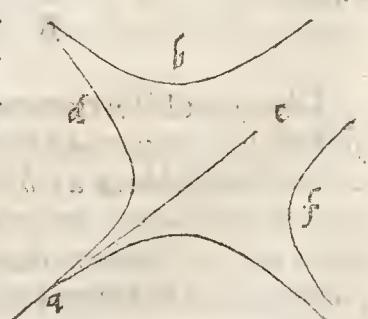
Itaque quoniam a g, g b sectiones contingunt: & a b coniungit tactus, erit in altera quidem coniunctione, ut h e ad e g, ita 36. primi h d ad d g; in altera uero ut h e ad e g, ita h c ad c g; quod huius fieri non potest. non igitur sectio f ipsi e occurret.



THEOREMA LII. PROPOSITIO LII.

Si hyperbole unam oppositarum sectionum contingat, conuexa habens è regione sita; quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret.

Sint oppositæ sectiones a b: & hyperbole quedam a d sectionem a in puncto a contingat: ipsi autem a d opponatur f. Dico f sectioni b non occurtere. Ducatur enim à puncto a linea a c sectiones contingens. ergo a c propter ipsam a d sectioni f non occurret & propter a non occurret sectioni b. quare a c inter b f sectiones cadat necesse est: & idcirco b sectioni f non occurtere manifesto constat.

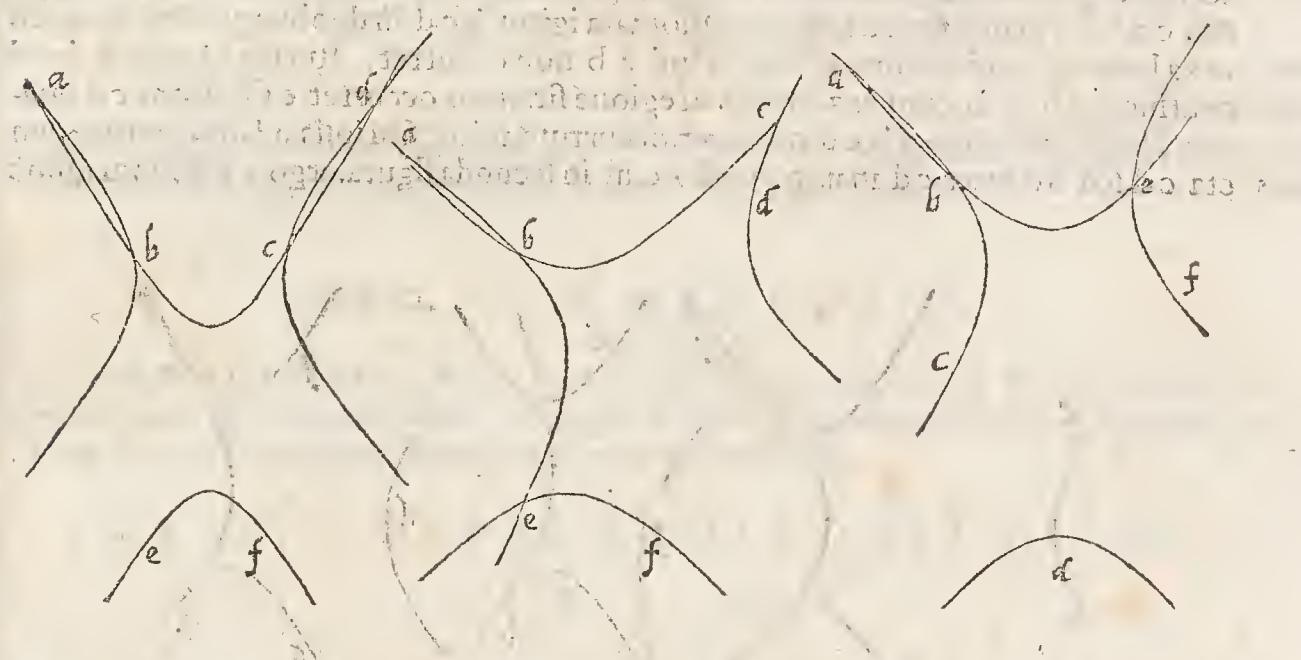


THEO

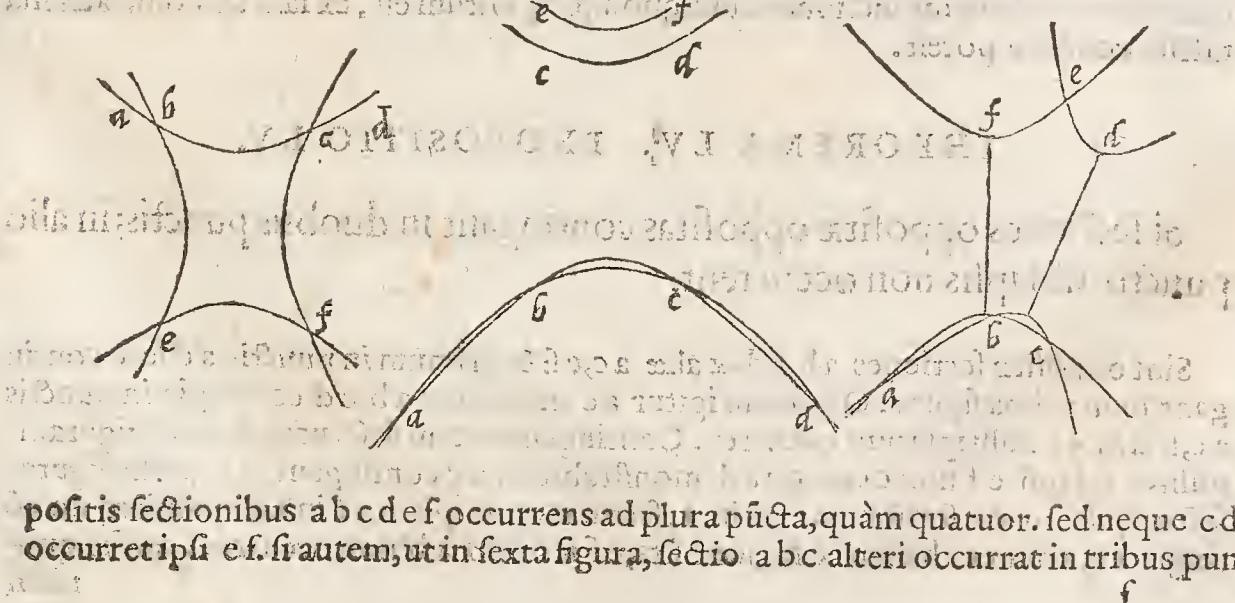
THEOREMA LIII. PROPOSITIO LIII.

Oppositæ sectiones oppositas non secant in pluribus punctis, quām
quatuor.

Sint oppositæ sectiones $a b, c d$, & alia oppositæ $a b c d, e f$; & secet prius $a b c d$ se
& utramque ipsarum $a b, c d$ in quatuor punctis $a b c d$, conuexa habens ē regione
sita; ut in prima figura apparet. ergo quæ sectioni $a b c d$ opponitur, hoc est $e f$ nul-
li ipsarum $a b, c d$ occurret. sed $a b c$ sectionem quidem $a b$ secet in punctis $a b$, ip-
sam uero $c d$ in uno puncto c , ut in secunda figura. quare $e f$ non occurret sectioni $c d$. si autem sectioni $a b$ occurrit $e f$ in uno tantum puncto occurrit: nam si in duo
bus punctis sectio $a b c$, quæ ipsi opponitur, non occurret alteri $c d$. atqui in uno pun-
41. huius



Atq[ue] c occurre[re] ponit[ur]. quod si $a b c$ sectionem $a b$ in duobus punctis $a b$ secet:
ut in tertia figura, occurret quidem $e f$ sectioni $a b e$, sectioni uero d non occurret,
atque ipsi $a b e$ occurrens non occurret ad plura puncta, quām duo. si uero $a b c d$
utramque secet in uno punto, ut in quarta figura, $e f$ nulli ipsarum in duobus pūctis
occurret. ergo propter eā, quæ diēta sūnit, & ipsorum conuersa, sectiones $a b c d, e f$
oppositis sectionibus $b e, c f$ non occurrent ad plura puncta, quām quatuor. At si se-
ctiones ad easdem partes concavāa habeant: atque altera alteram in quatuor punctis
 $a b c d$ secet, ut in quinta figura, sectio $e f$ alteri non occurret. rursus enim erit $a b$ op-
41. huius



positis sectionibus $a b c d e f$ occurrens ad plura pūcta, quām quatuor. sed neque $c d$
occurret ipsi $e f$. si autem, ut in sexta figura, sectio $a b c$ alteri occurrat in tribus pun-
36. huius

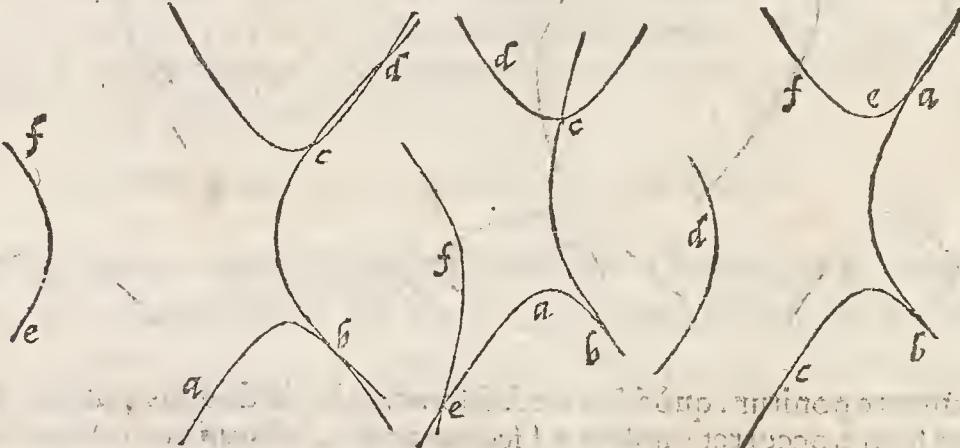
44. huius

Etis, e f alteri in uno tantum punto occurret, & eodem modo in reliquis dicemus. Quoniam igitur iuxta omnes distinctiones constat illud, quod propositum est, oppositæ sectiones oppositis ad plura puncta, quam quatuor, non occurrent.

THEOREMA LIII. PROPOSITIO LIII.

Si oppositæ sectiones oppositas in uno punto contingant; non occurrent sibi ipsis ad alia puncta plura, quam duo:

Sint oppositæ sectiones a b c d: & aliæ b c d, e f: & b c d, contingat a b in punto b, conuexa habens è regione sita: occurratq; primum b c d sectio ipsi c d in duobus pū etis c d, ut in prima figura appetet. Quoniam igitur b c d in duobus punctis secat, conuexa habens è regione sita, sectio e f ipsi a b non occurret. Rursus quoniam b c d contingit a b in b, conuexa habens è regione sita, non occurret e f sectioni c d. quare e f nulli sectionum a b, c d occurret. occurunt igitur sibi ipsis ad duo tantum puncta c d. sed b c secat c d in uno punto c, ut in secunda figura. ergo e f sectioni quidē



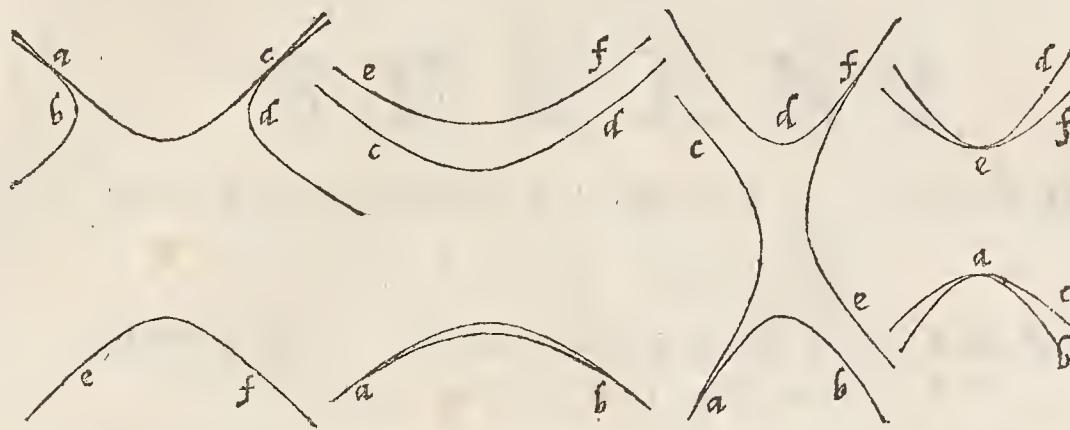
cd non occurret; ipsi uero ab occurret in uno punto tantum; si enim in duobus punctis, non occurret bc ipsi cd. atqui in uno punto occurrere ponebatur. Quod si bc non occurrat sectioni d, ut in tertia figura, propter ea, quæ dicta sunt, e f ipsi d non occurret: & non occurret ipsi a b ad plura puncta, quam duo. At uero si sectiones ad easdem partes concava habeant, demonstrationes eadem accommodabuntur. quare iuxta omnes distinctiones illud, quod propositum est, ex iam demonstratis manifesto constare potest.

THEOREMA LV. PROPOSITIO LV.

Si sectiones oppositæ oppositas contingant in duobus punctis; in alio punto sibi ipsis non occurrent.

Sint oppositæ sectiones a b, c d: & aliæ a c, e f: & primum in punctis a c se se contin-
gant, ut in prima figura. Quoniam igitur a c utramque a b, c d contingit in punctis
a c, sectio e f nulli ipsarum occurret. Contingant autem se se, ut in secunda figura. si-
militer c d ipsi e f non occurrere demonstrabitur. sed contingant ut in tertia figura,
sectio quidem ca sectionem a b in a; sectio uero d ipsam e f ins. & quoniam c d con-
tingit a b, conuexa habens è regione sita, e f sectioni a b non occurret. rursus quo-
niam

niam fd contingit ef, non occurret ca ipsi df. Denique si ca contingat ab in a, & ef contingat ed in e, habentes concaua ad easdem partes, ut in quarta figura, in alio



puncto sibi ipsis non occurrent; neque ef occurret ipsi ab. iuxta omnes igitur distinctiones ex iam demonstratis constat illud, quod proponebatur.

F E D . C O M M A N D I N V S .

Et quoniam ca contingit ab, conuexa habens è regione sita.] *Videne hic locus corruptus sit, vel figura ipsa, nam cum ca contingat ab, quæ ipsi opponitur, uidelicet ef oppositæ sectioni fd ex quinquagesima secunda huius occurrere non potest.*

Q V A R T I L I B R I A P O L L O N I I F I N I S .

1. *Streptomyces* *luteus* *var.* *luteus*
2. *Streptomyces* *luteus* *var.* *luteus*

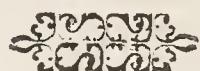
Streptomyces luteus var. luteus

3. *Streptomyces luteus* *var.* *luteus*
4. *Streptomyces luteus* *var.* *luteus*

Streptomyces luteus *var.* *luteus*

S E R E N I
A N T I N S E N S I S P H I L O S O P H I
L I B R I D V O.
V N V S D E S E C T I O N E C Y L I N D R I,
A L T E R D E S E C T I O N E C O N I.

A' F E D E R I C O C O M M A N D I N O V R B I N A T E
E' G R A E C O C O N V E R S I, E T
C O M M E N T A R I I S I L L U S T R A T I.



C V M P R I V I L E G I O P I I I I I L. P O N T. M A X.
I N A N N O S X.

B O N O N I A E,
E X O F F I C I N A A L E X A N D R I B E N A T I L.
M D L X V I.

МІЛІТЭР

ІНІЦІОВАНЫ ЗІЗКЕІІГІА

ЛОУСІЯІІІ

ДАІІЛУОКІОІГОЗА ЗІЗКЕІІГІА

ДІОДУОКІОЗА ЗІЗКЕІІГІА

ІТАКІІЛУОКІОІММОЗ ОІІЛІІІІА

FRANCISCO MARIAE II.
GVIDI VBALDI VRBINATVM
DVCIS PRIMOGENITO.



ERISSIMUM illud græci tragici dictum esse,
 $\pi\acute{o}n\omega\pi\acute{o}n\omega\pi\acute{o}n\omega$ cum sæpe aliàs in rebus mathe-
maticis illustrandis sum expertus, Illustrissime
Princeps, tum maxime proximis his diebus, cum
Apollonii Pergæi libros conicorum, difficiles in
primis, atque obscuros summo labore, atque in-
credibili animi contentione conuerti. neque e-
nim eo contentus fui, quod satis esse ad leuandam pristinam aliqua
ex parte difficultatem uidebatur, sed rei dilucidandæ cauſa com-
mentarios etiam, atque exposiciones aliquot mihi addendas existi-
maui. nunc uero eiusdem rei amore captus, ac quodammodo erudi-
to ciuſmodi labore delectatus, addo propter argumenti similitudi-
nem libros Sereni Antinsensis duos, quorum in primo agitur de
ſectione cylindri, in ſecundo de ſectione coni, quæ fit per uerticem,
ex qua uariæ triangulorum species oriuntur. quæ res cum maxima
contemplatione dignissima, tum à nemine alio adhuc litteris, memo-
riæq; mandata eſt. Hoc autem eò libentius feci, quòd ſciebam Se-
reni libros ab omnibus mathematicarum ſcientiarum studiosis uehe-
mentiſiſme expeti, quippe qui neque latinitate donati, neque vul-
gati eſſent, ſed scripti apud paucos tantum legerentur. Viſum eſt au-
tem mihi conuenire, cum Apollónium Gvido Valdo patri
tuo Illustriſimo dicarem, Serenum nomini tuo conſecrare. prium
quòd quæ mea in patrem, eadem in filios obſeruantiae ratio eſt; dein-
de quòd hæc ipſa ad artem, ſtudiumq; rei bellicæ mirifice perteſſent.
quo uſque adeo ipſe teneris, ut procedente ætate facile ſi fortuna
paululum aspirauerit, cum ſcientia, tum uirtute maiorum, in pri-
misq; cui tui gloriam, cuius nomen refers, ſuperaturus eſſe uidea-
ris. ut illud omittam, quòd pueritiam tuam non minus mathemati-
cis disciplinis percipiendis traduxisti, quam latinis, ut aſſolet, litte-
ris, in quibus excellis. Quæ quoniam ueriſima eſſe nemo dubitat,

cui ego iustius hoc meæ erga domum uestram, teq; ipsum pietatis
testimonium , atque industriae qualisunque monumentum dica-
rem, quām tibi, neminem habui. Vale.

OPTIMA COMIA PRAECEPS

Notandum est, quod iste missivus Federicus Commandinus.

S E R E N I A N T I N S E N S I S
PHILOSOPHI LIBER PRIMVS
DE SECTIONE CYLINDRI.

C V M C O M M E N T A R I I S F E D E R I C I
C O M M A N D I N I V R B I N A T I S .

S E R E N V S C Y R O S . D .



V M uiderem quamplurimos , amice Cyre , eorum qui in geometria uersantur , arbitrari transuersam Cylindri sectionem longe diuersam esse ab ea sectio ne coni , quæ ellipsis appellatur ; nō committendum putaui , ut ab errore non auerterem tum eos ipsos , qui ita arbitrantur , tum eos , qui ab his illud ita esse persuaderi possent . quamquam absurdum omnino uideatur , Geometras ipsos de problemate geometrico sine demonstra tione quicquam affirmare : oratio enim probabilis , & sine ullo artificio à geometria alienissima est . Itaque quoniam hi ita sentiunt , nos autem non assentimur , libuit geometrice demonstrare unam , atque eandem specie sectionem necessario fieri in utrisque figuris , in cono , inquam , & Cylindro , si modo ratione quadam , & non simpliciter fescerentur . Quem admodum autem ueteres , qui conica tractarunt , non contenti communi intelligentia coni , nempe quod à triangulo rectangulo constituere tur : uniuersalius & artificiosius de ipso conscriperunt , non tantum rectos , sed etiam scalenos conos statuentes : ita & nobis faciendum erit . Nam cum cylindri sectionem nobis tractandam proposuerimus , non solum rectum cylindrum , sed etiam scalenum ponentes , quæ ad hanc contemplationem pertinent , latius , fusilisq ; explicabimus . & quāquam certo sciam neminem fore , qui facile admittat , non omnem conum rectum esse , communī notionē id suadente : tamen contemplationis gratia melius esse iudicauī uniuersaliōi diffinitione ipsum comprehendere : etenim cylindri recti sectio eadem est , quæ ellipsis recti coni . sed cylindro uniuersalius accepto , sectionem eius omni pariter ellipſi eandem esse neces sario continget . id quod nos in hoc libro probare instituimus . Attenden da autem prius hæc sunt , quæ ad propositā materiam diffinitē oportet .

DEFINITIONES.

1 Si igitur duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter se se æquidistantes, & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur: & unà circumferatur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo moueri cœpit: superficies, quæ à circumlata linea describitur, cylindrica superficies uocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta. 2 Cylindrus, figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur. 3 Cylindri basis, circuli ipsi. 4 Axis, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur. 5 Latus autem cylindri linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri: bases utrasque contingit; quam & circumlatam cylindri superficiem describere antea diximus. 6 Cylindrorum, recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus. 7 Scaleni autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent: Sed & hæc ex Apollonio scire oportet. 8 Omnis linea curuæ, in uno plano existentis diameter uocetur recta linea; quæ quidem ducta à linea curua, omnes, quæ in ipsa ducuntur rectæ cuiquam æquidistantes bifariam diuidit. 9 Vertex lineæ, terminus ipsius rectæ, qui est ad lineam. 10 Ordinatim ad diametrum applicari dicitur unaquæque linearum æquidistantium. 11 Coniugatae diametri dicantur, quæ quidem à linea ordinatim ductæ ad coniugatas diametros, ipsas similiter diuidunt. 12 His igitur positis & in transuersis sectionibus cylindri punctum, quod diametrum bifariam diuidit, centrum sectionis uocetur. 13 Quæ à centro ad lineam perducitur, dicatur ea, quæ ex centro. 14 Quæ uero per cœtrum sectionis transit, æquidistans ei, quæ ordinatim applicata est, & terminatur ab ipsa linea, secunda diametra dicatur. demonstrabitur enim lineas omnes in sectione ductas, quæ quidem diametro æquidistant bifariam secare. 15 Illud etiam determinandum est. Similes ellipses esse, quarum coniugatae diametri se se ad angulos æquales secantes eandem habent proportionem.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si duæ rectæ lineæ se se tangentes, duabus rectis lineis se se tangentibus æquidistent, & sint utræque utrisque æquales: quæ terminos eorum coniungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & æquidistantes erunt.

DE SECTIONE CYLINDRI.

SINT duæ rectæ lineaæ se se tangentes a b, b c; quæ duabus rectis lineaes se se tangentibus d e, e f æquidistant: sitq; a b æqualis d e, & b c ipsi e f: & iungantur a c, d f. Dico lineaes a c, d f & æquales esse, & æquidistantes. iunctis enim a d, b e, c f, quoniam a b ipsi d e est æqualis, & æquidistans; erit a d & æqualis, & æquidistans ipsi b e. Rursus quoniam b c ipsi e f est æqualis, & æquidistans; & c f æqualis & æquidistans erit ipsi b e. Quare a d, c f æquales inter se se & æquidistantes erunt: ac propterea ipsæ quoque a c, d f. quod propositum fuerat ostendendum.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

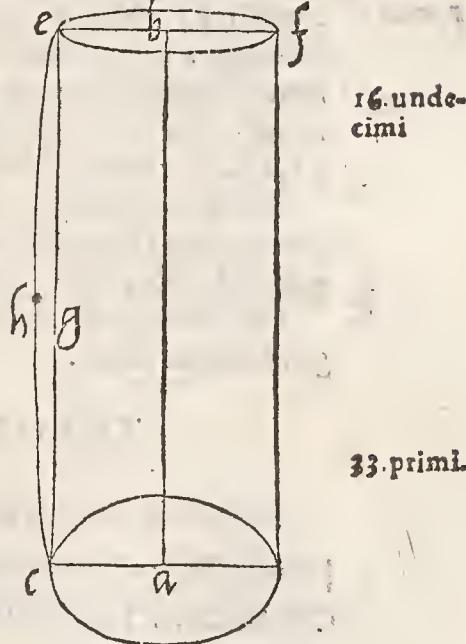
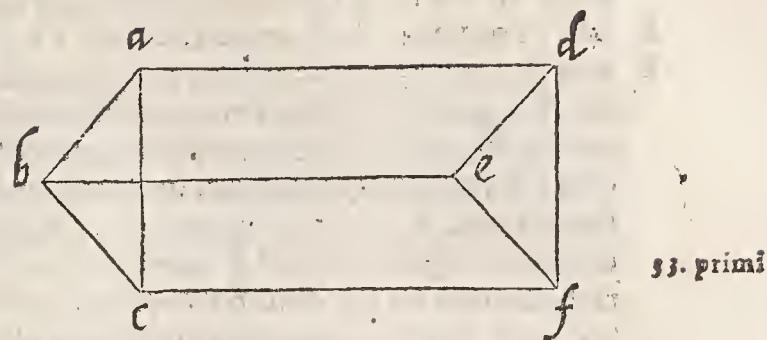
Si cylindrus plano secetur per axem, sectio parallelogrammum erit.

SIT cylindrus, cuius bases circuli circa centra a b: axis autem a b recta linea: & ducatur per a b planum secans cylindrum, faciensq; sectiones, in circulis quidem rectas lineaes c d, e f, quæ diametri sunt; in superficie autem cylindri ipsas e g c, d f. Dico utrinq; linearum e g c, d f rectam esse. Si enim fieri potest, non sint rectæ: & ducatur recta e h c. Quoniam igitur linea e g c & e h c recta in plano e d conueniunt ad e c puncta: atque est e g c in superficie cylindri: ipsa e h c in cylindri superficie non erit. & quoniam circuli a b æquales sunt, & æquidistantes; secanturq; à plano e d communes ipsorum sectiones æquidistantes erunt, atque etiam æquales, cum diametri sint æqualium circulorum. Itaque si manentibus a b punctis diametros a c, b e intelligamus circumferri, & unâ cum ipsis rectam linam e h c circa circulos a b, quo usque rursus in eundem locum restituantur, à quo moueri coeperunt: recta e h c cylindri superficiem describet: & erit h punctum in superficie ipsa. atqui erat extra superficiem; quod fieri nullo modo potest. recta igitur linea est e g c. similiter & recta est ipsa f d: & coniungunt æquales, & æquidistantes lineaes e f, c d. parallelogrammum igitur erit ipsum e d. quod ostendisse oportebat.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si cylindrus plano secetur æquidistante ei parallelogrammo, quod fit per axem, sectio parallelogrammum erit, æquales ipsi angulos habet.

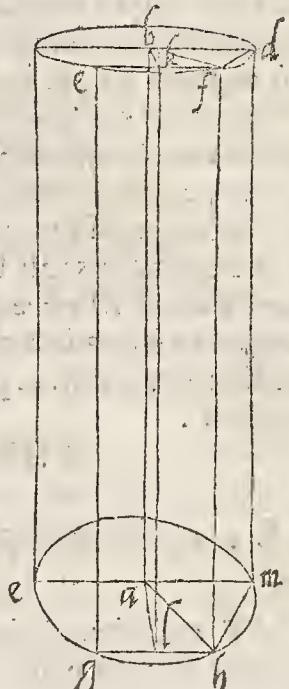
SIT cylindrus, cuius bases circuli circa centra a b; & axis a b recta linea; parallelogrammum autem per axem c d: & secetur cylindrus altero plano e f g h, æquidistante ipsi c d parallelogrammo; quod faciat sectiones, in basibus quidem rectas lineaes e f, g h; in superficie autem cylindri ipsas e g, f h. Dico figuram e g h f parallelogrammum esse, æquiangulum ipsi c d. Ducatur à centro b ad e f perpendicularis b k: perq; lineaes k b, b a ducto plano, communes sectiones sint a l, k l: & iungantur b f, a h. Quoniam igitur circulus a circulo b æquidistat; & c h planum piano c d: secanturq; ab ipso a b k l piano: linea a l æquidistantib; linea b k; & k l ipsi b a. quare k a parallelogrammum est: ideoq; linea k l æqualis est linea b a; & b k ipsi a l. Et quoniam b k quidem ipsi a l æquidistat, k f uero ipsi l h: & b k f angulus æqualis erit augulo a l h.



16. undecimi
34. primi
10. undecimi

S E R E N I L I B E R I.

arque est bk ad kf perpendicularis. perpendicularis est igitur al ad ipsam lh . sunt
A autem æquales. ergo æquales & ipsæ ef, gh , & æquidistan-
B tes. Præterea quoniam bf æquidistans est ipsi ah ; planum
 per bf , atque axem ductum transibit etiam per ah : secio-
 nemq; faciet parallelogrammum; cuius latus recta linea,
 quæ fh puncta coniungens, in superficie ipsius cylindri exi-
 stet. est autem & fh latus figuræ $efgh$ in superficie cylindri.
 commune igitur latus est & parallelogrammi per axem. quare
 recta linea est fh . Similiter & recta demonstrabitur ipsa eg .
 Sed coniungunt æquales & æquidistantes lineas ef, gh . ergo
 ipsum eh parallelogrammum erit. Dico insuper & æquian-
 gulum esse $c d$ parallelogrammo. Quoniam enim duæ lineæ
 $d b, bf$ duabus lineis ma, ah æquidistant; suntq; quatuor li-
 neæ æquales; & ipsæ fd, mh inter se æquales erunt, & æquidi-
 stantes, ex primo theoremate. ergo & æquales, & æquidistan-
C tes ipsæ fh, dm est autem & lh ipsi am æquidistans. angu-
 lis igitur $lh f$ parallelogrammi eh æqualis est angulo $am d$
 parallelogrammi $c d$. Quare parallelogrammum eh paralle-
 logrammo $c d$ æquiangulum erit.



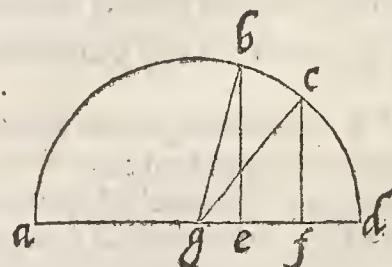
C O M M E N T A R I V S.

- A** E R G O æquales & ipsæ $ef, gh, \&c.$] Nam cum sit bk ad ef perpendicularis, erit $e k$
 §. tertij. æqualis kf , & ita gl ipsi lh : sed æquales sunt bf, ah , semidiometri scilicet æqualium circulo-
 rum. quare ex penultimo primi quadratum kf æquale erit quadrato lh ; & idcirco lineæ kf, lh
 inter se æquales. ergo & æquales ipsæ ek, gl : & addita utrinque æuali, erit tota ef toti gh
 æqualis. Hoc etiam constare potest ex 14. tertij. sunt enim a, b circuli inter se æquales: & lineæ
 gh, ef à centro æqualiter distant.
B Præterea quoniam bf æquidistans est ipsi ah .] Sunt enim duæ lineæ bk, kf se tangentibus
 duabus lineis se tangentibus al, lh æquales, & æquidistantes. quare quæ ipsas coniun-
 gunt rectæ lineæ bf, ah æquales erunt, & æquidistantes, ex prima huius.
C Angulus igitur $lh f \&c.$] Ex decima undecimi, & eadem ratione reliqui anguli reliquis an-
 gulis æquales erunt.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si curuæ lineæ recta subtendatur; & quæ à linea ad subtensam per-
 pendiculares ducuntur, posint æquale ei, quod ipsius subtensæ partibus
 continetur: dicta linea circuli circumferentia erit.

S I T curua linea $ab d$; & quæ ei subtenditur
 recta ad : ducantur be, ef perpendiculara
 res ad ipsam ad : ponaturq; quadratum be æqua-
 le rectangulo aed , & quadratum $c f$ æquale ipsi
 adf . Dico lineam abd circuli circumferentiam
 esse. secetur enim ad bifariam in puncto g , & iungantur
 gb, gc . Quoniam igitur quadratum gd
 æquale est quadrato be , & quadrato ge : quadra-
 tum autem bg æquale quadratis ge, eb : erit linea
 bg ipsi gd æqualis. & similiter demonstrabitur
 cg æqualis gd , & aliæ eodem modo. Semicirculus
 igitur est linea abd .



COM

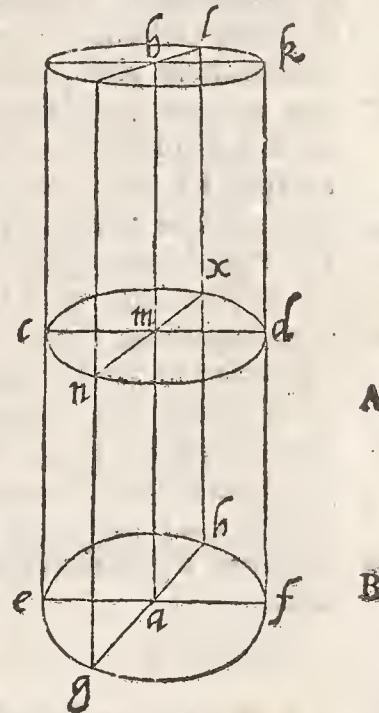
COMMENTARIUS.

Quoniam igitur quadratum $g d$ æquale est quadrato $b e$.] Est enim ex quinta secundi quadratum $g d$ æquale rectangulo $a e d$, & quadrato $g e$, sed cum ponatur quadratum $b e$ æquale rectangulo $a e d$: erit quadratum $g d$ duobus quadratis $b e$, $e g$ æquale: & est quadratum $g b$ æquale iisdem ex penultima primi. Ergo quadratum $g b$ æquale erit quadrato $g d$; & idcirco linea $g b$ ipsi $g d$ est æqualis. Hoc autem demonstratum est à Pappo, & Eutocio in quintam propositionem primi libri conicorum Apollonij.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si cylindrus plano basibus æquidistante secatur; sectio circulus erit, centrum habens in axe.

Sit cylindrus, cuius bases quidem circuli a b; axis autem a b recta: & secatur plano basibus æquistante, quod faciat sectionem in superficie cylindri lineam c x d. Dico ipsam c x d circuli circumferentiam esse. Describantur in circulo a diametri e f, g h: & per utramque ipsarum, & axem ducantur plana cylindrum secantia; quæ faciant sectiones parallelogramma ipsa: & sit parallelogrammi e k, & plani c x d communis sectio c d: parallelogrammi autem g l, & eiusdem plani communis sectio n x. Quoniam igitur planum c x d æquidistat circulo a: & secantur à piano e k: linea c d linea e f est æquidistans: & eadem ratione linea n x æquidistans ipsi g h. Itaque quoniam b a utriusque c e, d f æquidistat; & est ea æqualis a f. erit c m ipsi m d æqualis. Similiter quoque cum sit g a æqualis a h: & n m æqualis erit m x. Sunt autem a e, a g æquales. ergo & m c, m n æquales erunt. quare omnes m c, m d, m n, m x inter se æquales. & simili ratione aliae æquales ostendentur, quæcumque à puncto m ad lineam c x d pertinent. circulus igitur est sectio c x d, qui centrum habet in linea a b. Illud uero manifeste patet. nam cum punctum m sit in tribus planis; & in ipsa a b communi planorum sectione necessario erit, hoc est in ipso axe.



COMMENTARIUS.

ERIT c m ipsi m d æqualis.] Nam cum & linea c d æquidistet linea e f, & n x ipsi g h, A parallelogramma erunt ipsa e m, m f, g m, m h; & ideo linea c m æqualis ipsi e a; m d ipsi a f; n m ipsi g a; & m x ipsi a b. quare æqualibus existentibus e a, a f, g a, a b: & ipsæ c m, m d, m n, m x æquales erunt.

Circulus igitur est sectio c x d, qui centrum habet in linea a b.] Sequitur ex demonstratis sectionem eiusmodi non solum circulum esse, sed & æqualem circulis basium; quod ipse Serenus tanquam notum omisit. Cum enim parallelogrammum sit e d: linea c d diameter sectionis æqualis est diametro basis e f. quare & circulus circulo æqualis erit.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

SI cylindrus scalenus plano per axem secatur, ad rectos angulos ipsi basi: secatur autem & altero plano, recto ad parallelogrammum per axem, quod faciat communem sectionem in parallelogrammo rectam lineam, æquales angulos continentem iis, qui sunt parallelogrammi,

SERENI LIBERI.

non autem ipsius basibus æquidistantem : sectio circulus erit . uocetur autem talis sectio subcontraria .

Sit cylindrus scalenus , cuius parallelogrammum per axem a d , ad rectos angulos existens ipsi basi : seceatur autem cylindrus & altero plano e f g , ad parallelogrammum a d recto ; quod in ipso communem sectionem faciat , rectam lineam e g basibus a b , c d minime æquidistantem : ita ut contineat angulum g e a æqualem angulo e a b ; an-

gulum uero e g b æqualem ipsi a b g . Dico sectionem e f g circulum esse . Sumatur ali-

^{4 diff. un}
decimi

^{6. unde-}
cimi

15

per præ-
cedente

8. & 17. se-
xti

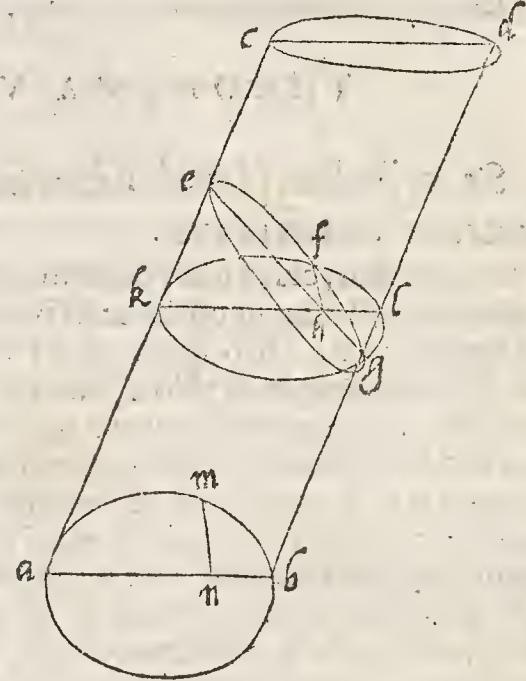
6. primi

A

æqualis ipsi h k , & g h ipsi h l , propterea quòd ad bases e k , l g anguli æquales sunt . ergo quadratum f h æquale est rectangulo e h g ; atque est f h ad e g perpendicularis . similiter autem & si ad e g alia ducatur æquidistans ipsi f h , poterit æquale ei , quod

B

partibus e g continetur : circulus igitur est e f g sectio , cuius diameter e h g recta linea .



C O M M E N T A R I V S .

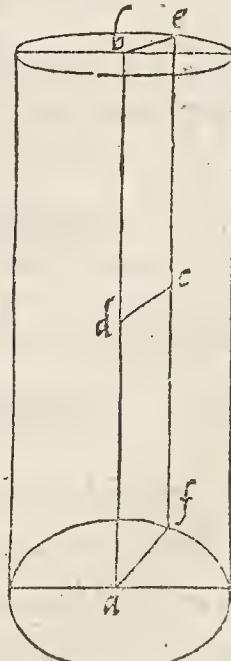
A PROPTERA quòd ad bases e k , l g anguli æquales sunt .] Positum enim est angulum g e a æqualem esse angulo e a b , & e g b ipsi a b g . Quòd cum anguli e a b , e k l æquales sint , erunt & ipsi h e k , h l g æquales : & ita æquales eorum coalterni h g l , h l g .

29. primi. B Circulus igitur est e f g sectio .] Ex quarta huius .

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII

Cylindro dato , & puncto in superficie eius ; per dictum punctum latus cylindri ducere .

Sit cylindrus , cuius bases circuli a b ; axis a b recta linea ; & datum punctum in eius superficie c : oporteat autem per c ducere cylindri latus . Agatur à punto c perpendicularis ad lineam a b , quæ sit c d : & per a b , c d lineas duca tur planum cylindrum secans . sectio igitur per c transibit , & faciet in superficie rectam lineam e f , quæ quidem cylindri latus erit .



THEO

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

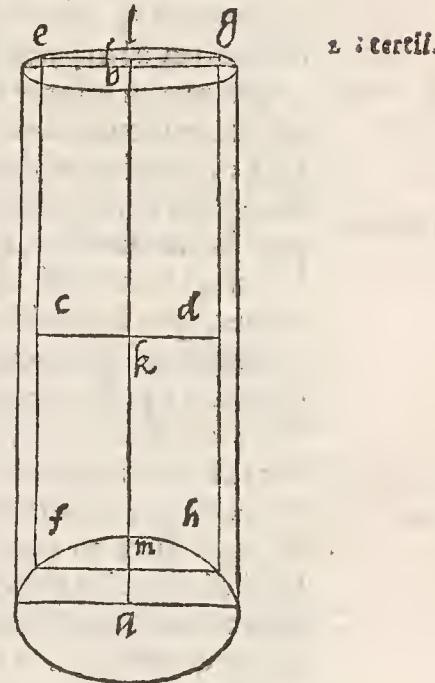
Si in superficie cylindri duo puncta sumantur non existentia in latere parallelogrammi per axem: quæ dicta puncta coniungit recta linea intra cylindri superficiem cadet.

Sit cylindrus, cuius bases circuli a b: sumanturq; in superficie eius duo puncta c, d, quæ non sint in uno latere parallelogrammi per axem: & iungatur c d. Dico ipsam c d intra cylindri superficiem cadere. Si enim fieri potest, uel in superficiem eius, uel extra superficiem cadat. & quoniam puncta c d non sunt in latere cylindri: ducatur per c quidem latus e f: per d uero ipsum g h: & iungantur e g, f h. ergo e g f h intra circulos cadent. Sumatur aliquod punctum in linea c d, quod sit k. uel legitur k erit in superficie cylindri, uel extra. Sit primum in superficie: & per k ducatur latus cylindri, l m recta linea: quæ quidem cadens in circumferentias e g, f h si producatur neutrā rectarum e g, f h secabit. quare l m non erit in plano e g h. sed punctum k est in ipso l m. non igitur k erit in plano e g h. Quoniam autem c d est in ipso e g h plāno; & in c d est punctum k: erit k in eodem e g h plāno. Quare k in dicto plāno erit, & non erit. quod fieri non potest. non igitur c d est in superficie cylindri. Sed sit extra: sumaturq; in circumferentia e g aliquod punctum l: & iungatur k l. ergo k l ex utraque parte producta neutrā rectarum e f, g h secabit. quare non erit in plāno e g h. reliqua uero, sicuti superius manifeste concludentur.

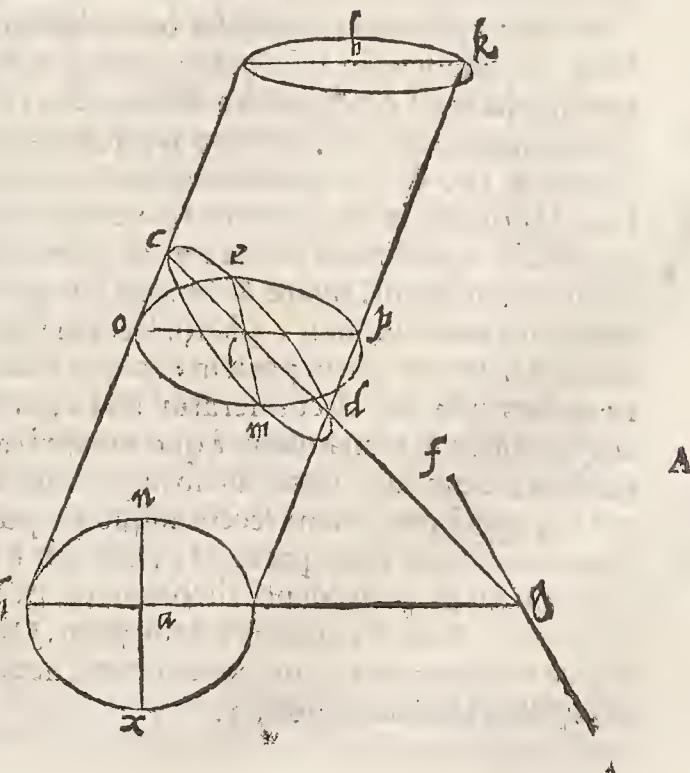
THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si cylindrus plāno secetur, neque basibus æquidistante, neque subcontrarie posito, neque per axem, neque æquidistante ei, quod per axem fit parallelogrammo; sectio neque circulus, neque parallelogrammum erit.

Sit cylindrus, cuius bases circuli a b: & secetur plāno neque æquidistante basibus, neque subcontrarie posito, neque per axem, neque axi æquidistante. Vel igitur secans plānum bases utrasq; secabit, uel alteram tantum, uel neutrā. Primum uero neutrā secet: & faciat in superficie cylindri lineam c e d. Dico c e d sectionem, neque circulum esse, neque rectilineum. Nam rectilineum non esse manifesto constat. Sit enim rectilineum, si fieri potest: & sumatur latus quodpiam ipsius c e. Quoniam igitur in cylindri superficie duo puncta c e sumuntur, in eodem latere cylindri non existentia; latus enim in duobus punctis, talem lineam non secat: erit recta linea, quæ puncta c e coniungit in superficie ipsius cylindri: quod quidem fieri non posse iam demonstra-



z : cerell.



A

S E R E N I L I B E R I.

tum est. non igitur recta linea est ce, neque ipsum ced rectilineum. demonstrandum deinceps est, neque circulum esse. Quoniam enim sectionis ced planum piano circuli a non est æquidistans: si plana producantur, ipsa se inuicem secabunt. scilicet ergo se se, & sit ipsorum communis

*9. unde
cimi*

sectione fg: perq; a centrum ducatur ha ad fg perpendicularis: & per ha, & axem ducatur planum, faciens in cylindro sectionem parallelogrammum hk; in sectione autem ced rectam lineam cd: & secta cd bifariam in puncto l, ducentur ipsi fg æquidistantes; per l quidein linea elm, per a uero ipsa nax. quare me, nx inter se se æquidistantes erunt. ducatur deinde planum per em, basi cylindri æquidistans, quod faciat in cylindro sectionem oepm. erit o e pm sectio circulus; cuius diameter op bifariam secatur in l: nam cum triangula loci, ipd similia sint, & sit cl æqualis ld: erit & ol ipsi lp æqualis. quare elm circuli oep diameter erit. & quoniam linea ol linea ha æquidistat; & linea lm ipsi ax: angulus olm angulo hax est æqualis, rectus igitur est angulus

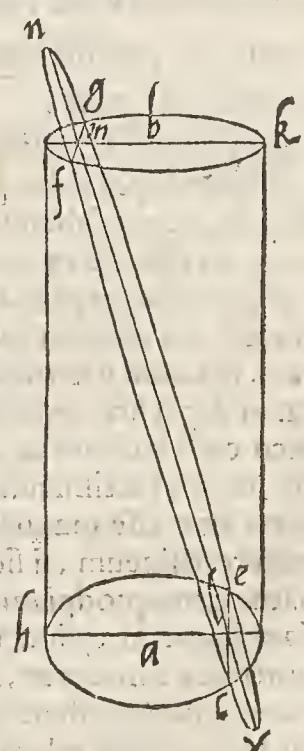
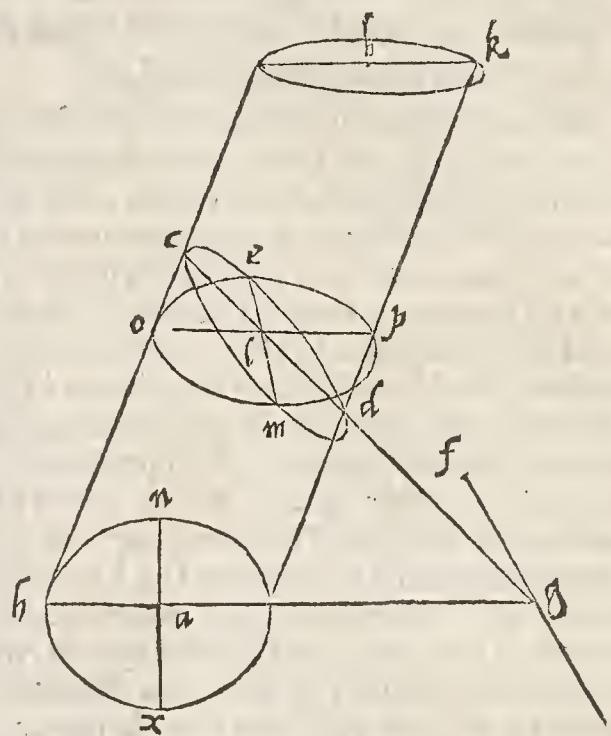
*10. unde
cimi*

B olm, & linea el perpendicularis ad op circuli diametrum. ex quo sequitur quadratum el æquale esse rectangulo olp. Quoniam autem sectio non est subcontraria, angulus loci angulo ocl æqualis non erit: & idcirco latus ol lateri cl inæquale. non igitur quadratum ol, hoc est rectangulum olp æquale est quadrato cl, hoc est rectangulo cl d. Sed rectangulo olp æquale est quadratum el. quare quadratum el non est æquale rectangulo cl d: & propterea sectio ced non est circulus. demonstratum autem est neque rectilineum esse. quæ quidem omnia demonstrasse oportebat.

C D Simil uero & illud demonstratum est rectam lineam, quæ in sectione ipsi fg æquidistans ducta bifariam diuidit cd, diametro basis æqualem esse.

Sed secet planum etiam ipsas bases, basim quidem a recta linea ce, ipsam uero b, recta fg: perq; a ducatur hal perpendicularis ad ce: & per ha diametrum, & axem ducatur planum, quod faciat sectionem hk parallelogrammum: plani autem fe, & hk parallelogrammi communis sectio sit lm. Quoniam igitur planum fe, neq; per axem ductum est,

E neque axi æquidistans; linea lm in infinitum protracta secabit ipsum axem. quare & lineam hn axi æquidistantem: utræque enim sunt in hk piano. secet in punto n, & producatur hn utramque in partem. Itaque si axe, & circulis manentibus ipsa hn circumferatur una cum diametris, quo usque redeat in eum locum, à quo moueri cœpit: cylindri superficies secundum altitudinem augabitur: & producto piano fe, augabitur etiam sectio usque in punctum n. Illud idem contingit & ex parte cl, erit ergo nge cylindri sectio, qualis in præcedenti theoremate. ex quibus sequitur neque circulum esse, neque rectilineum. Quare sectio cegf neque rectilineum est, neque circulus, neque portio circuli; sed erit sectio eiusmodi, cylindri sectionis portio.



COM

COMMENTARIUS.

QVONIAM igitur in superficie cylindri duo puncta c e sumuntur.] Cum enim positum sit cylindrum secari piano neque per axem ducto, neque axi æquidistante; non erunt dicta duo puncta in uno latere cylindri. Quare sequitur, ut quæ ea coniungit recta linea intra cylindri superficiem cadat, & non in ipsa superficie. quod in præmissa demonstratum iam fuit.

Rectus igitur est angulus o l m.] Est enim angulus h a x rectus, quod linea n x æquidistantia lineæ f g. quare & ipse o l m rectus erit.

Angulus l o c angulo o c æqualis non erit.] Ex ijs, quæ in sexta huius demonstrata sunt.

Simul uero & illud demonstratum est, rectam lineam.] Demonstratum namque est lineam e l m circuli o e p diametrum esse. ergo æqualis erit diametro basis, cum circuli o e p, h n x' sint æquales. quod & nos proxime ostendimus in commentarijs in quintam huius.

Linea l m in infinitum protracta secabit ipsum axem, quare & lineam h n axi æquidistantem.] Demonstrauit illud Vitellio in propositione secunda libri primi perspectivæ.

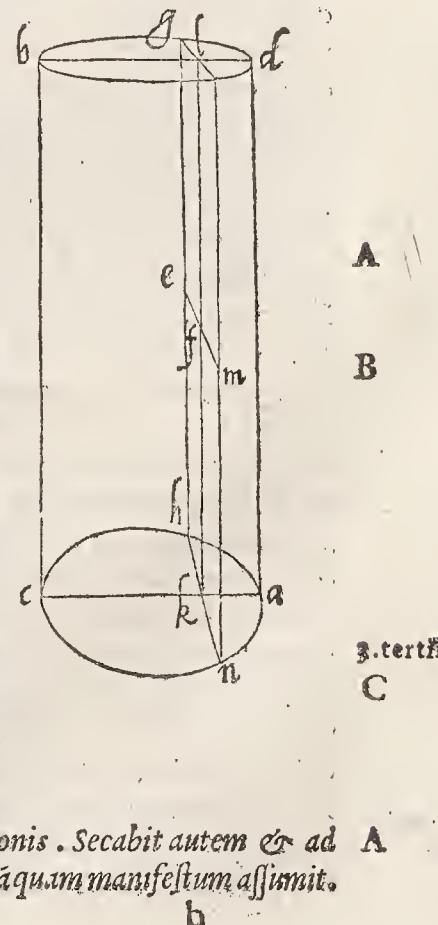
THEOREMA X. PROPOSITIO X.

SI cylindrus plano per axem secetur: sumatur autem aliquod punctum in eius superficie, quod non sit in latere parallelogrammi per axem: & ab ipso ducatur recta linea æquidistans rectæ cuiquam, quæ in eodem plano existit, in quo cylindri basi, & ad rectos angulos incidit basi parallelogrammi per axem: cadet ea intra parallelogrammum; & producita usque ad alteram partem superficiei ab ipso parallelogrammo bifariam secabitur.

SIT cylindrus, cuius bases a b circuli, & parallelogrammum per axem c d: sumatur autem aliquod punctum e in superficie cylindri: & ab ipso ducatur recta linea e f æquidistans rectæ cuiquam, quæ perpendicularis sit ad c a basim parallelogrammi per axem. Dico lineam e f intra c d parallelogrammum cadere; & si ulterius producatur usque ad alteram partem superficiei, ab ipso parallelogrammo bifariam secari. Ducatur enim per e linea h e g æquidistans axi, quæ basis circumferentiam secet in h; & per h ducatur h k æquidistans lineæ perpendiculari ad c a, cui etiam æquidistantem posuimus e f. ergo & h k ipsam c a secabit. Itaq; per rectas lineas g h, h k ducatur planum secans cylindrum, quod faciat sectionem parallelogrammum g n: & iungatur k l, communis sectio parallelogrammorum c d, n g. Quoniam igitur lineæ e f, h k uni, & eidem æquidistant; atque est h k in plano k g: & ipsa e f in k g plano erit. quare producta incident in l k, quæ est in eodemmet plano. linea igitur e f intra c d parallelogrammum cadet. Perspicuum autem est, si ad alteram partem producatur usque in punctum m, quod est in superficie cylindri; bifariam secari in f. nam cum diameter c a perpendicularis sit ad h k: erit h k ipsi k n æqualis. sed æquidistantes sunt lineæ m n, l k, g h. ergo m f ipsi f e æqualis erit.

COMMENTARIUS.

ERGO & h k ipsam c a secabit.] Ex secunda primi Vitellionis. Secabit autem & ad angulos rectos, ex uigesima nona primi elementorum, quod ipse postea tāquam manifestum assūmit.



S E R E N I L I B E R I.

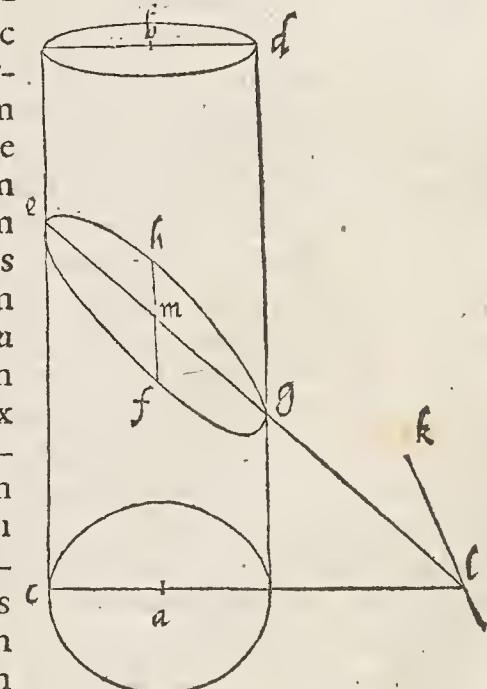
- B Quoniam igitur lineæ e f, h k uni & eidem æquidistant.] Lineæ e f, b k uni & eidem æquidistantes, & inter se æquidistabunt: & ducta e h linea, erunt utræque in eodem plano, in quo ipsa e h, hoc est in plano k g. quare producta e f incidet in l k æquidistantem ipsi g h, & in eodem existentem plano, ex secunda primi Vitellionis.
- C Ergo m f ipsi f e æqualis erit.] Aequidistant enim & ipsæ e m, b n, ut dictum est. quare parallelogramma sunt h f, f n. quod cum æquales sint h k, k n, & ipsæ e f, f m æquales erunt.

T H E O R E M A X I . P R O P O S I T I O X I .

S I cylindrus secetur plano, basis planum extra circulum secante: cōmunis autem planorum sectio perpendicularis sit ad basim parallelogrāmi per axem, uel ad eam, quæ in rectum ipsi constituitur: rectæ lineæ, quæ à sectione in superficie cylindri à secante plano facta ducuntur, æquidistantes lineæ perpendiculari ad basim parallelogrammi per axem, uel ad eam, quæ in rectum ipsi constituitur, in communem sectionem planorum cadent; & productæ usque ad alteram sectionis partem, à cōmuni planorum sectione bifariam diuidentur: quæ uero perpendicularis est ad basim parallelogrammi per axem, uel ad eam, quæ in rectum ipsi constituitur, cylindro recto existente, etiam ad communem planorum sectionem, parallelogrammi scilicet per axem, & secantis plani perpendicularis erit; scaleno autem existente cylindro non item, præterquam cum parallelogramnum per axem ad ipsam basim cylindri rectum fuerit.

S I T cylindrus, cuius bases quidem circuli a b; parallelogramnum autem per axē c d: & secetur plāno, ut dictū est, quod faciat sectionem e f g h, & basis a c cōmunis sectio sit recta linea k l, ad ipsam c a l perpendicularis: & à sectione e f g h ducatur linea f m æquidistans ipsi k l, quæ producta pertineat ad alteram partem superficie in puncto h. Dico lineam f m cadere in e g, & ipsi m h æqualem esse. Nam quoniam in sectione e f g h ducata est f m æquidistans k l; intra c d parallelogramnum cadet. Quoniam autem f m est in plāno e f g h, atque est e g communis sectio ipsius, & parallelogrammi c d: cadet f m in e g; & f m ipsi m h æqualis erit; quod patet ex antecedenti theoremate. Reliquum est ut ostendamus, si cylindrus rectus sit, uel planum c d rectum ad basim cylindri; lineam k l ad ipsam e g l perpendiculari esse. Quoniam enim c d planum ad planum basis rectum est; & k l in basis planum existens perpendicularis est ad c a l communem planorum sectionem, & ad reliquum ipsius c d parallelogrammi planum perpendicularis erit. Quod si planum c d non sit rectum ad basim, k l ad l e perpendicularis non erit. Si enim fieri potest, sit k l perpendicularis ad l e: est autem & ad l c perpendicularis. quare & ad planum, quod per ipsas transit; hoc est ad c d. planum igitur per k l, hoc est planum basis ad c d planum rectum erit: quod non ponitur. ergo k l ad l e non est perpendicularis.

4. unde.
18.



Ex

Ex iam demonstratis constat lineam eg sectionis e f g h diametrum esse: omnes enim; quæ ad ipsam ducuntur, æquidistantes linea k l, ut f h bifariam diuidit.

COMMENTARIUS.

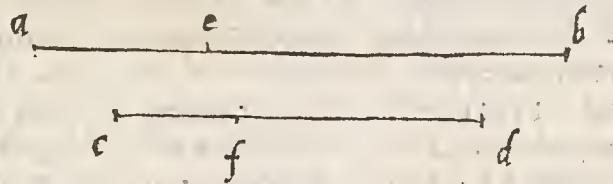
ET ad reliquum ipsius c d parallelogrammi planum perpendicularis erit.]
Nam cum planum c d rectum sit ad basis planum; linea k l, quæ est in eadem basi, perpendicularis ad c l communem planorum sectionem, & ad ipsum c d planum perpendicularis erit. quare & ad e g l, & ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano existentes ipsam contingunt.

4. diff. un
decimi
3. diff.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

Si duæ rectæ lineæ similiter secentur, erit ut quadratum primæ ad quadratum secundæ; ita quod fit ex primæ partibus rectangulum ad rectangle ex partibus secundæ.

Rectæ namque lineæ a b, c d similiter secentur in punctis e f. Dico ut quadratum a b ad quadratum c d, ita esse rectangle a e b ad rectangle c f d. Quoniam enim ut a e ad e b, sic c f ad f d; erit componendo, permutoandoq; ut a b ad c d, sic e b ad f d. & rursus quoniam ut a e ad e b, ita c f ad f d. rectangle a e b ad rectangle c f d duplam proportionem habebit eius, quæ est e b ad f d; hoc est, quæ a b ad c d. sed & quadratum a b ad quadratum c d duplam eius, quæ est a b ad c d proportionem habet. ergo ut quadratum a b ad c d quadratum, ita rectangle a e b ad rectangle c f d. quod demonstrandum proponebatur.



COMMENTARIUS.

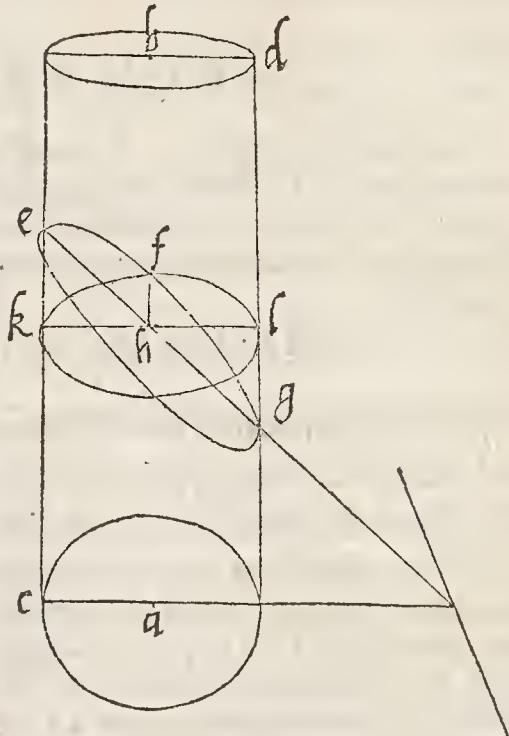
Rectangle a e b ad rectangle c f d duplam proportionem habet eius, quæ est e b ad f d.] Rectangle enim a e b, c f d similia sunt, quod latera habeant proportionalia. quare ex corollario uigesima sexti in dupla sunt proportione laterum similis rationis. habebit igitur rectangle a e b ad ipsum c f d dupla proportionem eius, quæ est e b ad f d, hoc est quæ a b ad c d. & eadem ratione quadratum a b ad c d quadratum duplam habebit eius. quæ est a b ad c d. quare ex undecima quinti sequitur rectangle a e b ad ipsum c f d esse, ut quadratum a b ad quadratum c d.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

Si cylindrus plano secetur per axem; & secetur altero plano basis planum secante, ita ut communis sectio basis, & secantis plani perpendicularis sit ad basim parallelogrammi per axem, uel ad eam, quæ in rectum ipsi constituitur: à sectione autem ad diametrum ducatur linea communis planorum sectioni æquidistans: poterit dicta linea spatium quoddam, ad quod rectangle diametri sectionis partibus contetur eam proportionem habet, quam diametri sectionis quadratum ad quadratum diametri basis.

S E R E N I L I B E R I.

SIT cylindrus, cuius bases ab circuli; & parallelogrammum per axem cd: secentur autem cylindrus plano occurrenti plano basis secundum rectam lineam, quæ ad ipsam ca productam sit perpendicularis: fitq; sectio facta efg, & communis sectio parallelogrammi cd, & secantis plani linea eg, diameter existens sectionis, ut ostensum est: sumpto deinde in sectione quovis puncto f, ab eo ad diametrum ducatur recta linea fh, æquidistans communi planorum sectioni. cadet fh ex ijs, quæ demonstrata sunt, in ipsam eg. Dico rectangulum ehg ad quadratum fh eam proportionem habere, quam diametri eg quadratum ad quadratum diametri basis. Ducatur enim per h linea khl æquidistans ipsi ca: & per fh, kl rectas lineas planum ducatur, quod faciat sectionem kfl. Itaque quoniam linea kl æquidistans est lineæ ca, & fh æquidistans communi planorum sectioni, quæ in basis plano existit: & quæ per ipsas transeunt plana inter se æquidistantia erunt. quare circulus est sectio kfl. Rursus quoniam xl ipsi ca est æquidistans; & fh æquidistans communi sectioni planorum, quæ perpendicularis est ad ca: erit & fh ad xl perpendicularis: est autem circulus kfl. ergo quadratum fh rectangulo khl æquale erit. & cum æquidistet ke ipsi lg, ut kh ad hl, ita est eh ad hg. ergo rectangulum ehg simile est rectangulo khl: & propterea ut rectangulum chg ad ipsum khl, hoc est ad quadratum fh, ita quadratum diametri eg ad quadratum kl, hoc est ad quadratum diametri basis.



C O M M E N T A R I V S.

A R V R S V S quoniam kl ipsi ca est æquidistans, & fh æquidistans communi planorum sectioni.] Sequitur ex his, & decima undecimi angulum fhl æqualem esse angulo, qui continetur communi planorum sectione, & linea ca. quare cum hic rectus sit, & ille necessario rectus erit; & linea fh perpendicularis ad kl, proportionalis erit inter kb, hl. quadratum igitur fh æquale est rectangulo khl.

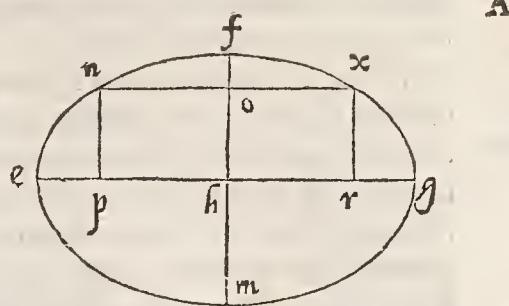
B Et cum æquidistet ke ipsi lg, erit ut kh ad hl, ita eh ad hg.] Triangulum enim ehk simile est triangulo ghl; quod anguli h ad uerticem æquales sint: qui uero ad kl recti. reliquo igitur angulus reliquo est æqualis: & ut kb ad he, ita hl ad hg: & permutando ut kb ad hl, ita eh ad hg. quare ex ijs, quæ in antecedenti theoremate demonstrata sunt, rectangulum ehg ad rectangulum khl, hoc est ad quadratum fh erit, ut quadratum eg ad quadratum kl; hoc est ut quadratum diametri sectionis eg ad quadratum diametri basis.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

Rectalinea, quæ per punctum, quod diametrum sectionis bifariam diuidit ordinatim in sectione applicatur, secunda diameter erit.

Sit sectionis efg diameter eg, quæ bifariam secetur in h: & fh in ordinatim applicetur. Dico fm secundam diametrum esse sectionis. Ducatur enim linea nox æquidistans eg: & ducantur np, xr ipsi fm æquidistantes. ergo & np, xr ordinatim applicatæ

plicatae sunt. Itaque quoniam quadratum $n p$ ad rectangulum $e p g$ eandem habet proportionem, quam quadratum diametri basis cylindri ad quadratum diametri sectionis; & habet quadratum $x r$ ad rectangulum $e r g$ hanc eandem proportionem: erit ut quadratum $n p$ ad rectangulum $e p g$, ita quadratum $x r$ ad rectangulum $e r g$. & permutando. est autem quadratum $n p$ æquale quadrato $x r$; parallelogramum enim est $n p r x$. ergo & rectangulum $e p g$ æquale est rectangulo $e r g$. & ablata sunt ab æqualibus quadratis $e h$, $h g$. quare reliquum quadratum $p h$ reliquo quadrato $h r$ æquale erit. æqualis igitur est $p h$ ipsi $h r$, hoc est $n o$ ipsi $o x$. Eadem ratione & aliæ omnes ipsi $e g$ æquidistantes ab $f m$ bifariam secabuntur. ergo $f m$ secunda diameter est sectionis.



C O M M E N T A R I V S.

Itaque quoniam quadratum $n p$ ad rectangulum $e p g$.] Ex antecedenti theorema-
te, & conuertendo. A

Et ablata sunt ab æqualibus quadratis $e h$, $h g$.] Est enim ex quinta secundi quadratum $e b$ æquale rectangulo $e p g$, & quadrato $p b$. Et eadem ratione quadratum $e b$, hoc est $h g$ æqua-
le rectangulo $e r g$, & quadrato $h r$. quare si à quadrato $e b$ auferatur rectangulum $e p g$, & ab ipso $h g$ quadrato auferatur $e r g$ rectangulum æquale ipsi $e p g$, ut demonstratum est: erit reliquum reliquo æquale, hoc est quadratum $p h$ quadrato $h r$. & idcirco linea $p h$ ipsi $h r$ æqualis erit. B
22. sexti

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Si cylindrus planio secetur basis planum secante; communis autem seccio plani basis, & secantis plani perpendicularis sit ad basim parallelogrammi per axem, uel ad eam, quæ in rectum ipsi constituitur: quæ à sectione ad diametrum ducitur linea, æquidistans communi planorum sectioni iam dictæ, poterit spatium quoddam, ad quod rectangulum diametri partibus contentum eam proportionem habet, quam diametri sectionis quadratum ad quadratum secundæ diametri: quæ uero à sectione ad secundam diametrum ducitur, æquidistans diametro, poterit spatium, ad quod rectangulum ex secundæ diametri partibus eam habet proportionem, quam quadratum secundæ diametri ad ipsum diametri quadratum.

Sit cylindrus, & construantur omnia, sicut in decimo tertio theoremate. Quoniam igitur ostensum est, rectangulum $e h g$ ad quadratum $f h$ ita esse, ut quadratum $e g$ ad quadratum diametri basis, hoc est ad quadratum eius, quæ ordinatim applicata bifariam secat ipsam $e g$, ut demonstratum est in nono theoremate. quæ autem ordinatim applicatur; & bifariam diametrum secat, secunda diameter est, ex præce-
denti theoremate. ergo ut quadratum diametri $e g$ ad quadratum secundæ diametri, ita rectangulum $e h g$ ad quadratum $f h$: quod ostendisse oportebat. Sed ponatur punctum h bifariam secare diametrum $e g$, & lineam $f h$ u ordinatim applicatam: erit $f h$ secunda diameter. ducatur autem ad ipsam linea $m n$ æquidistans $e g$. Dico rectangulum $u n f$ ad quadratum $m n$ eam proportionem habere, quam quadratum $u f$ secundæ diametri ad quadratum diametri sectionis $e g$. Ducatur per lineam $m n$ planum æquidistans parallelogrammo $c d$, per axem cylindrū secanti. faciet id se-
ctionem parallelogramnum, quod sit $r s$: & communes sectiones ipsius, & æquidi-

3. huius

stantium planorum sint st, xo, pr: ipsius uero, & plani sectio-
nis efg communis sectio mn. Itaque quoniam æquidistan-
tia plana cd, rs secantur à plano k fl: communes eorum se-
ctiones æquidistantes erunt. æquidistans est igitur h k ipsi n x.
erat autem & h e ipsi n m æquidistans. ergo angulus k h e
æqualis est angulo x n m: & cum parallelogrammum sr pa-
rallelogrammo cd æquiangulum sit, quod demonstrauimus
in tertio theoremate; angulus s p r angulo e c a æqualis erit,
hoc est sxo ipsi e k h. Similia igitur triangula sunt e k h,
m x n. quare ut kh ad he, ita xn ad nm, & ut quadratum kh
ad quadratum he, hoc est ut quadratum uf secundæ diametri
ad quadratum diametri eg, ita quadratum xn ad nm quadra-
tum. Sed quadratum xn æquale est rectangulo unf, quod
k fl circulus sit, & hf perpendicularis ad kh, xn. ut igitur
quadratum uf secundæ diametri ad quadratum diametri eg,
ita rectangulum unf ad quadratum mn. quod proposuimus
demonstrandum.

10. unde.
4. sexti.
22.
15. quinti
g. & 17. se-
xti

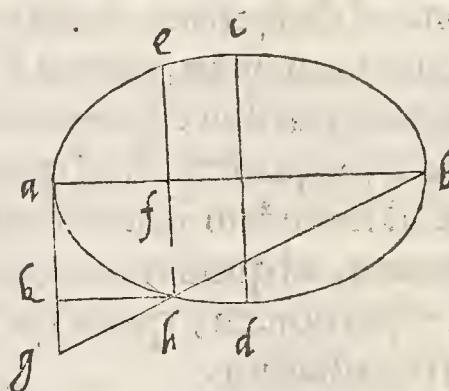
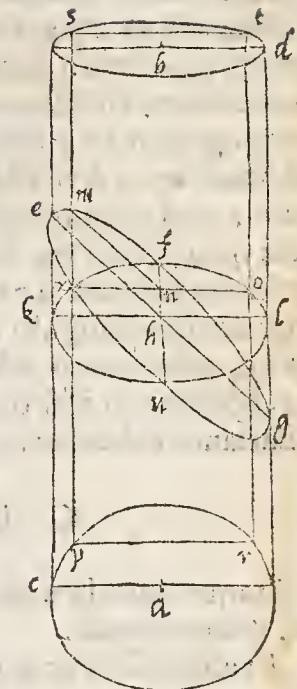
THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

Si in cylindri sectione coniugatæ diametri sint, & fiat, ut dia-
meter sectionis ad secundam diametrum, ita secunda diameter ad aliam
quampiam: quæ à sectione ad diametrum ordinatum applicata est, pote-
rit spatium, quod adiacet tertiae proportionali, latitudinem habens eam,
quæ inter ordinatum applicatam & sectionem interiicitur; & deficiens
figura simili ei, quæ diametro ipsa & tertia proportionali continetur.

Sit cylindri sectio, cuius diameter quidem ab, secunda uero diameter cd, & fiat ut
ab ad cd, ita cd ad ag: apteturq; ag
ipsi ab ad rectos angulos: & iuncta
bg applicetur cf ordinatum ad ab: &
ducatur fh ipsi ag æquidistans, & hk
æquidistans af. Dico quadratum ef
æquale esse rectangulo ah. est enim ut
quadratum ab ad cd quadratum, ita
linea ab ad ipsam ag, hoc est bf ad
fh: ut autem quadratum ab ad qua-
dratum cd, ita rectangulum bfa ad
quadratum ef. & ut bf ad fh, ita bfa
rectangulum ad rectagulum hfa; hoc
est ad ah rectangulum. quadratum igi-
tur ef æquale erit rectagulo ah; quod
quidem adiacens tertiae proportionali ag latitudinem habet af, & deficit figura gkh,
ipsi ga b simili. Vocetur autem ab transuersum figuræ latus, & ag latus rectum.

B. Ex quibus manifeste constat, cylindri sectionem abc ellipsem esse.

Quæcunque enim hoc loco demonstrata sunt inesse ipsi sectioni, omnia similiter &
coni ellipsi insunt, ut demonstratum est in elementis conicis, theoremate quinto de-
cimo, iis, qui eius theorematis vim diligenter percepint. & nos in nostris in idip-
sum commentariis geometrice demonstrauimus.



C O M M E N T A R I V S.

A. Est enim ut quadratum ab, ad cd quadratum, sic linea ab ad ipsam ag.] Cum
enim

enim sint tres linea proportionales $a b, c d, a g$, erit ut quadratum $a b$ ad quadratum $c d$, ita linea $a b$ ad lineam $a g$, hoc est $b f$ ad $f b$, quoniam triangulum $b f h$ simile est triangulo $b a g$: & ex antecedente ut quadratum $a b$ ad quadratum $c d$, ita rectangulum $b f a$ ad quadratum $e f$. quare rectangulum $b f a$ ad quadratum $e f$ est, ut $b f$ ad $f b$. Ut autem $b f$ ad $f b$, ita & $b f a$ rectangulum ad rectangulum $b f a$, hoc est ad rectangulum $a b$. ergo quadratum $e f$ rectangulo $a b$ aequalis erit.

cor. 20. se
xti
4. sexti.
11. quinti
1. sexti
9. quinti.

Ex quibus manifeste constat, cylindri sectionem $a b c$ ellipsem esse.] Sumit hoc loco B Serenus in ellipsi lineam, iuxta quam possunt, que à sectione ad diametrum ordinatum applicantur, esse eam, ad quam secunda diameter eandem proportionem habet, quam diameter ad ipsam secundam diametrum. quod quidem dicit elici posse ex quintadecima primi conicorum Apollonij, si quis diligenter eius theorematis vim introspiciat, additq; se id ipsum demonstrasse in suis in Apollonium commentarijs. Sed quoniam ea ad manus nostras non peruererunt, nos illud idem tentabimus. Apollonij uestigij insistentes.

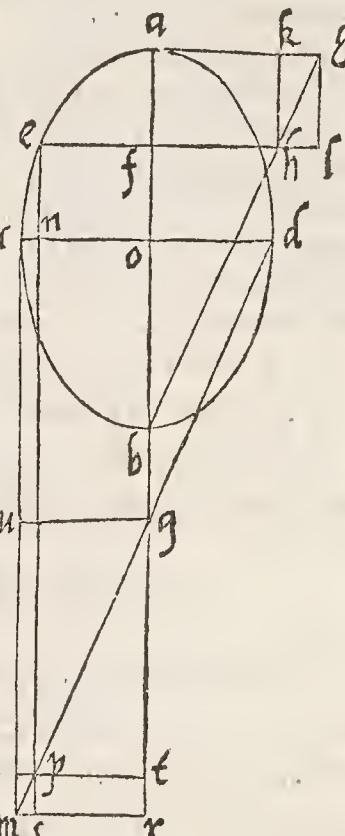
Sit ellipsis, cuius diameter $a b$, secunda diameter $c d$: & fiat ut $a b$ ad $c d$, ita $c d$ ad $a g$, quæ in puncto a aptetur ipsi $a b$ ad angulos rectos: & iungatur $b g$. sumpto autem in ellipsi puncto c , ab eo ad diametrum ordinatum applicetur $e f$; & $a b f$ ad $b g$ ducatur $f h$ aequidistans ipsi $a g$. deinde à punctis $b g$ aequidistantes ipsi $a f$ ducantur $b k$, quidem ad $a g$; $g l$ uero ad ipsam $f h$ protractam. Dico quadratum lineæ $e f$ aequalis esse rectangulo $a f h$, quod adiacet tertiae proportionali $a g$, latitudinem habens $a f$, & deficiens figura $g l b$ simili ei, quæ $b a g$ continetur. fiat enim ut $c d$ ad $a b$, ita $a b$ ad $c m$: ponaturq; $c m$ ad angulos rectos ipsi $c d$: & iungatur $m d$. à puncto autem e ad $c d$ ordinatum applicetur $e n$, & $a b n$, & à centro ellipsis, ubi est punctum o , ad $m d$ ducantur $n p, o q$ aequidistantes ipsi $c m$; completoq; parallelogrammo $c m r o$, producatur $n p$ usque ad $m r$ in punctum s . denique per $p q$ aequidistantes ipsi $c d$ ducantur $p t$ ad $o r$, & $q u$ ad $c m$. erit quadratum $d o$ aequalis rectangulo $c q$, ex ijs, quæ demonstrata sunt ab Apollonio in quinta decima propositione iam dicta. Et quoniam ut $d o$ ad $c m$, ita $d o$ ad $o q$, & $q u$ ad $u m$: atque est $d o$ ipsi $o c$ aequalis, hoc est ipsi $q u$: & $o q$, hoc est $c u$ ipsi $u m$ aequalis erit. quare rectangulum $c q$ aequalis est rectangulo $u r$, & rectangulum $n u$ ipsi $u s$. Et cum rectangula $u p$, $p r$ inter se aequalia sint, apposito utriusque communi $m p$, erit $u s$ aequalis $m t$. Sed $u s$ demonstratum est aequalis ipsi $n u$. ergo $n u, m t$ aequalia sunt: & rursus communi apposito $u t$, totum $m q$, hoc est $q c$ aequalis utrisque $c p, p q$. quare $q c$ excedit $c p$ ipso $p q$, quod continentur $p t q$. est autem $c q$ quadrato $a o$ aequalis, & $c p$ aequalis quadrato $e n$. Quadratum igitur $a o$ excedit quadratum $e n$ rectangulo $p t q$. Itaque quoniam $a b$ secatur in partes aequales in o , & in partes inaequales in f ; erit rectangulum $b f a$ una cum quadrato $f o$, hoc est $e n$ aequalis quadrato $a o$. & præterea quadratum $a o$ excedet quadratum $e n$, rectangulo $b f a$. Excedebat autem ipso $p t q$ rectangulo. quare rectangulum $p t q$ aequalis est ipsi $b f a$. Præterea quoniam ut $a b$ ad $c d$, ita $c d$ ad $a g$: erit ut $b a$ ad $a g$, ita quadratum $a b$ ad quadratum $c d$, hoc est quadratum $a o$ ad quadratum $o d$. est autem quadrato $a o$ aequalis rectangulum $q o c$, hoc est $q o d$. ut ergo $b a$ ad $a g$, hoc est $b f$ ad $f b$, hoc est rectangulum $b f a$ ad rectangulum $a f h$, ita rectangulum $q o d$ ad quadratum $o d$, hoc est rectangulum $q t p$ ad quadratum $t p$. At rectangulum $q t p$ aequalis est rectangulo $b f a$, ut demonstratum est. quare quadratum $t p$, hoc est quadratum $e f$ rectangulo $a f h$ aequalis erit. ex quibus sequitur lineam $a g$ eam esse, iuxta quam possunt, que à sectione ad diametrum ordinatum applicantur. quod demonstratum uolebamus.

4. sexti
1. sexti
43. primi.

5. secundi

cor. 20. se
xti
15. quinti.

9. quinti



THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

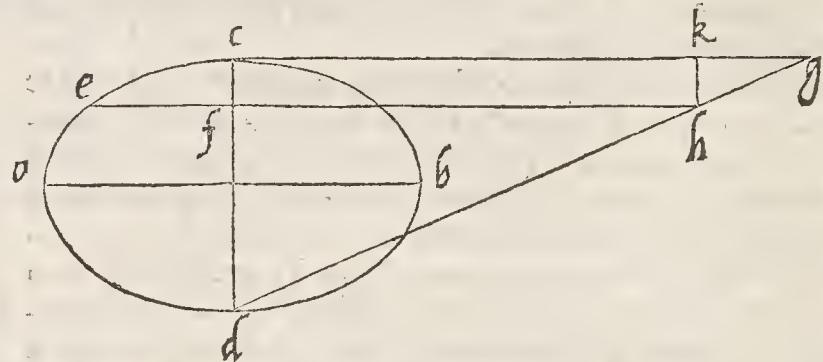
Si in cylindri sectione coniugatae diametri sint; & fiat ut secunda diameter ad diametrum, ita diameter ad aliam lineam: quæ à sectione

ad secundam diametrum ordinatim applicatur poterit spatium, quod adiacet tertiae proportionali, latitudinem habens eam, quæ inter ordinatim applicatam, & sectionem interiicitur; & deficiens figura simili ei, quæ secunda diametro, & tertia proportionali inuenta continetur.

Sit cylindri sectio a b c d: & fiat ut c d secunda diameter ad diametrum a b, ita a b ad c g: ponaturq; c g ad rectos angulos ipsi c d; & d g iungatur. deinde ad c d ordinatim applicetur e f: & ducatur f h quidem ipsi c g æquidistant; h k uero æquidistant c d. Dico quadratum e f parallelogrammo ch æquale esse. Quoniam enim ut quadratum c d ad quadratum a b, ita linea d c ad ipsam c g, hoc est d f ad f h. Sed ut quadratum c d ad quadratum a b, ita rectangulum d f c ad quadratum e f; quod demonstratum iam est. ut autem d f ad f h, ita rectangulum d f c ad rectangulum h f c, ergo quadratum e f æquale est rectangulo ch, quod quidem adiacet tertiae proportionali c g, latitudinem habens f c, & deficiens figura h k g simili ei, quæ d c g continetur.

15. huius
1. sexti.

9. quinti



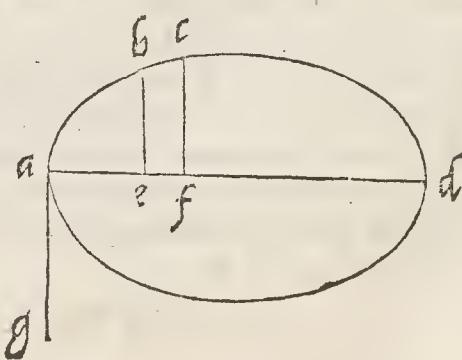
Hæc autem manifestissime insunt ellipsi, ut ex quinto decimo theoremate conicorum apparet. Quare sequitur sectionem cylindri a b c d necessario ellipsoidem esse.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si in sectione cylindri rectæ lineæ ad diametrum ordinatim applicentur, erunt quadrata earum ad spatia contenta lineis, quæ inter ipsas, & terminos transuersi lateris figuræ interiiciuntur, ut rectum. figuræ latus ad transuersum: inter se se uero, ut spatia, quæ lineis similiter sumptis continentur.

15. huius

Sit cylindri sectio a b c d, cuius diameter quidem, & transuersum figuræ latus ad: rectum uero latus a g: & ad ipsam a d ordinatim applicentur b e, c f. Dico quadratum b e ad rectangulum a e d ita esse, ut g a ad a d. & quadratum b e ad c f quadratum, ut rectangulum a e d ad rectangulum a f d. Quoniam enim ut quadratum secundæ diametri ad diametri quadratum, ita est quadratum b e ad rectangulum a e d: & a g rectum latus ad transuersum a d: erit ut rectum latus ad transuersum, ita b e quadratum ad rectangulum a e d: & ita similiter quadratum c f ad rectangulum a f d. quare & permutoando ut quadratum b e ad c f quadratum, ita erit rectangulum a e d ad rectangulum a f d. quod demonstrandum proponebatur. Ethæc in ellipsi contingere demonstratum est in conicis elementis, theoremate uigesimo primo. quamquam & ex aliis multis sectiones easdem esse ostendere possumus per ea, quæ ipsis communiter accidunt. Verum principaliora accidentia ferè dicta sunt. & cum hucusque progressus fuerim, non ad me attinet eorum, quæ relinquuntur singula persequentem in alienis uersari: necesse est enim eum, qui de ellipsi

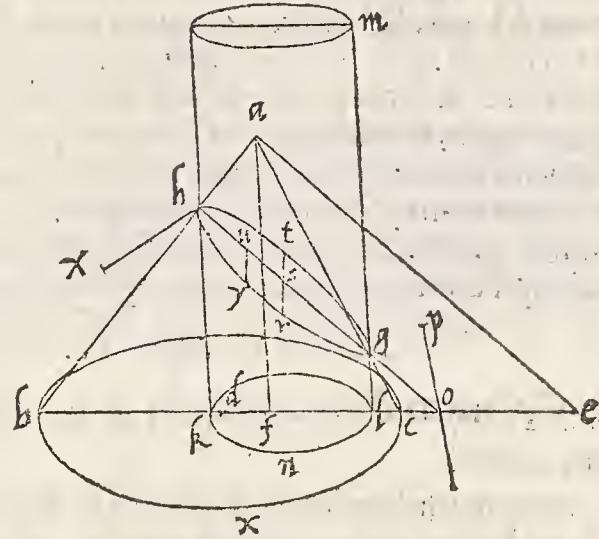


lipsi subtiliter disputare uelit, in medium afferre quæcumque de ipsa ab Apollonio Pergeo conscripta fuerunt. Sed si cui forte placeat ulterius contemplari, licebit hæc comparare cum ijs, quæ in primo conicorum libro traduntur: & ex eo illud quod proposum est concludere. etenim quæcumque in illis contingunt circa coni sectionem, quæ ellipsis appellatur, eadem & circa sectionem cylindri contingere ex ijs, quæ hoc loco demonstrata sunt, facile intelliget. quare ab his abstinen, cum lemmatia nonnulla apposuero, quæ sectiones easdem esse quodammodo ostendunt, ad alia me conuertam.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

Itaque dico fieri posse, ut conum simul & cylindrum una eademq; ellipsis sectos ostendamus.

Exponatur triangulum scalenum a b c in basi b c, quæ bifariam in d secetur, sitq; a b maior, quam a c: & ad rectam lineam c a, & ad a punctum constituatur angulus c a e, qui uel maior sit angulo a b c, uel minor. occurrat autem a e lineæ b c e in punto e: & inter b e, e c media proportionalis sit e f: iuncta q; a f, ducatur in triangulo linea h g ipsi a e æquidistans: & per puncta h g ducantur h k, l g m æquidistantes a f: & compleatur parallelogrammum k m. deinde per lineam b e ducto piano ad rectos angulos ipsi piano b a e, describatur in eo circa diametrum quidem k l circulus k n l, qui cylindri basis erit, & eius parallelogrammum per axem k m: circa diametrum uero b c describatur circulus b x c pro basi coni, cuius triangulum per axem sit a b c: & protracta h g ad o, ducatur in circorum piano linea o p ad rectos angulos ipsi b e: perq; o p, o h ducatur planum, quod faciet sectionem in cono, cuius basis circulus b x c. sit autem ea seccio h r g. ergo recta linea h g diameter est sectionis: qua quidem bifariam diuisa in s, ad ipsam ordinatim applicetur secunda diameter r s t, & alia quævis y u: fiatq; ut quadratum h g diametri tri sectionis h r g ad quadratum r t secundæ diametri eiusdem sectionis, ita gh transuersum figuræ latus ad rectum h x. Quoniam igitur h k quidem ipsi a f æquidistat; h o uero æquidistat a e: erit ut quadratum a e ad quadratum e f, ita h o quadratum ad quadratum o k. sed ut quadratum a e ad rectangulum b e c, hoc est ad quadratum e f, ita quadratum h g diametri sectionis coni ad quadratum r t secundæ diametri eiusdem sectionis. ut autem quadratum h o ad quadratum o k, ita quadratum h g ad quadratum k l, hoc est ita quadratum h g diametri sectionis cylindri ad quadratum secundæ diametri eiusdem cylindri sectionis, sicut demonstratum est superius. quare secunda diameter sectionis cylindri æqualis est ipsi r t secundæ diametro sectionis coni: diuiditurq; h g bifariam in puncto s, & ipsi ad rectos angulos ducitur secunda diameter cylindri sectionis, quemadmodum & ipsa r t. ergo r t secunda diameter est tum coni, tum cylindri sectionis. similiter & h g est diameter coni sectionis & cylindri: & propterea punctum r in coni, & cylindri superficie erit. Rursus quoniam in sectionibus coni & cylindri eadem diametri sunt h g, r t: & tertia proportionalis eadem erit, hoc est h x rectum latus figuræ. quare h x & in cylindri sectione rectum est figuræ latus. Quoniam igitur ut g h ad h x, ita rectangulum g u h ad quadratum u y: atque ostensum est in cylindri sectione, ut transuersum figuræ latus ad rectum, ita rectangulum diametri partibus cōtentum ad quadratum eius, quæ ad ipsam ordinatim applicata partes efficit; erit & in cylindri sectione ut g h transuersum figuræ latus ad h x rectum, ita rectangulum g u h ad quadratum lineæ



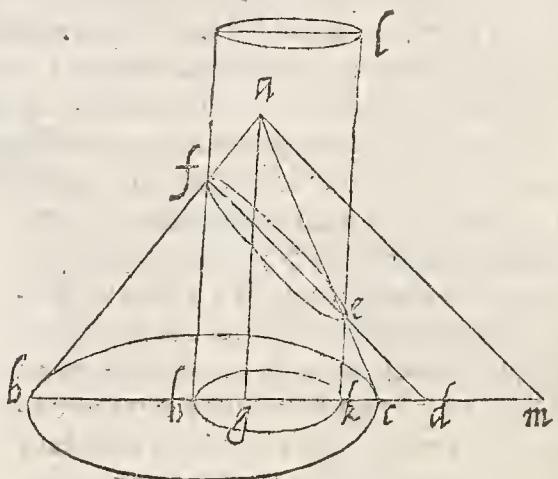
SERENI LIBER I.

æqualis y u, & ad angulos æquales ductæ ad h g. sed linea æqualis y u, & ad æquales angulos ad ipsam ducta in punctum u, non alia est ab ipsa y u. ergo y u & in cylindri sectione erit; ac propterea punctum y in coni superficie existens, & in cylindri erit superficie. Similiter demonstratio fiet & in alijs, quæ ad ipsam ordinatim applicabūtur. linea igitur h r g in superficiebus utrarumque figurarum continetur. quare una eademq; sectio est in utrisque figuris. præterea quoniam angulus c a e, uidelicet a g h factus est, uel maior, uel minor angulo, qui ad b; sectio non erit subcontraria: ideoq; h r g non est circulus; ellipsis igitur. quare coni expositi, ac cylindri sectio eadem ellipsis erit. quod oportebat demonstrare.

PROBLEMA I. PROPOSITIO XX.

Cono dato, & ellipsi, in eo cylindrum eadem ellipsis coni sectum inuenire.

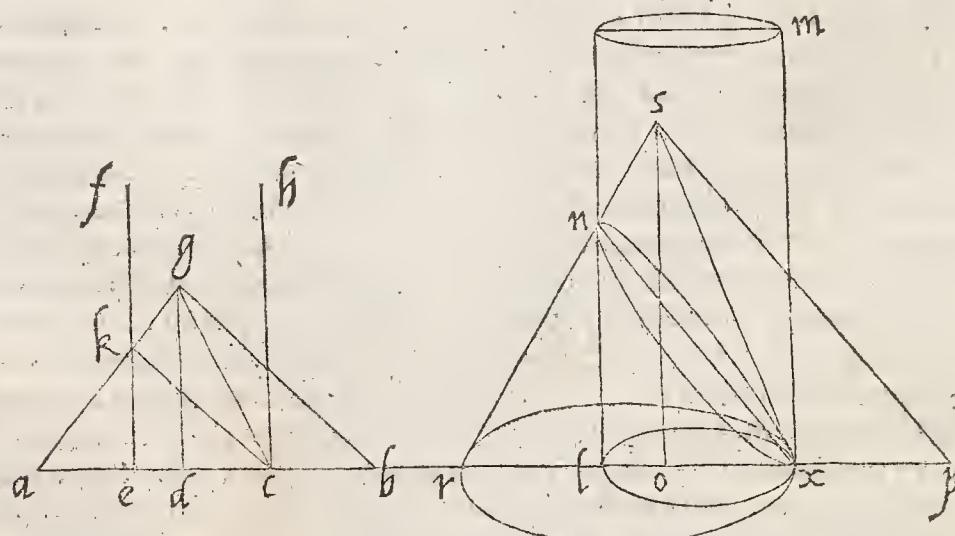
SIT datus conus, cuius per axem triangulum sit a b c: & data in ipso ellipsis, cuius diameter f e; quæ protrahatur ad d: & ipsi f d æquidistans ducatur a m: interq; b m, m c proportionalis sit m g: & iuncta a g, per puncta f e ducantur f h, k e l; quæ ipsi a g æquidistant: & compleatur parallelogrammum h l. Itaque si intelligamus cylindrum, cuius basis quidem sit circulus circa diametrum h k: parallelogrammum uero per axē h l: erit & in ipso cylindro sectio, cuius diameter f e: & similiter, atque in antecedenti theoremate, deinceps strabimus secundam diametrum eandem esse; & item omnes, quæ ad diametrum ordinatim applicantur. Inuentus igitur est cylindrus, qui secatur data ellipsis coni dati. quod facere oportebat.



PROBLEMA II. PROPOSITIO XXI.

Cylindro dato & ellipsi, in eo conum eadem ellipsis cylindri sectum inuenire.

Exponatur seorsum recta linea a b: & in ea sumatur quodvis punctum d: fiatq; ut a b ad b d, ita d b ad b c: ut autem a b ad b c, ita a d ad d e. & à punctis e d c attol-



lantur rectæ lineæ e f, d g, c h, quæ cum ipsa a b quemlibet angulum contineant: & in-

ret

ter se se æquidistant. deinde per c ducatur recta linea c k secans e fd g: iunctaq; a k conueniat cum d g in puncto g:& iungatur g b. His igitur seorsum in hunc modum constitutis, sit datus cylndrus, cuius parallelogrammum per axem l m; & datae in eo ellipsis diameter sit n x: seceturq; l x basis parallelogrammi in eandem proportionem, in quam secta est e c:& sit ut e ad d ad c, ita l o ad o x. Rursus fiat ut e c ad c b, ita l x ad x p: ut autem c e ad e a, ita x l ad l r: & per o ducatur o s æquidistans parallelogrammi lateribus: ductaq; r n conueniat cum o s in s: & iungantur s p, s x. quoniam igitur recta linea r p similiter secta est, atque a b; erit ut r p ad p o, ita o p ad p x. sed ut r p ad p x, ita r o ad o l, hoc est ita r s ad s n. æquidistat igitur s p ipsi n x. quod si intelligamus conum, cuius quidem basis sit circulus circa diametrum r x, triangulum uero per axem s r x; erit & in eo sectio, cuius diameter n x. Eodem modo, quo supra, demonstrabitur & secundam diametrum eandem esse, & omnes, quæ ad diametrum ordinatim applicantur. conus igitur sectus est eadem ellipsi dati cylindri, quod fecisse oportuit.

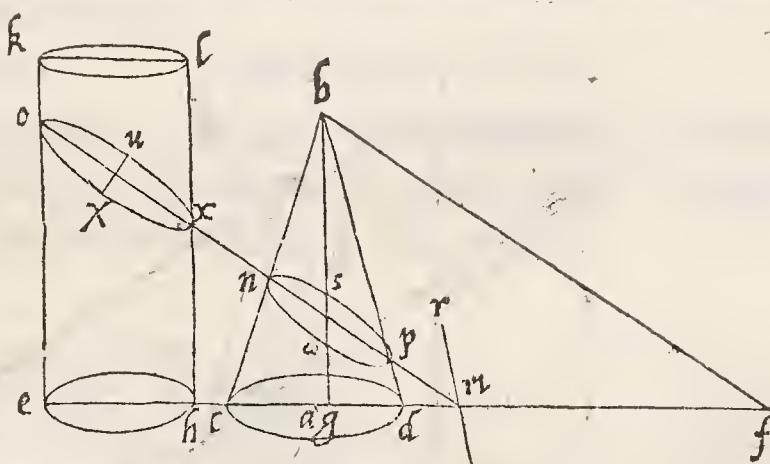
COMMENTARIUS.

Fiatq; ut a b ad b d, ita d b ad b c: ut autem a b ad b c, ita a d ad d e.] Hunc locum nos restituimus, nam in græco codice non nulla desiderabantur.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XXII.

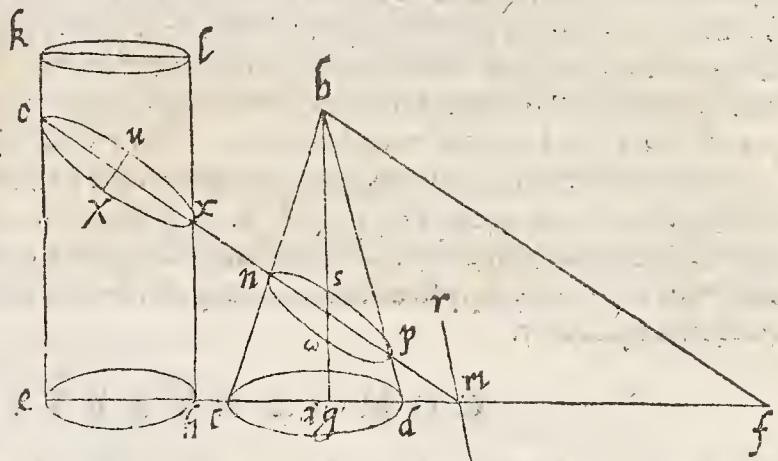
Cono dato inuenire cylindrum, & utrosque eodem plano secare, quod sectiones in utrisque similes ellipses efficiat.

SIT conus datus, cuius basis quidem circulns circa centrum a; uertex b. punctū: triangulum uero per axem c b d ad basim coni rectum: producaturq; in utrāque partem a c e, a d f: & ad rectam lineam d b, & ad b punctum in ipsa constituatur angulus d b f, uel maior, uel minor ipso b c d: atque inter c f, fd media proportionalis sumatur fg: & b g iungatur: cylndri autem quæsiti basis sit, uel circulus a, uel alias aliquis in eodem plano existens, nihil enim differt. Itaque sit is circulus circa diametrum e h: & per puncta e h ipsi b g æquidistantes ducātur e k, h l. in eodem igitur plano sunt, in quo triangulum c b d. & quoniam b f fecat b g, si producatur secabit etiam omnes, quæ ipsi b g æquidistant, in infinitum productas. & similiter ipsi b f æquidistantes secabūt eas, quæ æquidistant b g. ducatur m n, quæ ipsi b f æquidistet: & producta secet h l e k in punctis x o: ipsi uero e h æquidistans ducatur k l: & circa k l diametrum circulus describatur æquidistans ei, qui est circa e h: intelligaturq; cylndrus, cuius bases quidem circuli e h, k m; parallelogrammum uero per axem k h, quod & ad basim rectum est. Si igitur per m ducatur linea m r ad rectos angulos ipsi c d f basi, quæ sit in eodem plano, in quo circulus a: & per lineas m r, m o planum ducatur; faciet id sectionem in cono quidem ellipsem n s p, cuius diameter n p: in cylndro uero ellipsem o u x, cuius diameter o x. Dico ellipsem n s p ipsi o u x similem esse. quoniam enim o m, b f inter se æquidistant: itemq; æquidistant e k, h l, b g, & linea e f communiter omnes secat; erit ut o m ad m e, hoc est ut o x ad h e, ita b f ad f g. quare ut quadratum o x ad quadratum h e,



S E R E N I L I B E R . I.

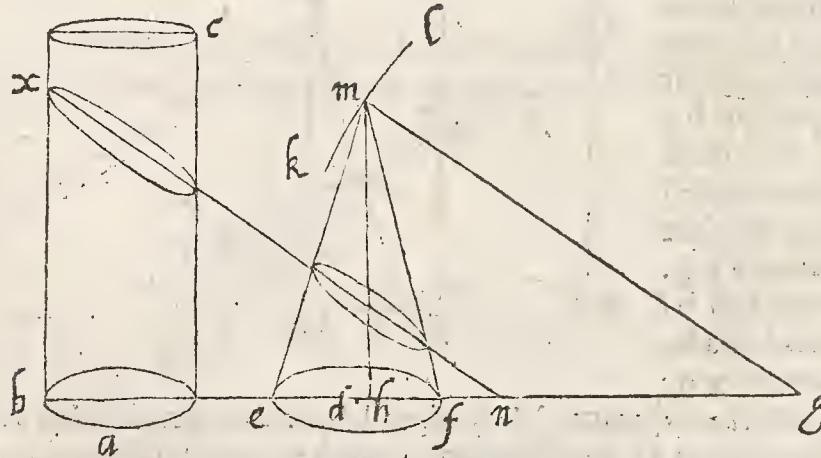
ita $b f$ quadratum ad quadratum fg , hoc est ad rectangulum $c fd$. sed ut quadratum ox diametri ad quadratum he , ita quadratum diametri ox ad quadratum coniugatum diametri, uidelicet ux . ut autem quadratum bf ad rectangulum cfd , ita quadratum diametri np ad quadratum coniugatum diametri $s\omega$. ergo ut quadratum ox ad quadratum ux , ita quadratum np ad $s\omega$ quadratum: ac propterea ut ox ad coniugatum diametrum ux , ita np ad diametrum coniugatum $s\omega$. At uero diametrum ox secare ux ad rectos angulos; itemque np similiter secare $s\omega$ manifeste apparet; quoniā xu , ωs & inter se se, & ipsi mr æquidistantes recta linea mo secat. sectio igitur ou x similis est sectioni nsp : & neutra earum est circulus, quippe cum sectio subcontraria non sit. angulus enim dbf , uidelicet bpn non est æqualis angulo bcd . quare utraque sectionum ou x , nsp ellipsis erit; & sunt similes inter se se. quod fecisse oportebat.



PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XXIII.

Cylindro dato inuenire conū, & utrosque secare eodem plano, quod sectiones faciat in utrisque ellipses similes.

S I T cylindrus datus, cuius basis circulus a ; & parallelogrammum per axem bc , ad basim rectum: & producatur ba . coni uero quæsiti basis sit, uel circulus a , uel aliis aliquis in eodem existens piano, ut qui est circa diametrum ef , cuius centrum d . & sumpto quovis punto g in linea fg , inter eg , gf media proportionalis sit gh : & centro g , inter ualorūq; uel maiore, uel minore, quam sit gh , describatur in piano bc



circuli circumferentia kl , perq; h ducatur hm parallelogrammi $b c$ lateribus æquidistantibus: & iungantur me , mf , mg . postea ducatur nx ipsi mg æquidistantis, quæ triangulum, & parallelogrammum secet. Itaque si per nx eodem modo, quo ante dictū est, planum ducatur, sectio in utroque similis erit. demonstratio autem eadem, quæ supra: uerum sectiones ellipses esse, non circulos perspicue constat; quadratum enim mg factum est uel maius, uel minus quadrato gh , hoc est rectangulo egf .

COM-

COMMENTARIUS.

PER QVB h ducatur h m parallelogrammi b c lateribus æquidistans.] Hoc est ducatur à puncto b linea ad circuli descripti circumferentiam in punctum m, quæ lateribus parallelogrammi b c sit æquidistans. ut autem hoc fiat, licet semper interuallum sumere maius, quam g b, minus non item, nisi cum cylindrus scalenus fuerit, & ita inclinatus ad partes coni, ut illud ipsum, quod diximus perfici possit. Itaque oportet interuallum uel maius esse, uel minus ipsa g b: nam si sumeretur æquale, sectiones subcontrariaæ essent: & idcirco non ellipses, sed circuli in sectione gignentur.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXIIII.

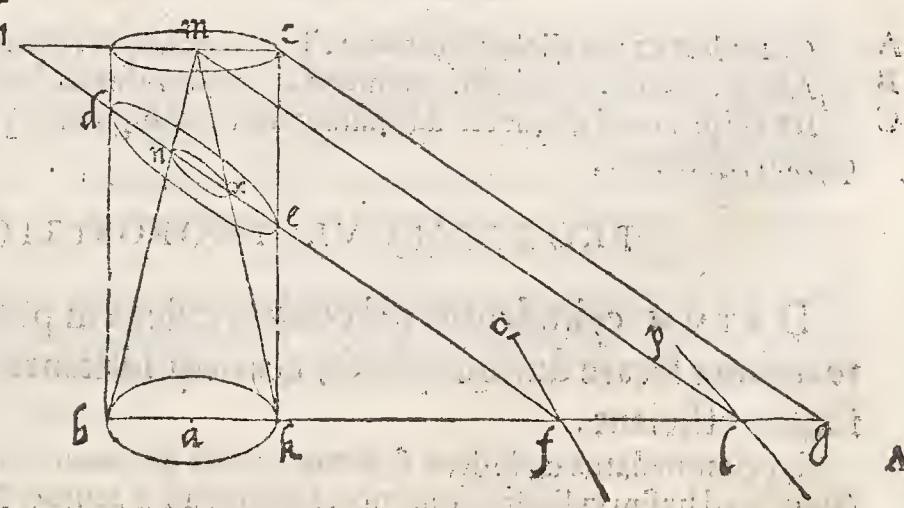
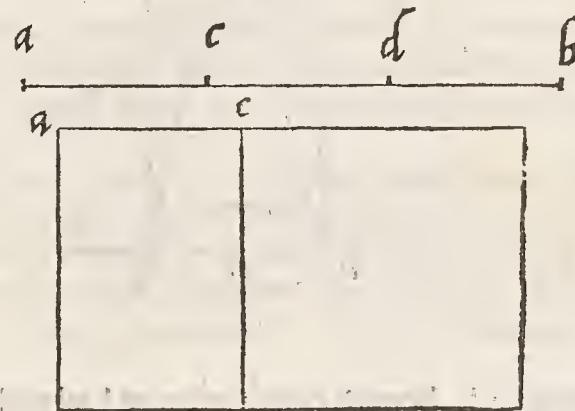
SIT rectalinea a b, quæ secetur in punctis c d, & non sit a c maior, quam d b. Dico si ad a c comparetur spatium æquale quadrato c b, excedens figura quadrata; latus excessus maius quidem esse, quam c d; minus uero, quam c b.

Si enim fieri potest, ponatur c d primum latus esse excessus. & quoniam id, quod ad a c comparatur, excedens quadrato c d; idem est quod rectangulum a d c: est autem & æquale quadrato c b: erit rectangulum a d c quadrato c b æquale. Sed quadratum c b non est minus quadrato a d. cum enim d b non sit minor, quam a c; neque erit c b minor, quam ipsa a d. rectangulum igitur a d c quadrato a d non est minus; quod fieri non potest. Idem absurdum sequitur, si latus excessus ponatur minus, quam c d. Sed rursus sit c b excessus latus. erit rectangulum a b c quadrato c b æquale. quod fieri non potest. Idem sequetur etiam, si latus excessus ponatur maius ipsa c b. latus igitur excessus maius erit, quam c d, & minus, quam c b.

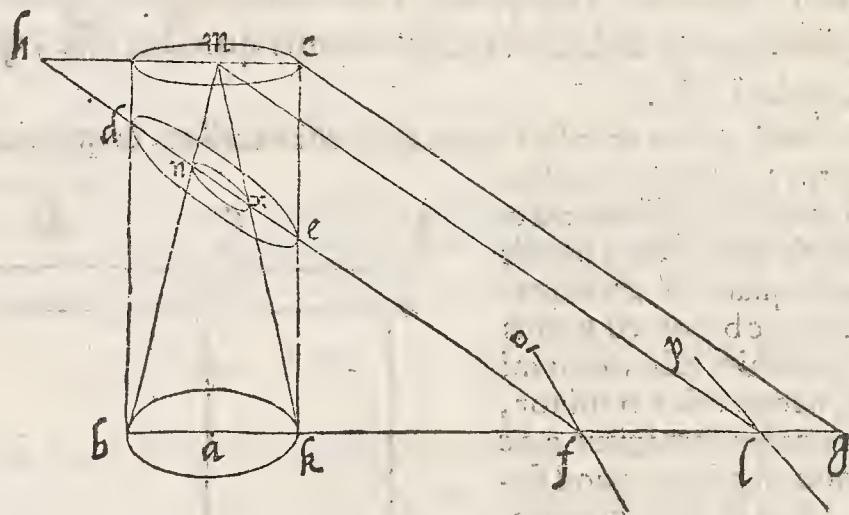
PROBLEMA V. PROPOSITIO XXV.

DATO cylandro ellipſi ſecto, conum constituere in eadem baſi cylindri, eademq; altitudine; & ſectum eodem plano, quod sectionem faciat ellipſim cylindri ellipſi ſimilem.

Sit datus cylindrus, cuius basis quidem circulus circa centrum a: parallelogramnum uero per axem b c: & in eo diameter datae ellipsis fit d e, quæ producta occurrat b a in f: perq; c ducatur c g ipſi d f æquidistans, & occurrens lineæ b a in g: & protracta rectalinea f d h, compleatur parallelogramnum. Quoniam igitur parallelogrammi h g,



latus fg lateri hc est æquale: latus autem hc non est minus ipsa bk : neque fg ipsa bk minor erit. Si igitur ad lineam bk comparetur spatium æquale quadrato kg , excedens figura quadrata; latus excessus maius erit, quam kf , & minus, quam kg , ex iis, quæ proxime demonstrata sunt. Itaque sit latus excessus kl : & per l ipsi gc æquidistantes ducatur lm : & iunctis m b , m k , intelligatur conus, cuius uertex punctum m ; basis circulus a ; & triangulum per axem bmk . Si igitur intelligamus conum sectum eodem plano, à quo facta est ed diameter sectionis cylindri: erit & in cono sectio, cuius diameter nx . & quoniam ad lineam bk comparatum est spatium æquale quadrato kg , excedens quadrato kl : rectangulum blk quadrato kg æquale erit. & sunt db , kc inter se æquidistantes: itemq; æquidistantes df , ml , cg . ut igitur df ad fb , ita cg ad gk : & idcirco ut quadratum df ad quadratum fb , ita quadratum cg ad qua-



dratum gk , hoc est quadratum ml ad rectangulum blk . Sed ut quadratum df ad quadratum fb , ita quadratum ed ad quadratum bk , hoc est quadratum diametri ellipsis cylindri ed ad quadratum coniugatæ diametri: & ut quadratum ml ad rectangulum blk , ita quadratum diametri ellipsis coni ad coniugatæ diametri quadratum.
B ergo ut quadratum diametri ellipsis cylindri ad quadratum coniugatæ diametri: ita diametri ellipsis coni quadratum ad quadratum coniugatæ diametri. Ut igitur diameter ellipsis cylindri ad coniugatam diametrum, ita ellipsis coni diameter ad coniugatam diametrum. Sunt autem secundæ diametri perpendicularares ad diametros; utræque enim æquidistant lineis fo , lp , quæ sunt ad rectos angulos ipsi b g . quare coni ellipsis cylindri similis erit: & facta est ab eodem plano. constitutusq; est conus in eadem basi, & eadem altitudine. quæ omnia fecisse oportebat.

COMMENTARIVS.

- A** Compleatur parallelogrammum.] *Hæc addidimus, quæ in græco codice non erant.*
- B** Ad quadratum coniugatæ diametri.] *Desiderabantur hæc in græcis codicibus.*
- C** Ita ellipsis coni diameter ad diametrum coniugatam.] *Hæc etiam desiderabantur. quæ nos restituimus.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXVI.

DATUM cylindrum, uel conum scalenum possumus ex eadem parte infinite secare duobus planis, non æquidistanter positis, quæ ellipses similes efficiant.

Sit primum datus cylindrus scalenus, cuius per axem parallelogrammum ab rectum sit ad basim cylindri: ponaturq; angulus ad a acutus: & per c ducatur cd ad latitudinem ad

tus ad perpendicularis minima igitur est cd omnium, quae inter æquidistantes ad, cb cadunt, sumantur ex utraque parte puncti d æquales rectæ lineæ e d, d f, & e c, cf iungantur, erit ec ipsi cf æqualis. Si igitur per ec, cf iuxta prædictum modum plana ducantur, secabunt cylindrum. itaque secent, & faciant ellipses egc, fhc. Dico eas inter se similes esse. quoniam enim ut quadratum ec ad quadratum ca, ita quadratum fc ad quadratum ca: proportio autem quadrati ec ad quadratum ca est proportio quadrati ec diametri sectionis ad quadratum coniugatae diametri; & proportio quadrati fc ad quadratum ca est proportio quadrati diametri sectionis fc ad quadratum coniugatae ipsi diametri: erit ut ec diameter ad coniugatam diametrum, ita & diameter fc ad coniugatam sibi ipsi diametrum. Sed & ad æquales angulos secantur utræque diametri, ut sèpius ostensum est. ergo similes inter se sunt egc, fhc ellipses. Quòd si alias sumpseris æquales lineas ex utraque parte puncti d, rursus alia duæ ellipses inter se similes constituentur. Notandum autem est in cylindro ellipses ex eadem parte similes & æquales esse; propterea quòd proportio diametrorum ad eandem lineam ac necessario eadem sit.

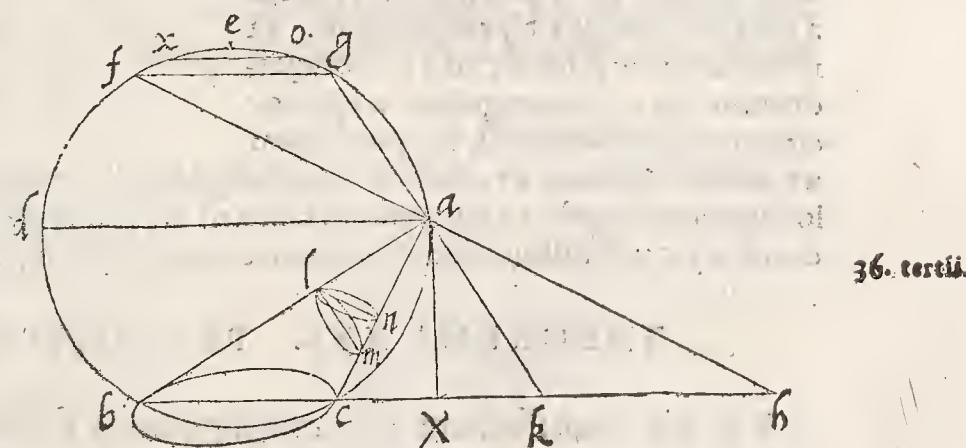
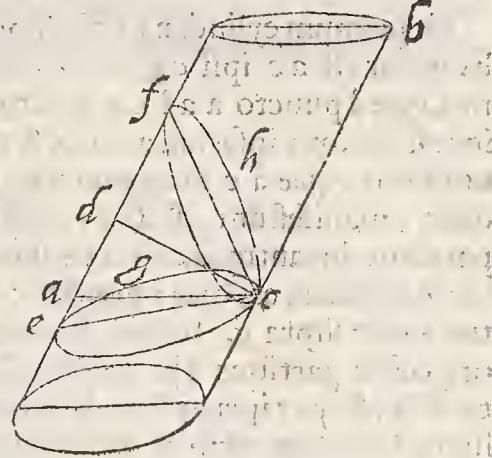
Sed sit datus conus scalenus, cuius per axem triangulum abc, ad basim coni rectum. Sitq; ab maior, quam ac: & circa ipsum circulus describatur: & per a ducatur ad æquidistans bc, quæ circulum secabit. deinde circumferentia da bifariam secta in e, sumatur in ipsa punctum f, & ducatur fg æquidistans da: iunctisq; fa, ga, & productis, occurrat fa quidem lineæ bc in h; ga uero in k ergo ut ak ad kg, ita ah ad hf. Sed ut ak ad kg, ita quadratum ak ad rectangulum gka: & ut ah ad hf, ita quadratum ah ad rectangulum fh a. ut igitur quadratum ak ad rectangulum gka, hoc est ad rectangulum bkc, ita quadratum ah ad rectangulum fh a; hoc est ad rectangulum bhc. Itaque si ducantur rectæ lineæ æquidistantes, lm quidem æquidistantes ak;

In uero æquidistantes ah: & per ipsas plana conum secantia, similes ellipses efficiuntur. quoniam enim ut quadratum ak ad rectangulum bkc, ita quadratum ah ad rectangulum bhc: ut autem quadratum ak ad rectangulum bkc, ita quadratum lm diametri ellipsis ad quadratum coniugatae diametri: & ut quadratum ah ad rectangulum bhc, ita quadratum lm diametri ellipsis ad coniugatae ipsi diametri quadratum: erit ut diameter lm ad coniugatam diametrum, ita lm diameter ad diametrum ipsi coniugatam: & idcirco lm, lm similium ellipsis diametri sunt. quod demonstrandum fuerat. At si alias lineas ipsi fg æquidistantes ducamus, ut xo; & à punctis xo lineas iungentes protrahamus ad bhc; & ipsis æquidistantes in triangulo ducamus: rursus duæ aliæ ellipses inter se similes constituentur: atque hoc in infinitum, quod facere oportebat.

4. primi
clemen-
torum.

7. quinti

9. huius.



36. tertii.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXVII.

DATUM cylindrum scalenum, uel conum possumus ex oppositis partibus infinite secare duobus planis, quæ ellipses similes efficiant.

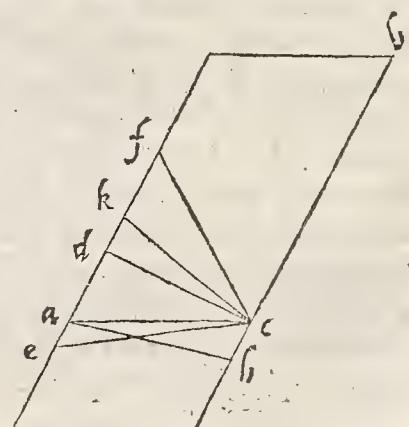
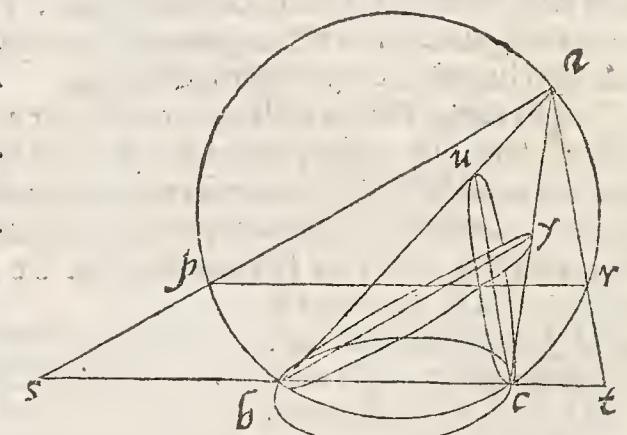
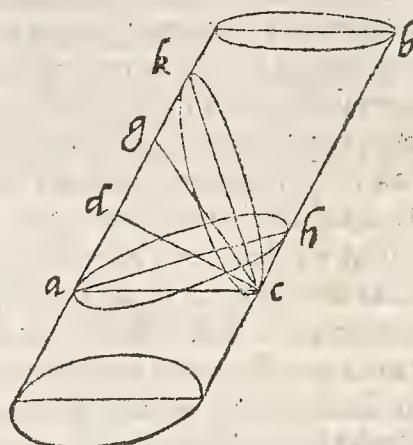
Sit primum cylindrus, ut in superiori figura: & linea ad æqualis ponatur d g. & qualis igitur est ac ipsi c g. & quoniam linea, quæ à puncto a ad cb ducitur, maior est utraque ipsarum ac, cg; & maior omnibus, quæ à c inter puncta ag cadunt: manifestum est si ex oppositis partibus ducantur duæ rectæ lineæ inter se æquales, ea, quæ à puncto c ducuntur, cadet supra g. Itaque ducantur ex oppositis partibus ah, ck æquales inter se se; & per ipsas plana ducantur, ellipses facientia: erit ut quadratum ha diametri ellipsis ad quadratum ac, hoc est ad quadratum coniugatæ diametri, ita quadratum kc diametri ellipsis ad quadratum ac, hoc est ad quadratum diametri ipsi coniugatæ. ergo kc, ah ellipsum similiū diametri sunt.

Sit deinde conus, ut supra: & producata cb, oporteat ex utrisque partibus ducere plana, quæ ellipses similes efficiant. ducatur in circulo quædam recta linea pr, ipsi bc æquidistans: & iunctæ ap, ar ad puncta s, t producantur. Ut igitur as ad sp, ita at ad tr: & ut quadratum as ad rectangulum asp, hoc est ad rectangulum csb, ita quadratum at ad rectangulum atr, hoc est ad rectangulum bct. quare si rectas lineas in triangulo duxerimus, ipsis sa, at æquidistantes, ut by, cu: & per eas plana ellipses facientia: erunt by, cu similiū ellipsum diametri, ex iis, quæ superius demonstrata sunt.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXVIII.

Ex his manifestum est; coniugationi similiū ellipsum, quæ ex eadem parte fit, similem esse coniugationem quandam similiū ellipsum ex oppositis partibus, quippe quæ diametros habet ex contraria parte diametris respondentibus.

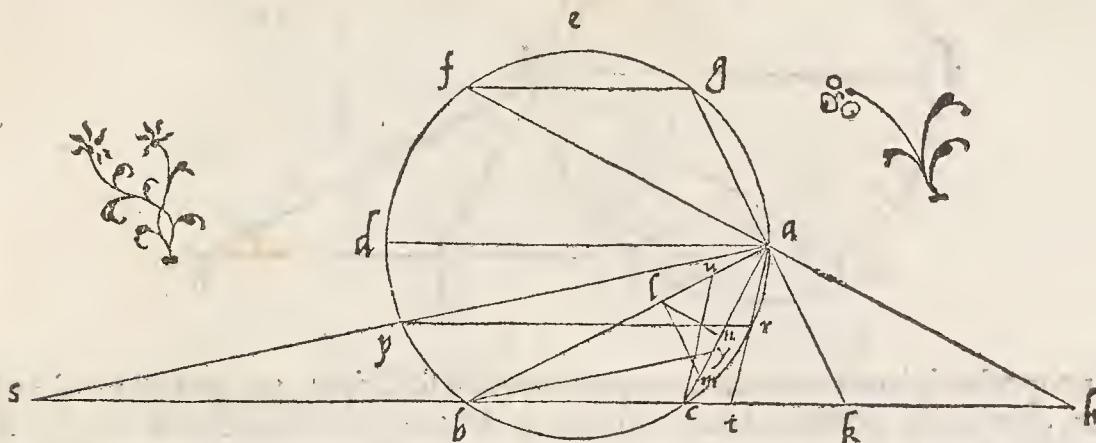
Si enim in cylindri descriptione fiat ut quadratum ec, uel cf ad quadratum ca, ita quadratum ca ad quadratum ah, uel ck; erit ut quadratum utrarumque ec, cf ad quadratum ca, hoc est ut quadratum diametri similiū ellipsum, quæ ex eadem parte fiunt ad quadratum secundæ diametri coniugatæ, ita quadratum ca ad quadratum utrarumque ah, ck: hoc est ita quadratum secundæ diametri similiū ellipsum, quæ ex oppositis partibus fiunt, ad qua-



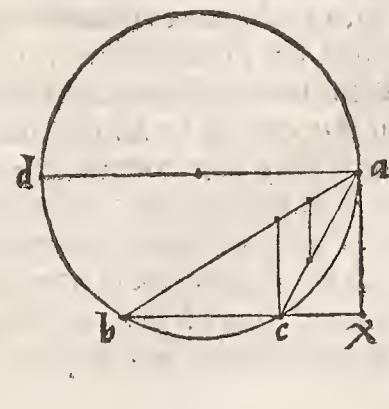
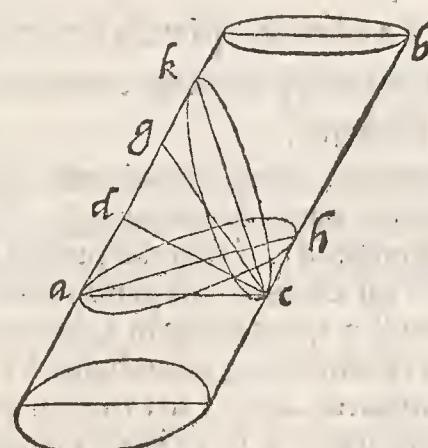
dratum

dratum coniugatæ diametri. Ut igitur alterius coniugationis diameter ad secundam diametrum, ita alterius coniugationis secunda diameter ad diametrum.

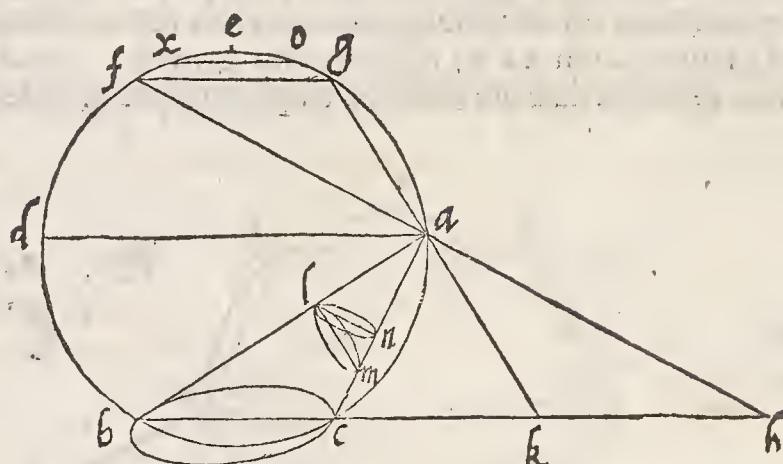
In cono autem, si rursus fiat ut $g\alpha$ ad $a'k$, ita ap ad ps ; erit ut ak ad kg , ita ps ad sa : hoc est ut quadratum ak ad rectangulum gka , ita rectangulum psa ad quadratum as . Sed ut quadratum ak ad rectangulum gka , hoc est ad rectangulum bkc , ita quadratum diametri duarum similiū ellipſium, quæ ex eadem parte fiunt,



uidelicet ln , uel lm ad quadratum secundæ diametri coniugatæ: ut autem rectangulum psa , hoc est csb ad quadratum sa , ita quadratum secundæ diametri similiū ellipſium, quæ ex oppositis partibus fiunt, ad coniugatæ diametri quadratum. ergo ut alterius coniugationis diameter ad secundam diametrum, ita alterius coniugationis secunda diameter ad diametrum. ex quibus appetet, in omni cylindro, & cono constitui duas coniugationes ellipſium inter se similiū, quæ ex contraria parte respondentes diametros habent: & præter has quatuor nullam aliam constitui similem, nisi ipsis æquidistantes, etenim semper sectiones æquidistantes similes faciunt ellipſes faciunt, si modo ellipſes faciunt: atque in cylindro quidem planum per lineam cg ductum sectionem facere subcontrariam; & propterea circulum: in cono autem si ad punctum a linea circumflexum contingat, ut ax : & in triangulo ducantur lineæ ipsi ax æquidistantes, quoniam quadratum ax rectangulo bxc est æquale, plana per dictas lineas transeuntia sectiones facere circulos: si quidem & hæc subcontraria sectione est, quod diligenter intuenti perspicuum fiet. præterea data ellipſi in cylindro scaleno, & cono, tres alias similes inueniri posse, unam quidem ipsi datæ coniugatam, duas uero coniugatas inter se, atque aliis similes, propterea quod diametros habent ex contraria parte diametris respondentes. oportet autem neque datam sectionem subcontrariam esse; huic enim nulla similis constituitur, præter æquidistantes: neque ipsis diametrum æquidistare ei, quæ per e uel per a dicitur in coni descriptione, etenim sola ipsa est; quoniam per e ducta æquidistantis ipsi ad circulum contingit, &



cadit extra; nec est aliud punctum compar puncto e, quemadmodum est o ipsi x, & f ipsi g.



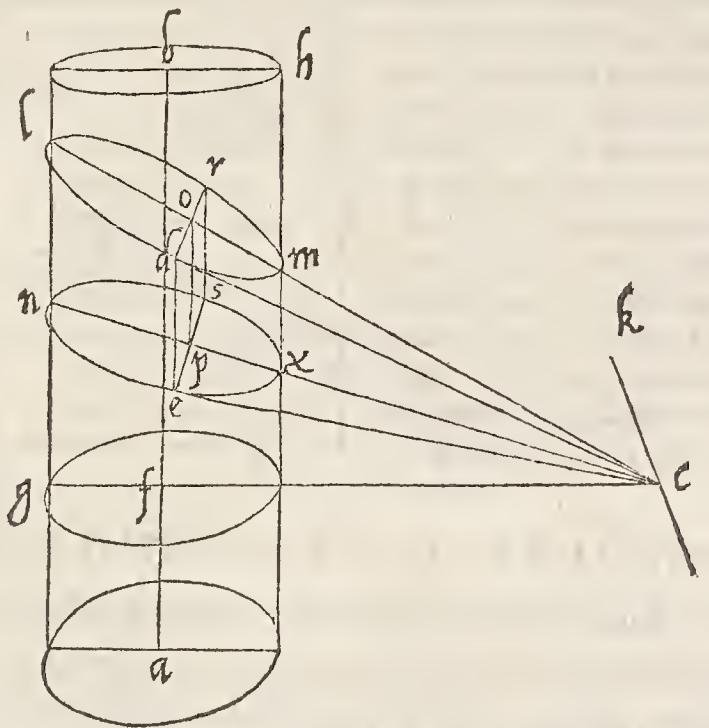
De proposito igitur nobis theoremate hæc dicta sufficient. tempus est ut ad ea aggrediār, quæ modo pollicitus sum. mihi uero futuræ contemplationis occasio non intempestiuā fuit, nempe hæc. Pitho geometra in quodam eius libro æquidistantes lineas explicans non contentus iis, quæ scripsérat Euclides, eas aptissimie exemplo declarauit. dixit enim lineas æquidistantes esse, quales in parietibus, uel pauimento columnarum umbras à lampade è regione ardente, uel lucerna factas uidemus, quod tametsi omnibus non paruum risum mouerit, mihi tamen ridiculum non uidetur propter meam in auctorem, qui amicus noster est, obseruantiam. Sed uideamus quomodo hoc mathematice se habeat. talis enim contemplatio huius loci propriæ est; quippe cum per ea, quæ proxime demonstrata sunt, propositum ostendatur.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIX.

RECTÆ lineæ, quæ ab eodem punto cylindricam superficiem contingunt ex utraque parte: omnes in unius parallelogrammi lateribus tangentiones faciunt.

Sit cylindrus, cuius bases circuli $a b$, axis $a b$ recta linea: & sumatur aliquod punctum c extra: à quo ducantur $c d$, $c e$ cylindri superficiem contingentes ex eadem parte in punctis $d e$. Dico $d e$ puncta tactuum in una recta linea esse. ducatur enim à puncto c ad $a b$ linea perpendicularis $c f$: & per $c f$ ducatur planum æquidistans plano circuli a , quod faciat in cylindro sectionem circulum circa centrum f , ita ut cylindrus constituatur, cuius bases $b f$ circuli; axisq; recta linea $b f$: & per $c f$ & axem planum ducatur, faciens in cylindro parallelogrammum $g h$: ipsi uero $f c$ ad rectos angulos ducatur $c k$ in f circuli plano: & per $c k$ & utramque ipsarum $c d, c e$ plana ducantur cylindrum secantia, quæ faciant in superficie quidem cylindri lineas $l d m$; $n e x$; in plano uero parallelogrammi $l m c, n x c$ rectas lineas. diametri igitur sectionum sunt $l m; n x$, ad quas ordinatim applicentur $d o, e p$: & ad alteram partem superficie in puncta $r s$ producantur. Itaque quoniam $c d$ contingit lineam $l d m r$ in puncto d : & huiusmodi sectio cylindri ostensa est ellipsis, non circulus: ordinatimq; applicata est $d o$: erit ut $l c$ ad $c m$, ita $l o$ ad $o m$, quod demonstratum fuit ab Apollonio in primo libro conicorum: & eadem ratione ut $n c$ ad $c x$, ita $n p$ ad $p x$. est autem $n g$ ipsi $h m$ æquidistans. quare ut $l c$ ad $c m$, ita $n c$ ad $c x$: & propterea ut $l o$ ad $o m$, ita $n p$ ad $p x$. linea igitur puncta $o p$ coniungens est in plano $g h$; & utrique ipsarum $b a, h m$ æquidistat. & quoniam $d o, e p$ æquidistant ipsi $c k$, etiam inter se se æquidistabunt. quare si per eas planum ducatur, secabit parallelogrammum $h g$, secundum rectam lineam $o p$: atque erit planum $p e d o$ æquidistans plano aliqui eo-

rum, quæ per basi ducata secant g h. planum igitur p e d o sectionem facit in cylindro parallelogrammum, ut ostensum est theoremate tertio: & linea e d est communis se-
ctio ipsius & superficie cylindri. quare e d recta linea est, & parallelogrammi latus.

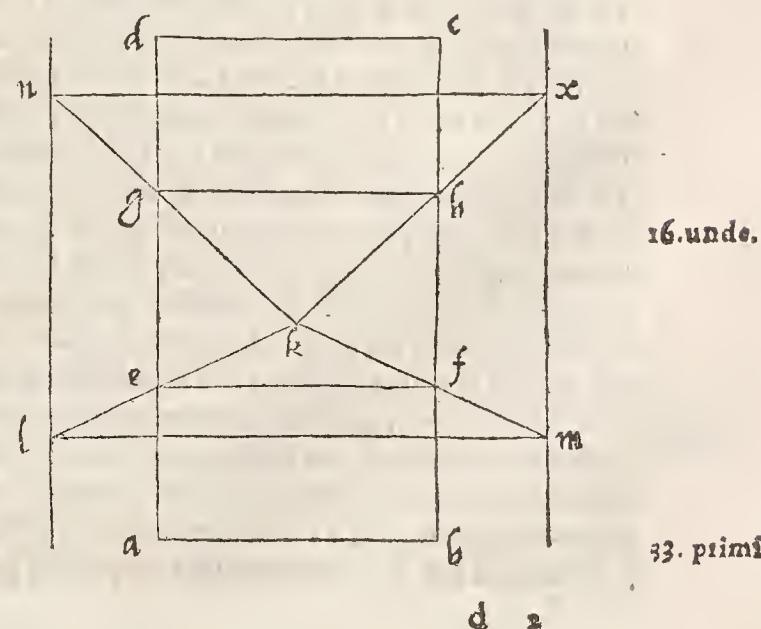


Similiter idem & in aliis contingentibus demonstrabitur; fientq; rursus tactus ex al-
tera parte in punctis r s, quæ sunt in una linea, ipsi e d æquidistante. Omnes igitur
lineæ contingentes in unius parallelogrammi lateribus tactiones faciunt. quod de-
monstrandum proponebatur.

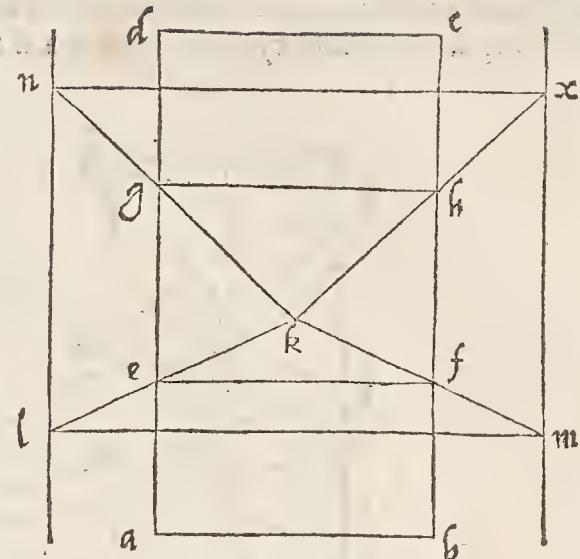
THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXX.

Hoc demonstrato. Sit parallelogrammum a b c d: & eius basi a b
æquidistantes ducantur e f, g h: sumpto autem aliquo punto k, non
existente in plano parallelogrammi, iungantur k e, k f, k g, k h; quæ pro-
ductæ occurrant plano cuiquam æquidistanti ipsi a b c d in punctis l m
n x: & iungantur l n, m x. Dico lineam m x ipsi l n æquidistantem esse.

Planum enim per lineas k l, e f ductum
secabit etiam planum l m n x: & in eo com-
munem sectionem faciet rectam lineam
l m, ipsi e f æquidistantem. similiter &
planum per k n, g h/ductum faciet n x
æquidistantem g h. Quoniam igitur l k n
triangulum ab æquidistantibus planis a b
c d, l m x n secatur, communes ipsorum
sectiones n l, g e inter se æquidistantes
sunt. & eadem ratione æquidistantes x m,
h f. quare ut e k ad k l, ita g k ad k n: & ut
g k ad k n, ita g h ad n x. sed ut e k ad k l,
ita e f ad l m. ut igitur e f ad l m, ita g h
ad n x: & permutoando. est autem e f æqua-
lis g h. ergo & l m ipsi n x: & sunt æquidi-
stantes inter se: linea igitur m x ipsi l n
est æquidistans.



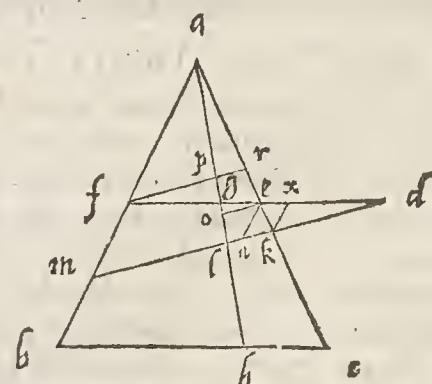
Si igitur punctum κ ponamus esse corpus illuminans: & ac parallelogrammum, quod eius radiis opponatur, siue per se se, siue in cylindro: continget radios, qui ab ipso κ producuntur, terminari rectis lineis $m l$, $n x$: & quod intra lineas $m l$, $n x$ continetur, umbrosum esse. Itaque demonstratum iam est lineam $d a$ ipsi $c b$, & $n l$ ipsi $x m$ æquidistare. Uerum non ita apparent; nam inter uallorum $l m$, $n x$ quod proprius uisui est, illud maius uidetur. sed hæc ex opticis sumenda sunt. Itaque quoniam propositum est, & de cono simile contemplari, propterea quod ellipsis communis sit & cono, & cylindro: dictum est autem de cylindro: age nunc & de cono dicamus,



THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXXI.

Si extra triangulum punctum sumatur: & ab eo ducatur quædam recta linea triangulum secans: à uerti ce autem ad basim alia agatur, quæ fecet lineam ductam, ita ut quam proportionem habet tota ad partem extra triangulum assumptam, eandem habeat eius, quæ intra triangulum continetur, maior portio ad minorem: quælibet recta linea, quæ ex eodem punto ducta triangulum secat, ab ea, quæ à uertice ad basim dicitur, in eandem proportionem secatur. Quod si lineæ ab eo punto in triangulum ductæ secantur in eandem proportionem: recta linea, quæ ipsas secat in triangulo, per trianguli uerticem necessario transibit.

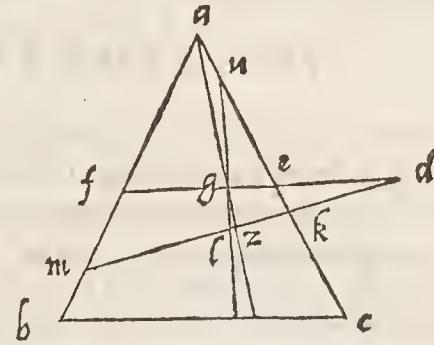
Sumatur enim aliquod punctum d extra triangulum $a b c$; à quo ducatur recta linea $d e f$ triangulum secans: & à uertice a ad basim ducatur $a g h$, quæ fecet $f d$, ita ut $f d$ ad $d e$ eandem proportionem habeat, quam $f g$ ad $g e$. Deinde ducatur alia linea $d k l m$. Dico ut $m d$ ad $d k$, ita esse $m l$ ad $l k$. Per puncta enim e k ducantur lineæ $e n$, κx ipsi $a b$ æquidistantes: & per $e f$ ducantur $e o$, $f p r$ æquidistantes $m d$. Quoniam igitur in triangulo $a m k$ ducta est $e n$ ipsi $a m$ æquidistans: erit ut $n e$ ad $e k$, ita $m a$ ad $a k$, hoc est $f a$ ad $a r$. Rursus quoniam $f a$ æquidistat κx , ut $e k$ ad κx , ita $e a$ ad $a f$. Ergo ex æquali in perturbata ratione, ut $e n$ ad κx , ita $e a$ ad $a r$, hoc est $e o$ ad $p r$. & quoniam proportio $m d$ ad $d k$ eadem est, quæ $f d$ ad $d x$: proportio autem $f d$ ad $d x$ componitur ex proportione $f d$ ad $e d$, & $e d$ ad $d x$: erit proportio $m d$ ad $d k$ ex eisdem proportionibus composita. Sed $f d$ ad $d e$ proportio eadem est, quæ $f g$ ad $g e$, ut posuimus: & proportio $e d$ ad $d x$, hoc est $e n$ ad κx ostensa est eadem, quæ $o e$ ad $p r$. Ergo proportio $m d$ ad $d k$ componitur ex proportione $f g$ ad $g e$, & proportione $o e$ ad $p r$. Rursus quoniam proportio $m l$ ad $l \kappa$ eadem est, quæ $f p$ ad $p r$: & proportio $f p$ ad $p r$ componitur ex proportione $f p$ ad $o e$, hoc est $f g$ ad $g e$, & proportione $o e$ ad $p r$. Proportio igitur $m l$ ad $l \kappa$ composita est ex proportione $f g$ ad $g e$, & $o e$ ad $p r$. Sed proportio $m d$ ad $d \kappa$ componitur ex eisdem proportionibus, quod ostensum iam fuit. Ergo



ergo ut $m d$ ad $d k$, ita $m l$ ad $l k$. Similiter & de aliis, quæ à puncto d ductæ fuerint, demonstrabitur; omnes enim à linea $a h$ in eandem, quam diximus, proportionem secabuntur.

Quòd si à puncto d ductæ lineæ in eandem proportionem secentur; ita ut quam proportionem habet fd ad $d e$, eandem habeat fg ad $g e$: & rursus quam habet $m d$ ad $d k$, habeat $m l$ ad $l k$: recta linea proportionaliter secans eas, quæ in triangulo cōtinentur, uidelicet $f e, m k$, per uerticem trianguli necessario transibit.

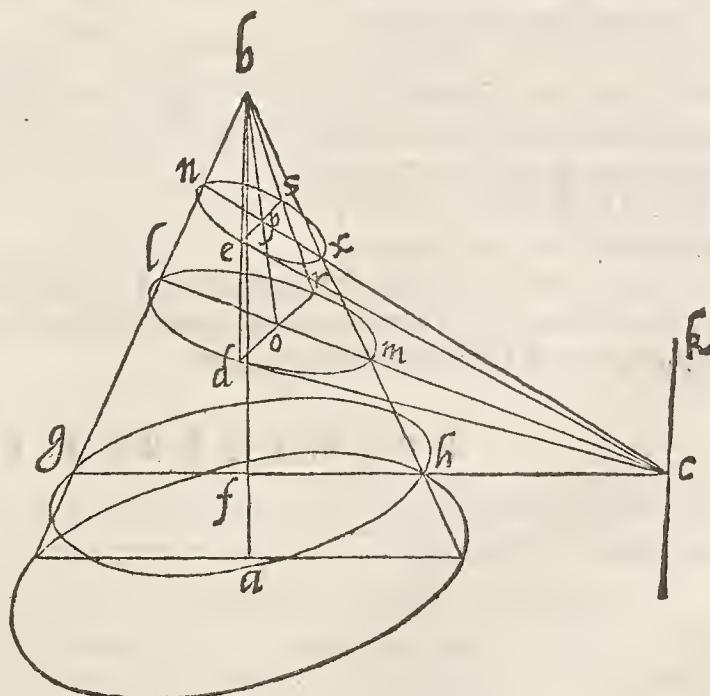
Si enim fieri potest, transeat extra uerticem per punctum u ; & ducatur recta linea $a g z$. Quoniam igitur ex ijs, quæ proxime demonstrata sunt, linea quædam $a z$ à uertice ducta secat $f d$, ita ut quam proportionem habet fd ad $d e$, habeat fg ad $g e$: & ipsam $m d$ in eandem proportionem secabit: eritq; ut $m d$ ad $d k$: ita $m z$ ad $z k$, quod est absurdum; posuimus enim ut $m d$ ad $d k$, ita esse $m l$ ad $l k$. quare lg producta non transibit per aliud punctum, quæ per uerticem trianguli, quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXII.

Rectæ lineæ, quæ ab eodem punto conicam superficiem contingunt ex utraque parte; omnes in unius trianguli lateribus tactiones faciunt.

SIT conus, cuius basis quidem circulus circa centrum a ; uerx b punctum; axis autem recta linea $a b$: & sumpto aliquo punto c extra conum, ab eo ducatur $c d$, $c e$ rectæ lineæ, conicam superficiem ex eadem parte contingentes. Dico puncta tactio-
num $e d$ in eadem recta linea esse. Ducatur à punto c ad $a b$ perpendicularis $c f$: & per $c f$ ducatur planum æquidistans plano circuli a , quod sectionem in cono faciat circulum circa centrum f , ita ut conus constituatur, cuius basis circulus f , & axis $f b$. Rursus per $c f$ & axem aliud planum ducatur, faciens in cono triangulum $b g h$; & ip-
si $c f$ ad rectos angulos agatur $c k$, quæ in circuli f plano existat: deinde per $c x$, &
utramque ipsarum $c d, c e$ du-
cantur plana conum secantia,
quæ faciant in coni quidem su-
perficie lineas $l d m, n e x$; in
plano autem trianguli $b g h$
rectas lineas $l c, n c$. diametri
igitur sectionum $l d m, n e x$
sunt $l m, n x$ rectæ lineæ. Ita-
que ad diametros $l m, n x$ or-
dinatim applicentur $d o, e p$:
& ad alteram partem superfi-
ciei in puncta $r s$ producan-
tur. Quoniam igitur recta linea
 $c d$ contingit lineam $l d m$
in punto d : & $d o$ ordinatim
applicata est: erit ut $l c$ ad $c m$, ita $l o$ ad $o m$. Eadem quo
queratione, ut $n c$ ad $c x$, ita
erit $n p$ ad $p x$. ergo ex proxi-
me demonstratis recta linea,
quæ coniungit puncta $o p$, si

36. primi
conicor.

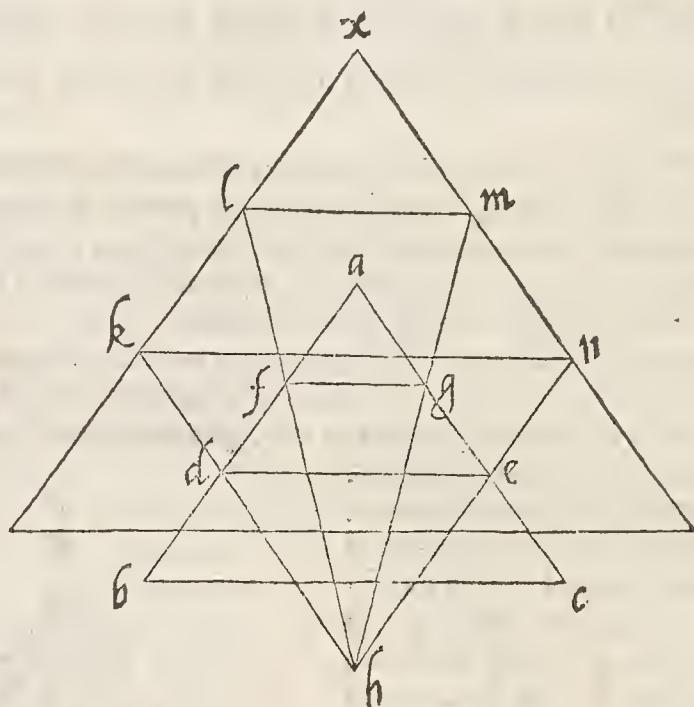
S E R E N I L I B E R I.

producatur, per uerticem transibit. ducatur igitur o p b. & quoniam e s , d r ipsi c k sunt æquidistantes; etiam inter se æquidistantes, & in uno piano erunt. Itaque planum per lineas b p o, & e s , d r ductum sectionem faciet in coni superficie triangulum. ergo puncta e d , quæ sunt in superficie coni, & in latere erunt trianguli, secantis triangulum b g h secundum rectam lineam b p o . Similiter demonstrabitur idem evenire in alijs, & in contingentibus, ad puncta r s. rectæ igitur lineæ, quæ à puncto c ductæ conicam superficiem contingunt, omnes in unius trianguli lateribus tactio[n]es faciunt. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXXIII.

ro. unde-
cimi

HOC demonstrato, sit triangulum a b c , cuius basi b c æquidistantes ducantur d e f g ; & sumpto aliquo punto h , quod non sit in trianguli plano, iungantur h d , h f , h g , h e ; & productæ occurrant piano alicui, quod piano a b c æquidistet, in punctis k l m n . planum igitur per lineas d e , k h ductum secabit etiam planum k l m n ; & in eo communem sectionem faciet rectam lineam k n , ipsi d e æquidistantem. Eodem modo & planum ductum per lineas f g , l h faciet rectam lineam l m æquidistantem ipsi f g . quoniam igitur planum k h l æquidistantibus planis a b c , k l m n secatur, communes ipsorum sectiones k l , d f æquidistantes sunt. & eadem ratione æquidistantes m n , g e . ergo productæ k l , n m conuenient inter se se. conueniant in x : & cum duæ lineæ k x , x n duabus d a , a e æquidistant, angulus ad x an gulo ad a æqualis erit. Rursus cum duæ x k , k n æquidistant duabus a d , d e , erit angulus x k n angulo a d e æqualis, triangula igitur x k n , a b c inter se se similia erunt. Quòd si punctum h fingamus esse corpus illuminans, & triâgulum a b c eius radijs oppositum, siue per se se, siue in cono, contingit radios, qui ab ipso h emittuntur, per triangulum a b c facere triangulum umbra x k n ipsi a b c simile. & quamquam hæc ad opticam contemplationem pertineat, & ob id à proposita tractatione aliena uideantur, tamen perspicue constat, sine ijs, quæ hoc loco de coni & cylindri sectione, hoc est de ellipsi & rectis lineis cum contingentibus demonstrata sunt, problema eiusmodi absolui non posse: quare non temere, sed necessario de his sermone[m] instituimus.



P R I M I L I B R I F I N I S.

SERENI ANTINSENSIS
PHILOSOPHI LIBER SECUNDVS
DE SECTIONE CONI.

CVM COMMENTARIIS FEDERICI
COMMANDINI VRBINATIS.

SERENVS CYR O S. D.

VM sectio conorum optime Cyre, quæ per uerticem efficitur, triangula quidem in conis cōstituat, uariam autem, & per pulchram habeat contemplationem: & à nullo eorum, qui ante nos fuerunt, quod sciam, pertractata sit: optime me factum existimau, si locum hunc non inexplicatum relinquerem; perscriberemq; de his quæcumque mihi in mentem uenerunt. maiorem autem ferè partem eorum, quæ profundiore geometria indigere uidentur, arbitror me hoc libro complexum esse. neque enim mirum uideri debet, si aliquid, quod scribi oportet, prætermiserim; utpote qui primus ad hanc contēplationem sim aggressus. quainobrem par est, uel te, cum in horum studium incubueris, uel posteriorum aliquem, qui in hæc inciderit, à me impulsu, ea, quæ prætermissa sunt, supplere. sunt tamen non nulla, quæ consulto præterierim, uel quod manifesta essent, uel quod ab aliis tractata. siquidem in omni cono sectionem triangulum esse, quādo per uerticem secetur, cum ab aliis demonstratum sit; nos omisimus, ne aliena nostris inuentis infererentur. Quæ autem in promptu essent, & quæ unusquisque per se nullo negocio intelligere posset, non existimau me scribere oportere; ne legentium animos parum attentos facerem. sed iam ad id, quod propositum est, accedamus.

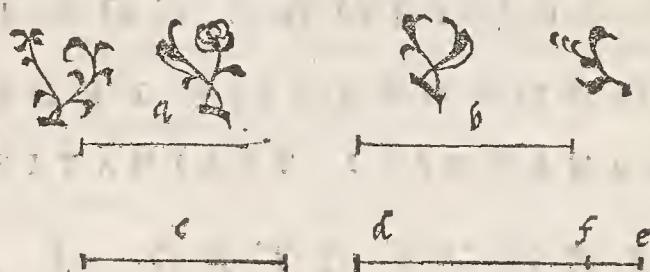
THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si quatuor rectarum linearum prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quam tercia ad quartam: rectangulum contentum prima & quarta maius est eo, quod secunda & tercia continetur.

Habeat recta linea a ad lineam b maiorem proportionem, quam c ad d e. Dico rectangulum ex a & d e rectangulo ex b & c maius esse. Quoniam enim a ad b maiorem proportionem habet, quam c ad d e; sit ut a ad b, ita c ad d e. rectangulum igitur

S E R E N I L I B E R I I.

Igitur ex a & d f æquale est rectangulo ex b & c. maius autem est, quod fit ex a, & de eo, quod ex a & d f. ergo rectangulum ex a & d e rectangulo ex b & c maius erit.



C O M M E N T A R I V S.

MAIUS autem est, quod fit ex a & d e eo, quod ex a & d f.] Sequitur enim ex iam dictis, & octava quinti lineam d e maiorem esse, quam d f. quippe cum c ad d f maiorem proportionem, quam ad d e, habere ponatur. Hoc idem demonstrauit Pappus, ut adnotauimus in 34. primi libri conicorum Apollonij: & eodem in loco Eutocius.

T H E O R E M A I I . P R O P O S I T I O I I .

Si in triangulo orthogonio ab altero angulorum ad unum latus, quod est circa rectum angulum linea ducatur: habebit ducta linea ad eam, quæ inter ipsam & perpendiculararem interiicitur, maiorem proportionem, quam quæ à principio subtenditur recto angulo ad iam dictum latus.

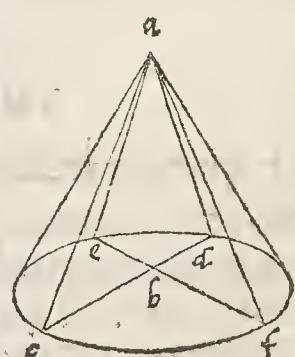
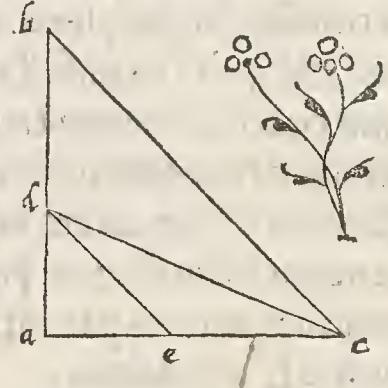
SIT triangulum orthogonium a b c, rectum habens angulum ad a: & ab uno angulorum, uidelicet à c ad a b linea c d ducatur. Dico c d ad d a maiorem proportionem habere, quam c b ad b a. ducatur enim linea d e ipsi b c æquidistans. & quoniam rectus est angulus d a c, angulus d e c obtusus erit. maior igitur est c d, quam d e: & idcirco c d ad d a maiorem proportionem habet, quam e d ad d a, hoc est quam c b ad b a.

32. primi
19

T H E O R E M A I I I . P R O P O S I T I O I I I .

Si conus rectus planis per uerticem secetur, eorum, quæ in sectionibus fiunt triangulorum, æquales habentia bases inter se æqualia erunt.

SIT conus rectus, cuius uertex a punctum; & basis circulus circa centrum b. Itaque hoc cono per uerticem planis secto; fiunt triangula a c d, a e f, æquales bases habentia. triangula enim ex his sectionibus fieri alibi ostensum est. Dico triangula a c d, a e f æqualia esse. nam cum bases sint æquales; itemq; æquales inter se a c, a d, a e, a f: & triangulum triangulo æquale erit.



COM

COMMENTARIVS.

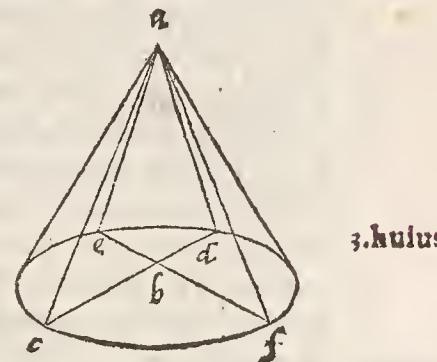
Triangula enim ex his sectionibus fieri alibi ostensum est.] Ostendit hoc Apollonius A in primo libro conicorum propositione tertia.

Itemq; æquales inter se ac, ad, ae, af.] Constat hoc ex generatione coni recti; uniuscuius- B que enim earum quadratum æquale est quadrato axis coni una cum quadrato semidiametro basis.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

IN conis rectis similia triangula inter se æ-
qualia sunt.

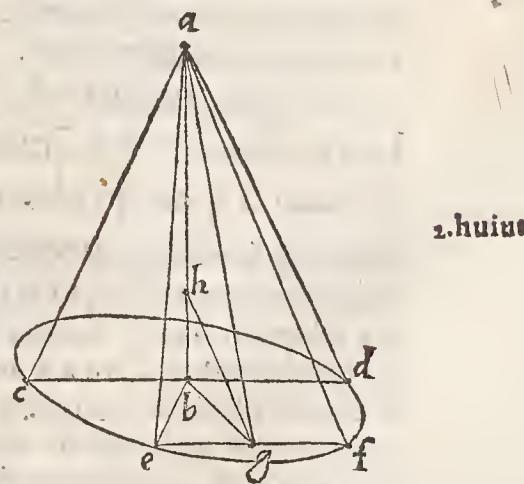
SIT enim in proposita figura acd triangulum trian-
gulo aef simile. Dico & æquale esse. quoniam enim ut
ac ad cd, ita ae ad ef; erit permutando ut ca ad ae,
ita cd ad ef. & sunt ca, ae æquales. ergo & æquales cd,
ef. triangula uero æqualium basium, quæ in conis rectis
fiunt, inter se sunt æqualia. ergo & acd, aef triangula æ-
qualia erunt.



THEOREMA V. PROPOSITIO V.

SI conus rectus planis per uerticem fecetur, & per axem, & extra
axem; sitq; axis non minor semidiametro basis: eorum, quæ fiunt, trian-
gulorum maximum est illud, quod per axem constituitur.

SIT conus, cuius uertex a; basis circulus circa b centrum; & axis ab. Itaque co-
no per uerticem se &to, fiant triangula per axem quidem acd, extra axem uero aef:
ponaturq; ef ipsi cd æquidistans: & axis uidelicet ab non minor ipsa bc. Dico acd
triangulum triangulo aef maius esse. iungatur be: & ab ipso b ad ef perpendicularis
ducatur bg. ergo ef in g bisariam diuidetur; & iuncta ag perpendicularis erit
ad ef: triangulum enim eaef æquicrure est. Quoniam igitur ab non est minor semi-
diametro be: & est eg minor be: erit ab ipsa eg maior. Itaque abscindatur b h
æqualis eg: communis autem bg. ergo duæ hb, bg
duabus eg, gb æquales sunt: & angulus egb æqualis
angulo gbh, quod uterque rectus. basis igitur eb basi
hg est æqualis: & triangulum triangulo simile. quare
ut be ad eg, ita gh ad hb. id est gh ad hb maiore pro-
portionem habet, quam ga ad ab, ut proxime demon-
strauimus; orthogonium enim triangulum est abg. ergo
be ad eg, hoc est cb ad eg, hoc est cd ad ef maiore
proportionem habet, quam ga ad ab. rectangu-
lum igitur, quod fit ex cd, ba maius est eo, quod ex ef
ga, per primum theorema. sed rectaglii quidem ex cd
ba dimidium est acd triangulum: rectaglii uero ex
ef, ga dimidium est triangulum aef. quare triangulum
acd maius est triangulo aef, & maius alijs omnibus,
quæ bases habent æquales triangulo aef, hoc est ipsi æqualibus. Similiter demonstra-
bitur, & in alijs sectionibus, quæ extra axem fiunt. triangulum igitur per axem om-
nium maximum erit.



THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

LICET idem & aliter uniuersalius demonstrare, ex omnibus simpliciter triangulis, quod maiorem basim habet, illud maius esse.

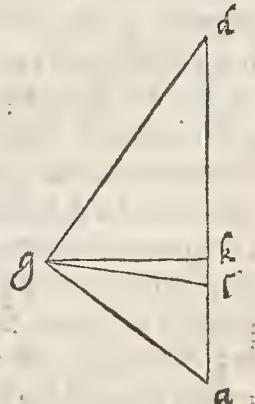
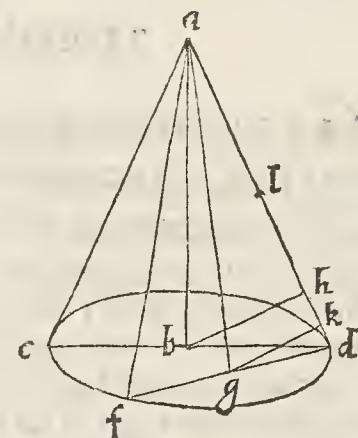
Secto namque cono fiant triangula $a c d, a f d$, ita ut bases $c d, f d$ inter se ad terminum d conueniant: & sit $c d$ maior ipsa $f d$, siue per centrum transeat, siue non. Dico triangulum $a c d$ maius esse triangulo $a f d$. ducantur enim ad $f d$, $c d$ perpendicularares $a b, a g$; & ad $a d$ ducatur $b h$ perpendicularis. Itaque quoniam $c d$ maior est ipsa $f d$; erit eius dimidia $b d$ maior $d g$. ergo quadratum $b d$ quadrato $d g$ maius A erit: & propterea reliquum quadratum $b a$ minus quadrato $a g$. quadratum igitur B $a b$ ad quadratum $b d$ minorem proportionem habet, quam $a g$ quadratum ad qua C dratum $g d$. sed ut quadratum $a b$ ad quadratum $b d$, ita linea $a h$ ad $h d$. ergo $a h$ ad $h d$ minorem habet proportionem, quam quadratum $a g$ ad quadratum $g d$. fiat ut quadratum $a g$ ad quadratum $g d$, ita $a k$ ad $k d$; & iungatur $g k$, quae ad $a d$ perpendicularis erit, ut demonstrabitur. quoniam igitur ponimus $a b$ non minorem ipsa D $b d$, erit $a b$ uel maior $b d$, uel ipsi æqualis. Sit primum maior. ergo $a h$ maior est $h d$. secundum. seetur $a d$ bifariam in l . & quoniam rectangulum $a h d$ minus est, quam quadratum al, quadrato $l h$; & maius est quadratum $l k$ quadrato $l h$: erit rectangulum $a h d$, hoc est quadratum $b h$ maius rectangulo $a k d$, hoc est quadrato $g k$. linea igitur $b h$ maior est linea $g k$. suntq; $b h, g k$ altitudines triangulorum $a b d, a g d$. quare triangulum $a b d$ maius est triangulo $a g d$ & eorum dupla, uidelicet triangulum $a c d$ maius triangulo $a f d$. sed triangulo $a f d$ æquale est quodcumque basim habet ipsi $f d$ æqualem. triangulum igitur $a c d$ maius est quolibet triangulo, cuius basis est æqualis ipsi $f d$. Quod si $a b$ sit æqualis $b d$, erit & $a h$ ipsi $h d$ æqualis. & similiter rectangulum $a h d$, hoc est quadratum $b h$ maius erit rectangulo $a k d$, hoc est quadrato $g k$: propterea q; linea $b h$ maior $g k$: & triangulum $a b d$ triangulo $a g d$ maius. Eodem modo demonstrabitur etiam, si alias bases duxerimus. quare triangulum sic habens maiorem basim triangulo minorem habente maius erit. At uero lineam $g k$ ad $a d$ perpendiculararem esse hoc modo ostendetur.

Sit triangulum orthogonium $a g d$, & à punto g ad basim ducatur $g k$, ita ut quam proportionē habet quadratum $a g$ ad quadratum $g d$; habeat linea $a k$ ad $k d$. Dico $g k$ ad $a d$ perpendiculararem esse.

Si enim non est ita, sit $g l$ perpendicularis. ut igitur quadratum $a g$ ad quadratum $g d$, ita $a l$ ad $l d$: erat autem ut $a g$ quadratum ad quadratum $g d$, ita $a k$ ad $k d$. quare ut $a l$ ad $l d$, ita erit $a k$ ad $k d$: quod est absurdum. non igitur $g l$ est perpendicularis. Similiter ostendemus neque aliam ullam perpendiculararem esse, praeter ipsam $g k$. ergo $g k$ ad $a d$ perpendicularis erit.

C O M M E N T A R I V S.

A ET propterea reliquum quadratum $b a$ minus quadrato $a g$.] Sunt enim ex penultima priu elementorum duo quadrata $a b, b d$ æqualia quadrato $a d$: & similiter duo quadrata g ,



$ag, gd, \text{æ}qualia eidem. quadrata igitur } ab, bd \text{ quadratis } ag, gd \text{ sunt } \text{æ}qualia. \text{ quorum quidem quadratum } bd \text{ maius est } gd \text{ quadrato. ergo reliquum quadratum } ab \text{ reliquo } ag \text{ minus erit.}$

Quadratum igitur ab ad quadratum bd minorem proportionem habet, quam ag quadratum ad quadratum gd .] Nam cum quadratum ab minus sit quadrato ag , habebit ab quadratum ad quadratum bd minorem proportionem, quam quadratum ag ad idem bd quadratum. Rursus cum gd sit minor ipsa bd , erit & quadratum gd minus quadrato bd . ergo quadratum ag ad quadratum bd minorem proportionem habet, quam ad gd quadratum. Quadratum igitur ab ad quadratum bd multo minorem proportionem habebit, quam ag quadratum ad quadratum gd .

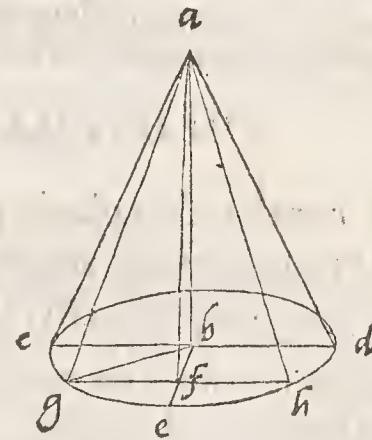
Sed ut quadratum ab ad quadratum bd , ita linea ah ad hd .] Cum enim triangulum abd rectangulum sit, & bh ad basim perpendicularis, erit ex corollario octauæ sexti ab proportionalis media inter da, ah : itemq; bd proportionalis inter ad, dh : Ut igitur ha ad ab , ita ab ad ad . quare ut quadratum ab ad quadratum ad , ita linea ha ad ad . & eodem modo ostendetur, ut quadratum bd ad quadratum da , ita hd ad da : conuertendoq; ut quadratum da ad quadratum bd , ita da ad hd . ergo ex æquali ut quadratum ab ad quadratum bd , ita ah ad hd .

Ergo ah maior est hd .] Etenim demonstratum est ab ad hd esse, ut quadratum ab ad quadratum bd . sed cum ab sit maior bd , & quadratum ab quadrato bd maius erit: ideoq; ah maior ipsa hd .

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si in cono recto triangulum per axem maximum sit triangulorum omnium, quæ extra axem constituuntur: axis coni non minor erit semidiametro basis.

SIT conus, cuius uertex quidem a punctum; axis ab recta linea; basis autem circulus circa centrum b : & triangulum per axem acd , quod maximum sit omnium triangulorum, quæ extra axem in cono constituuntur. Dico lineam ab semidiametro basis non minorem esse. si enim fieri potest, sit minor: & ducatur in circulo linea be ad cd perpendicularis. Quoniam igitur angulus abe rectus est, linea, quæ puncta a e coniungit, maior est semidiametro be , quare si à punto a in angulo abe aptetur recta linea ipsi semidiametro æqualis, inter puncta b & e cadet. Itaque aptetur, & sit af : perq; f ducatur gh ipsi cd æquidistans: & bg iungatur. fient triangula abf , gbf similia, ut in quinto theoremate est demonstratum, & latera eiusdem rationis inter se æqualia erunt. Ut igitur fa ad ab , ita bg ad gf , hoc est cb ad gf . quare rectangulum abc æquale est rectangulo afg , hoc est triangulum per axem æquale triangulo agh : quod fieri non potest, posuimus enim triangulum acd maximum esse. non igitur ab minor est semidiametro basis.



16. sexti

COMMENTARIVS.

Fient triangula abf , gbf similia, ut in quinto theoremate est demonstratum.] In quinto theoremate similitudo triangulorum demonstratur ex sexta sexti elementorum, in hoc vero ex septima eiusdem demonstrabitur. Quoniam enim duo triangula abf , gbf unum angulum abf uni angulo gbf æqualem habent; est enim interque rectus: & circa alios angulos afb , gbf latera proportionalia, immo uero æqualia, cum ponatur af æqualis semidiametro basis, hoc

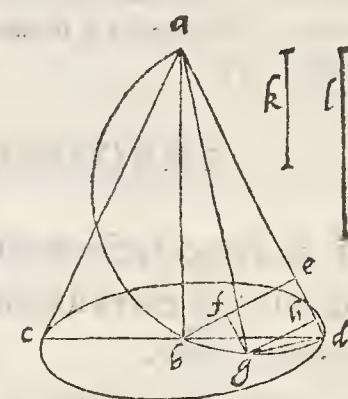
S E R E N I L I B E R I I.

est ipsi g b: & sit b f utriusque communis: reliquorum autem angulorum b a f, b g f uterque minor recto: triangula a f b, g b f inter se similia & aequalia erunt.

PROBLEMA I. PROPOSITIO VIII.

Conum rectum, cuius axis non sit minor semidiametro basis, plano per uerticem ducto ita secare, ut faciat triangulum, quod ad triangulum per axem proportionem habeat datam. oportet autem datam proportionem esse minoris ad maius.

SIT coni uertex a, basis circulus circa b centrum, & triangulum per axem a c d; in quo a b est perpendicularis: & oporteat conum secare triangulo, quod ad triangulum a c d proportionem datam habeat. sit autem data proportio, quæ est k minoris ad l maiorem. Quoniam igitur triangulum a b d rectangulum est, describatur circa ipsum semicirculus: atque à punto b ducatur b e perpendicularis: & quam proportionem habet k ad l, eandem habeat f e ad e b: deinde per f ducatur f g ipsi e d æquidistans, & per g ipsa g h æquidistans f e. erit f e æqualis ipsi g h. Iraque quoniam ut k ad l, ita f e ad e b, hoc est g h ad b e: ut autem g h ad b e, ita rectangulum ex g h & a d ad rectangulum ex b e, & a d: & ut rectangulum ex g h & a d ad rectangulum ex b e & a d, ita eorum dimidia, uidelicet triangulum a g d ad triangulum a b d: erit ut k ad l, ita a g d triangulum ad triangulum a b d. quare triangulum a g d ad ipsum a b d est in data proportione. Si igitur in basi coni aptabimus lineam duplam lineæ g d perq; ipsam & uerticē planum ducemus, faciet id in cono triangulum ipsius a g d duplū: quod quidem ad triangulum a c d eandem proportionem habebit, quam a g d triangulum ad triangulum a b d, hoc est quam k habet ad l.



THEOREMA VIII. PROPOSITIO IX.

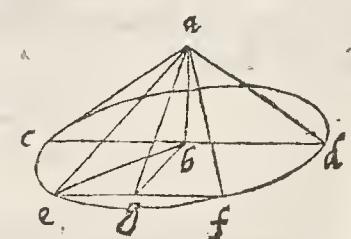
Si conus rectus planis per uerticem secetur, & per axem, & extra axem; triangulorum autem, quæ fiunt extra axem unum aliquod æquale sit triangulo per axem: axis coni semidiametro basis minor erit.

Secto enim cono fiant triangula, per axem quidem a c d, extra axem uero a e f, quod triangulo a c d sit æquale: sitq; e f ipsi c d æquidistans: & a b, a g perpendicularares: & iungantur b e, b g. Dico axem a b semidiametro b d minorem esse. Quoniam enim a e f triangulum æquale est triangulo a c d; & eorum dupla æqualia erunt, uidelicet rectangulum ex e f & g a æquale rectangulo ex c d & b a. ergo ut c d ad e f, hoc est c b ad e g, hoc est b e ad e g, ita g a ad a b. quod cum duo triangula b e g, g a b unum angulum e g b uni angulo a b g æqualem habeant; est enim uterque rectus; circa alios autem angulos latera proportionalia: sitq; reliquorum e b g, a g b uterque recto minor: triangula inter se similia erunt. Ut igitur e g ad g b, ita a b ad b g. quare a b ipsi e g est æqualis. Sed e g minor est semidiametro b e. ergo a b coni axis semidiametro b e minor erit. quod demonstrandum proponebatur.

14. sexti

7. sexti
9. quinti

Quoniam autem demonstratum est in lineis æquidistantibus c d e f; constat



constat idem sequi, etiam si non sint æquidistantes, quippe cum ostensum sit triangula bases æquales habentia inter se æqualia esse. 3. huius:

THEOREMA IX. PROPOSITIO X.

IS DE manentibus demonstrandum est, si rursus planum ducatur per uerticem conum secans, faciensq; in basi rectam lineam, cuius magnitudo inter bases æqualium triangulorum contineatur: triangulum illud utrisque triangulis æqualibus maius esse.

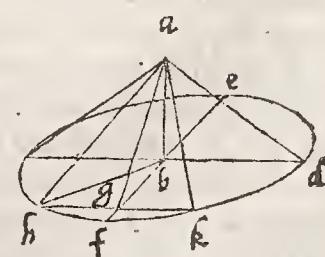
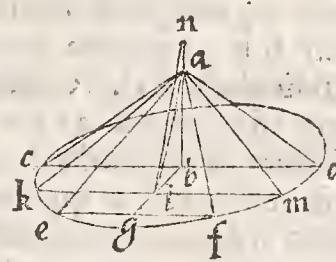
Sit ut in antecedenti figura triangulum per axem a c d æquale triangulo basim habenti e f: & ducatur quælibet recta linea k m, cuius magnitudo sit inter c d, e f. ponatur autem utriusque earum æquidistans: & per ipsam & uerticem planum ducatur. Dico triangulum a k m utrumque ipsorum a c d, a e f maius esse. Secetur enim rursus k m bisariam in l, & iungantur a l, b k, b l. Itaque quoniam a c d triangulum æquale est triangulo a e f: erit a b ipsi e g, hoc est dimidiæ e f æqualis, ut proxime demonstratum fuit. Sed k l est maior e g: ergo & k l ipsa a b maior erit. ponatur b n æqualis k l, & l n iungatur. eadem ratione, qua supra, demonstrabimus triangulum b k l æquale & simile triangulo l n b. quare ut b k ad k l, hoc est ut c b ad k l, hoc est c d ad k m, ita l n ad n b. Sed l n ad n b minorem proportionem habet, quam l a ad a b. ergo & c d ad k m minorem habet proportionem, quam l a ad a b. & propterea rectangulum ex c d & b a minus est rectangulo ex k m & l a, hoc est triangulum a c d minus triangulo a k m. triangulum igitur a k m triangulo a c d, & triangulo a e f maius erit.

Idem demonstrabitur etiam in omnibus triangulis, quorum basis magnitudine inter c d, e f continetur, nihil enim differt si bases non sint æquidistantes, ut supra demonstratum fuit.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XI.

DATVM conum rectum, cuius axis sit minor semidiametro basis, plano per uerticem ita secare, ut faciat triangulum æquale ei, quod per axem constituitur.

Sit datus conus rectus, cuius axis quidem a b; triangulum uero per axem a c d: & oporteat eum piano per uerticem ita secare, ut faciat triangulum triangulo a c d æquale. ducatur in circulo per centrum linea e b f ad rectos angulos ipsi c d. & quoniam a b minor est semidiametro basis, aptetur a g subtendens angulum a b f, quæ semidiametro sit æqualis, quod quidem facile effici potest: deinde per g ducatur h g k ipsi c d æquidistans. ergo h g k ad g bisariam secatur; & ad e b f est perpendicularis. ducatur per lineas h k, g a planum, quod trianguli a h k efficiat. Dico a h k triangulo a c d æquale esse. iungatur enim b h. & quoniam a g est æqualis b h, erit ut a g ad g b, ita h b ad b g. quod cum duo triangula b h g, g a b unum angulum uni angulo æqualem habent; sunt enim h g b, a b g utrique recti: & circa alios angulos latera proportionalia; reliquorum uero uterque recto minor; erunt b h g,



ga b triangula inter se similia. quare ut b h ad. h g, hoc est c d ad h k, ita g a ad a b: idcircoq; rectangulum, quod fit ex c d, & b a æquale est rectangulo ex h k & g a: & eorum dimidia, uidelicet triangulum a c d æquale triangulo a h k. quod facere oportebat.

THEOREMA X. PROPOSITIO XII.

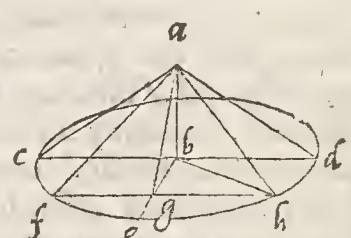
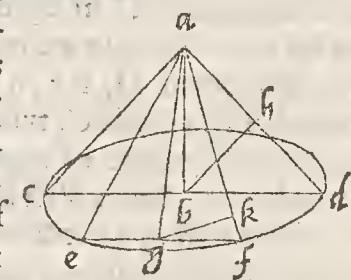
Si conus rectus planis per uerticem secetur; & in uno eorum triangulorum, quæ sunt, linea à uertice ad basim perpendicularis ducta æqualis sit dimidiæ basis: erit illud triangulum maius omnibus triangulis dissimilibus, quæ in cono constituuntur.

Sit in cono recto triangulum a c d, quod perpendicularem a b æqualem habeat ipsi b d dimidiæ c d basis. Dico a c d triangulum maius esse omnibus triangulis dissimilibus, quæ in cono constituuntur. Sumatur enim aliud quodvis triangulum a e f ipsi dissimile, in quo sit perpendicularis a g: & à punto quidem b ad a d perpendicularis ducatur b h; à punto autem g ad a f itidem ducatur perpendicularis g k. Quoniam igitur triangulum a c d dissimile est triangulo a e f. & a b d ipsi a g f dissimile erit. Sunt autem orthogonia, & æquicrure est a b d. ergo a g f non est æquicrure. & quadratum quidem a b æquale est quadrato b d; quadratum uero a g quadrato g f est inæquale. Sed ut a b quadratum ad quadratum b d, ita linea a h ad h d: & ut quadratum a g ad quadratum g f, ita a k ad k f. linea igitur a d in partes æquales diuiditur; & a f in partes inæquales. Itaque quoniam id, quod æqualibus partibus continetur, maius est contento partibus inæqualibus: erit a h d rectangulum maius rectangulo a k f. sed rectangulo a k d æquale est b h quadratum: & rectangulo a k f æquale quadratum g k. quadratum igitur b h quadrato g k maius erit: idcircoq; linea b h maior, quam g k: & ut b h ad g k, ita rectangulum ex b h & a d ad rectangulum ex g k & a f; & dimidium ad dimidium, hoc est triangulum a b d ad triangulum a g f. maius igitur est a b d triangulum triangulo a g f, & eorum dupla, uidelicet triangulum a c d maius triangulo a e f. Similiter ostendetur maius esse omnibus triangulis dissimilibus ipsi a c d. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XIII.

DATUM conum rectum, cuius axis sit minor semidiametro basis, plano per uerticem ita secare, ut faciat triangulum maius omnibus triangulis dissimilibus, quæ in cono constituuntur.

Sit datus conus rectus, cuius uerxus quidem a punctum; basis circulus circa centrum b; axis tiero a b, minor semidiametro basis: & oporteat conum ita secare, ut ante dictum est. Ducatur planum per axem, quod faciat triangulum a c d. erit a b perpendicularis, & minor b d. deinde in plano circuli ducatur b e ad rectos angulos ipsi c b: & quo d b quadratum superat quadratum b a, eius dimidium sit quadratum b g: perq; g ducatur f g h, æquidistantes c d: & iungantur a g, b h. Itaque quadratum b d, hoc est b h superat quadratum b a duobus quadratis b g: quadratum autem a g superat quadratum a b, uno quadrato b g. ergo quadratum b h superat quadratum a g ipso b g quadrato. Sed quadratum b h superat g h quadratum, quadrato b g. quadratum igitur b h utrumque quadratum a g, g h eodem quadrato superabit: & propter ea quia-



quadratum ag æquale est quadrato gh , & linea ag linea gh æqualis. est autem & fg æqualis gh . quare ag æqualis est dimidiæ ipsius fh . Si igitur per fh , ga planum ducatur, fiet in cono triangulum, quod sit a fh . Itaque quoniam triangulum est in cono a fh , à cuius uertice perpendicularis ducta ag æqualis est dimidiæ basis: erit 12 . huius a fh triangulum maius omnibus triangulis dissimilibus, quæ in ipso cono constituuntur. quod facere oportebat.

COMMENTARIUS.

ERGO quadratum bh superat quadratum ag , ipso bh quadrato.] Quoniam enim quadratum bh superat quadratum ba , duobus quadratis bg : & quadratum ag superat quadratum ba , quadrato bg : erit quadratum bh æquale quadrato ba una cum duobus quadratis bg ; & quadratum ag æquale quadrato ba una cum quadrato bg . Sed ba quadratum una cum duobus quadratis bg superat quadratum ba una cum quadrato bg , ipso quadrato bg . ergo & quadratum bh superabit quadratum ag , eodem bg quadrato.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XIX.

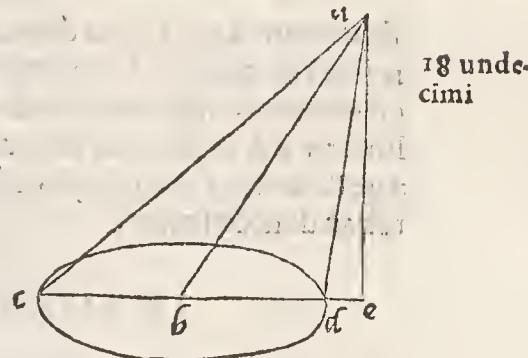
Datum conum piano per axem ad rectos angulos ipsi basi secare.

Sit datus conus, cuius uertex a punctum, basis circulus circa centrum b ; axis uero ab : & oporteat conū secare per lineam ab ad rectos angulos ipsi basi. Si igitur conus sit rectus, perspicuum est lineam ab ad basim perpendicularē esse: & ob id omnīa, quæ per ipsam transeunt plana ad rectos angulos erunt. quare & triangulum acd per lineam ab ductum ad rectos angulos erit ipsi basi. Sed sit conus scalenus. ergo ab non est ad basim perpendicularis. cadat à uertice a perpendicularis ad basis planum in punto e : & iuncta $e b$, producatur trianguli abe planum, quod in cono sectionem faciat triangulum acd . Dico acd triangulum ad rectos angulos esse basi coni. Quoniam enim ae perpendicularis est ad basis planum: & omnīa, quæ per ipsam ae transeunt, planā eidē ad rectos angulos erunt. ergo & triangulum acd ad rectos angulos erit planō basis. id quod fecisse oportebat.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XV.

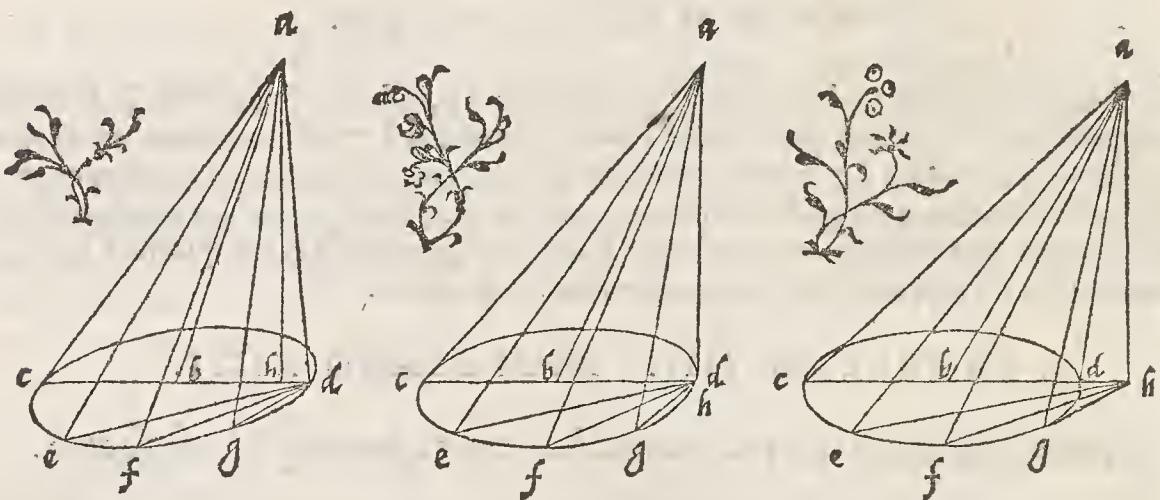
Si conus scalenus piano per axem secetur ad rectos angulos ipsi basi, triangulum in cono factum scalenum erit, cuius maius latus maxima erit linearum omnium, quæ à uertice coni ad basis circumferentiam ducentur: & minus latus linearum omnium similiter ductarum minima erit; aliarum uero, quæ maxime propinquior est, maior erit, quam quæ ab ipsa magis distat.

Sit conus scalenus, cuius uertex a punctum, basis circulus $c ed$, & axis ab . cono autem seco pér axem ad rectos angulos ipsi $c ed$ circulo, fiat triangulum acd : & axis ad partes d uergat. Cum igitur conus scalenus sit, non est ab perpendicularis ad circulum $c ed$. ducatur ah ad ipsum perpendicularis, quæ erit in plano trianguli acd , & in lineam $c bd$ productam cadet. Itaque quoniam maior est ch , quam hd , & quadratum ch quadrato hd erit maius. commune apponatur quadratum ha . quadrata igitur ch, ha maiora sunt quadratis dh, ha , hoc est quadratum ca maius quadrato ad . ergo linea ac maior ipsa ad . Dico ac maximam esse linearum omnium, quæ



S E R E N I L I B E R II.

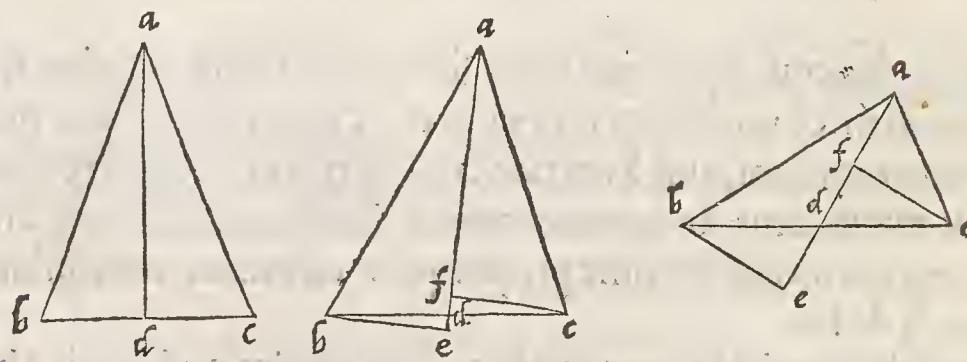
à uertice ad basis circumferentiam pertinent: & ad minimam. ducantur enim h e, h f, h g. & quoniam h c maxima est omnium, quæ à puncto h in circumferentiam cadunt: erit quadratum h c maximum quadratorum h e, h f, h g, h d. commune apponatur quadratum h a. ergo quadrata, quæ fiunt à lineis c h, h a, maiora sunt eis, quæ fiunt ab e h, h a; f h, h a; g h, h a; d h, h a; hoc est quadratum c a maius est quolibet qua-



dratorum a e, a f, a g, a d. quare linea a c maior est qualibet linearum a e, a f, a g, a d. Similiter demonstrabitur etiam aliis maiorem esse. linea igitur a c, ut diximus, maxima est omnium linearum, quæ in ipso cono ducuntur. Eadem ratione demonstrabitur lineam a d minimam esse. aliarum uero a e maior est, quam a f: & a f maior, quam a g: & semper propinquior ipsi a c, maior quam, quæ ab ea magis distat. quod oportebat demonstrare.

T H E O R E M A XII. P R O P O S I T I O X V I .

S i in triangulo à uertice ad punctum, quod basim bifariam diuidit, recta linea ducatur: quadrata ex lateribus facta æqualia erunt quadratis, quæ fiunt ex basis partibus, & duplo quadrati eius lineæ, quæ à uertice ad basim ducta fuerit.



Sit triangulum a b c, cuius basis secetur bifariam in d; & ducatur a d. Dico quadrata b a, a c quadratis b d, d c, & duplo quadrati a d æqualia esse. Si enim æquicrux sit a b c triangulum, demonstratio manifesta erit, propterea quo d uterque angulus lorum, qui ad d est rectus. Sed fit b a maior, quam a c. ergo b d a angulus maior est angulo a d c. producatur a d, & ad ipsam perpendiculares ducantur b e, c f. Similia igitur sunt triangula orthogonia e b d, c f d, propter linearum b e, f c æquidistantiam. quare ut b d ad d c, ita e d ad d f. æqualis autem est b d ipsi d c, ergo & e d æqualis d f.

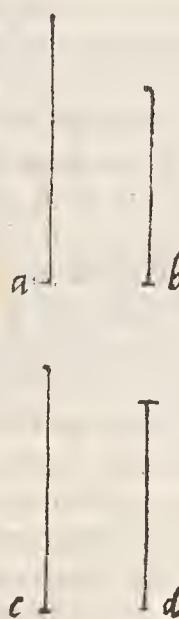
df ; & rectangulum a d e rectangulo a d f æquale: & duplum rectanguli a d e duplo rectanguli a d f. Itaque quoniam quadratum a b maius est quadratis a d, d b, duplo rectanguli a d e, hoc est duplo rectanguli a d f: quadratum uero a c minus est quadratis a d, d c, duplo rectanguli a d f: erunt quadrata b a, a c æqualia quadratis b d, d c & duplo quadrati a d. quod demonstrare oportebat.

1. sexti
12. secundi
di
13. secundi
di

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XVII.

Si quatuor linearum prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quam tertia ad quartam: & quadratum primæ ad quadratum secundæ maiorem habebit proportionem, quam tertiae quadratum ad quadratum quartæ. Quòd si quadratum primæ ad quadratum secundæ maiorem proportionem habeat, quam tertiae quadratum ad quadratum quartæ: & prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quam tertia ad quartam.

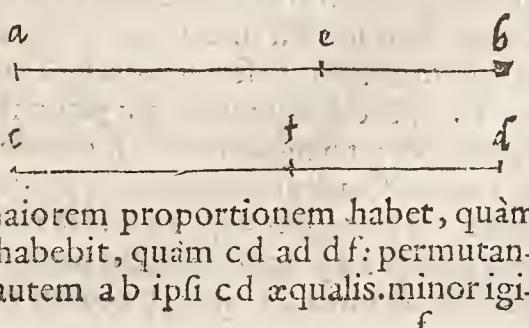
Sint quatuor rectæ lineæ a b c d: & habeat a ad b maiorem proportionem, quam c ad d. Dico quadratum ipsius a ad quadratum b maiorem habere proportionem, quam quadratum c ad d quadratum. quoniam enim proportio a ad b maior est, quam c ad d, erit dupla maioris proportionis maior, quam dupla minoris. est autem proportionis maioris a ad b, dupla proportio quadrati a ad quadratum b: & proportionis c ad d minoris dupla proportio quadrati c ad quadratum d. ergo proportio quadrati a ad quadratum b maior est proportione quadrati c ad quadratum d. Rursus quadratum a ad quadratum b maiorem proportionem habeat, quam quadratum c ad quadratum d. Dico a ad b maiorem proportionem habere, quam c ad d. Nam cum proportio quadrati a ad quadratum b maior sit, quam quadrati c ad quadratum d; erit maioris proportionis dimidia maior, quam dimidia minoris. sed proportionis quidem quadrati a ad quadratum b maioris, dimidia est proportio a ad b; proportionis uero minoris quadrati c ad quadratum d, dimidia est c ad d proportio: proportio igitur a ad b maior est, quam c ad d. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XIV. PROPOSITIO XVIII.

Si duæ magnitudines æquales inæqualiter diuidantur: & alterius partium maior ad minorem proportionem maiorem habeat, quam partium alterius maior ad minorem, uel æqualis ad æqualem: prædictarum partium maior omnium maxima, minor uero omnium minima erit.

Sint duæ magnitudines æquales a b, c d: dividaturq; a b in e, & c d in f: & sit a e maior, quam e b: & c f non minor quam fd, ita ut a e ad e b maiorem proportionem habeat, quam c f ad fd. Dico magnitudinum a e, e b, c f, fd maximam quidem esse a e, e b uero minimam. Quoniam enim a e ad e b maiorem proportionem habet, quam c f ad fd: & componendo a b, ad b e maiorem habebit, quam c d ad d f: permutandoq; a b ad c d maiorem, quam e b ad fd. est autem a b ipsi c d æqualis. minor igitur a e, e b, c f, fd.



28. quinti
27. quinti

tur e b quām fd; estq; df non maior, quām fc. quare & eb quām cf minor. Sed & erat minor, quām ae. ergo eb minima erit. Rursus quoniam ab est æqualis cd, quarum eb minor est quām df; erit reliqua ae maior, quām reliqua cf; & cf non est minor, quām fd. quare & ae maior, quām fd. erat autem & maior, quām eb. ergo ae omnium maxima erit, & eb minima.



THEOREMA XV. PROPOSITIO XIX.

S I duo triangula & bases æquales habeant, & lineas, quæ à uertice ad punctum, quod basim bifariat secat, ducuntur: alterius autem maius latus ad minus maiorem proportionem habeat, quām reliqui maius latus ad minus, uel æquale ad æquale; triangulum illud, cuius maius latus ad minus maiorem habet proportionem, altero minus erit.

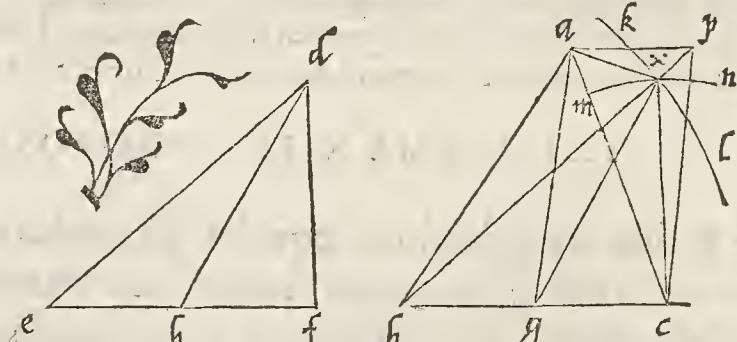
Sint duo triangula abc, def; bases bc, ef æquales habentia: quarum utraque bifariam secetur in punctis gh: ductæq; ag, dh inter se æquales sint: & sit ed maior, quām df; b a uero non minor, quām ac, ita ut ed ad df maiorem proportionem habeat, quām ba ad ac. Dico def triangulum minus esse triangulo abc. Quoniam enim bc, ef & æquales sunt, & in partes æquales diuiduntur: suntq; æquales ag, dh: erunt & quæ ex ipsis efficiuntur quadrata æqualia. quadrata igitur bg, gc unà cum duplo quadrati ag æqualia sunt quadratis eh, hf unà cum duplo quadrati dh: sed quadratis bg, gc unà cum duplo quadrati ag æqualia sunt quadrata ba, ac,

16. huius ut ostensum est: & quadratis eh, hf unà cum duplo quadrati dh æqualia quadrata ed df. utraque igitur quadrata ba, ac, utrisque ed df æqualia erunt. & quoniam **17. huius** ed ad df maiorem proportionem habet, quām ba ad ac; habebit quadratum ed ad quadratum df maiorem proportionem, quām quadratum ba ad quadratum ac.

Quod cum duarum magnitudinum æqualium, uidelicet eius, quæ constat ex quadratis ba, ac, & eius, quæ ex quadratis ed df, maior pars ad minorē, uidelicet quadratum ed ad quadratum df maiorem proportionem habeat, quām reliqua pars ad reliquū;

uidelicet quām quadratum ba ad ac quadratum: erit quadratum ed, quod est maximum, utroque quadrato ba, ac maius: quadratum uero df minimum, utroque ba, ac minus, ex antecedenti theoremate. quare linea ed maior est utraque ipsarum ba, ac; & df utraque minor. Circulus

igitur, qui ex centro b, & interuallo ipsi ed æquali describitur, uidelicet xl transibit ultra lineam ba: & circulus ex centro c, interualloq; æquali ipsi df descriptus, hoc est mn secabit lineam ac. qui quidem duo circuli kl, mn se se inuicem secabunt, ut demonstrabitur. secant autem se se in punto x: & iungantur xa, xb, xc. est igitur bx ipsi ed æqualis, & xc æqualis df: eratq; bc æqualis ef. Quare totum triangulum bx c triangulo ed f est æquale: ac propterea xg æqualis dh, hoc est ipsi ag. ex quibus sequitur angulum xag acutum esse. & quoniam ba non est minor ac, angulus agb angulo agc non erit minor. angulus igitur agc non est maior recto. erat autem xag angulus recto minor. ergo anguli cga, xag duobus rectis minores sunt: & linea ax ipsi gc non est æquidistans. ducatur per a ipsi bc æquidistans

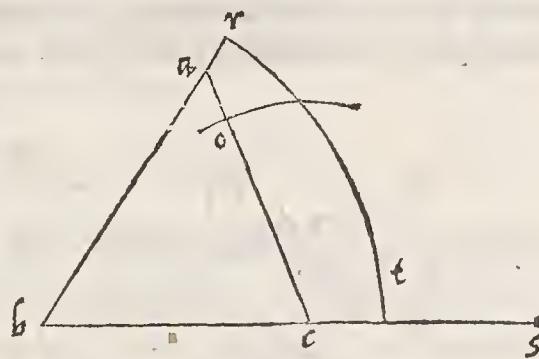


ap;

ap ; & $b \times p$ protrahatur: iungaturq; c . p. triangulum igitur abc triangulo pbc est 38. primi. aquale: & idcirco bac maius est ipso $b \times c$, hoc est edf . quod oportebat demonstrare.

Circulos autem kl, mn se se inuicem secare, hoc modo demonstrabitur.

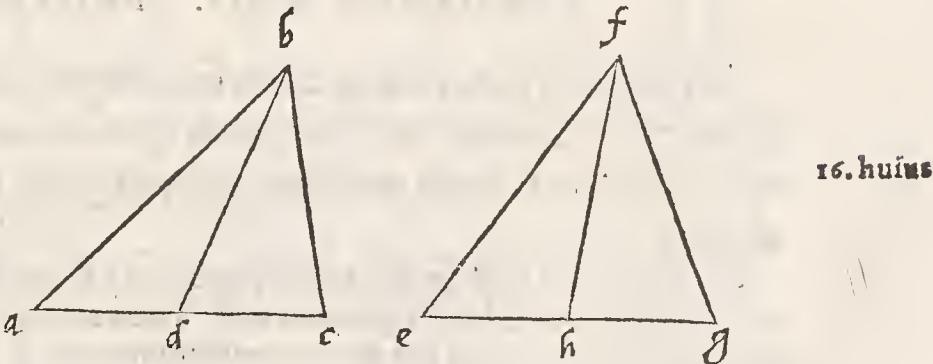
Sit enim ipsi ed æqualis bar : & ipsi df æqualis cs , quæ sit in eadem recta linea bc . tota igitur bs æqualis est utriusque ef, fd . & quoniam utraque ef, fd maior est ed : erit & bs ipsa ed maior. Itaque circulus ex centro b , & interuallo br descriptus ipsam bs secabit: & cum cs , quæ est æqualis df minor sit ca ; circulus ex centro c , interualloq; cs descriptus secabit ac . fecet in o . ergo transibit per circumferentiam rt . circuli igitur kl, mn se se inuicem secabunt.



THEOREMA XVI. PROPOSITIO XX.

Si duo triangula inæqualium laterum & bases æquales habeant, & lineas, quæ à uertice ad punctum basim bifariam secans ducuntur: minoris trianguli maius latus ad minus maiorem proportionem habebit, quam maioris maius latus ad minus.

Sint triangula abc, efg , bases ac, eg æquales habentia; quæ bifariam secentur in punctis dh ; & sint æquales bd, fh : sit autem maius triangulum efg , & ab maior, quam bc ; itemq; ef quam fg maior. Dico ab ad bc maiorem habere proportionem, quam ef ad fg . si enim non ita sit, uel eandem proportionem habebit, uel minorem. Sit primum, si fieri potest, ut ab ad bc , ita ef ad fg . ergo ut ab quadratum ad quadratum bc , ita quadratum ef ad quadratum fg : & componendo, permutoandoq; ut utraque quadrata ab, bc ad utraque ef, fg , ita quadratum bc ad quadratum fg . Sed utraque quadrata ab, bc utrisque ef, fg sunt æqualia. ergo & quadratum bc æquale est quadrato fg ; & idcirco reliquum ab



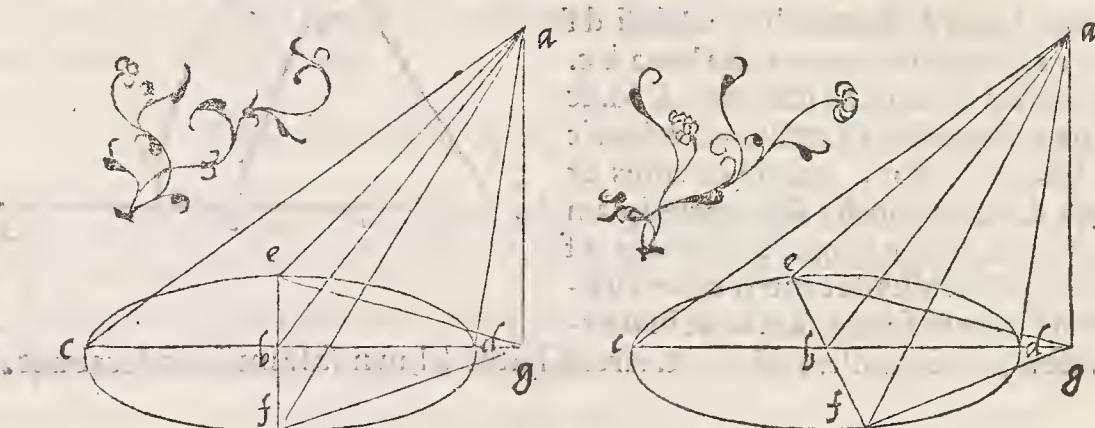
16. huīus

quadratum reliquo ef æquale erit. linea igitur ab æqualis est ef ; & bc ipsi fg . Sed & bases sunt æquales. ergo triangulum abc æquale est triangulo efg , quod est absurdum; erat enim triangulum abc minus. non igitur ab ad bc proportionem habet eandem, quam ef ad fg . Sed rursus si fieri potest, ab ad bc minorem proportionem habeat, quam ef ad fg . habebit ef ad fg maiorem proportionem, quam ab ad bc . quare triangulum efg minus erit triangulo abc , ex proxime demonstratis; quod est absurdum: ponebatur enim maius. non ergo ab ad bc minorem proportionem habet, quam ef ad fg . demonstratum autem est neque eandem habere. relinquitur igitur ut ab ad bc maiorem habeat proportionem, quam ef ad fg .

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXI.

DATVM conum scalenum plano per uerticem ita secare, ut in cono triangulum æquicrure efficiat.

Sit datus conus scalenus; cuius axis $a:b$: & basis $c:d$ circulus: oporteatq; eum ita secare, uti dictum est. Secetur primo per axem plano $a:c$ ad rectos angulos ipsi circulo $c:d$: & ducatur perpendicularis $a:g$, quæ cadet in lineam $c:d$, trianguli $a:c:d$ basim: ipsi uero $c:d$ ad rectos angulos agatur $e:f$ in circuli plano: perq; $e:f$, & per uerticem a planum ducatur, quod faciat triangulum $a:f$. Dico $a:f$ triangulum æqui-



crure esse. iungantur enim $e:g$, $f:g$, & quoniam $c:d$ ipsam $e:f$ secans ad rectos angulos, bifariam secat: erit $e:g$ æqualis $g:f$: communis autem $a:g$: & uterque angulorum $a:g$, $a:g:f$ rectus. ergo $e:a$ est æqualis $a:f$: idcirco triangulum $a:f$ est æquicrure.

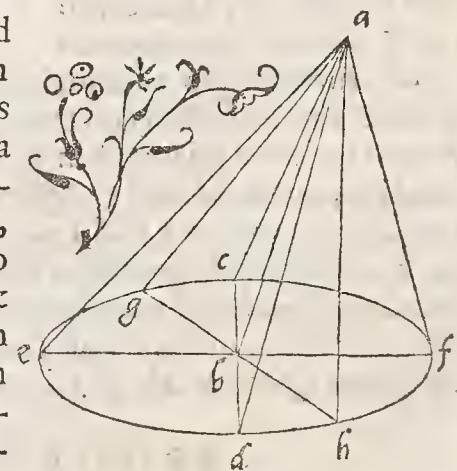
Ex quibus constat omnia triangula, quæ bases habent ad rectos angulos ipsi $c:d$, æquicuria esse. Demonstrandum etiam est ea triangula, quæ bases habent non ad rectos angulos ipsi $c:d$, non esse æquicuria.

Ponatur enim $e:f$ in eadem figura non esse ad rectos angulos ipsi $c:d$. erunt $e:g$, $f:g$ inæquaes: communis autem $a:g$, & ad ipsas perpendicularis. ergo $e:a$, $a:f$ inæquaes sunt, & triangulum $e:f$ non est æquicrure.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXII.

Triangulorum, quæ in cono scaleno per axem constituuntur, maximum est æquicrure: & minimum, quod est ad rectos angulos basi coni: reliquorum uero maximo propinquius maius est eo, quod plus distat.

In cono enim scaleno triangula per axem $a:b$ constituantur: æquicrure quidem $a:c:d$; rectum uero ad basis planum $a:f$. Dico triangulorum omnium, quæ per axem constituuntur $a:c:d$ maximum esse, & $a:f$ minimum. Sit enim aliud triangulum per axem $a:g:h$. & quoniam conus scalenus est; uergat axis $a:b$ ad partes f . ergo linea $a:e$ maxima est omnium, quæ à puncto a ad basis circumferentiam ducuntur; & $a:f$ minima. quare $e:a$ maior est, quam $a:g$: & $f:a$ minor quam $a:h$. Itaque cum duo triangula $a:f$, $a:g:h$ bases $e:f$, $g:h$ æquaes habeant, & lineam $a:b$ eandem, quæ à uertice ad punctum basim bifariam secans ducitur: habeatq; $e:a$ ad $a:f$ maiorem proportionem, quam $g:a$ ad $a:h$: erit $a:f$ triangulum minus triangulo $a:g:h$. Similiter etiam demonstrabitur minus omnibus aliis triangulis per axem. ergo $a:f$ minimum est omnium triangulorū, quæ per axem constituuntur. Rursus in triangulis $a:g:h$, $a:c:d$, & bases æquaes sunt, & eadem, quæ ducitur à uertice ad punctum

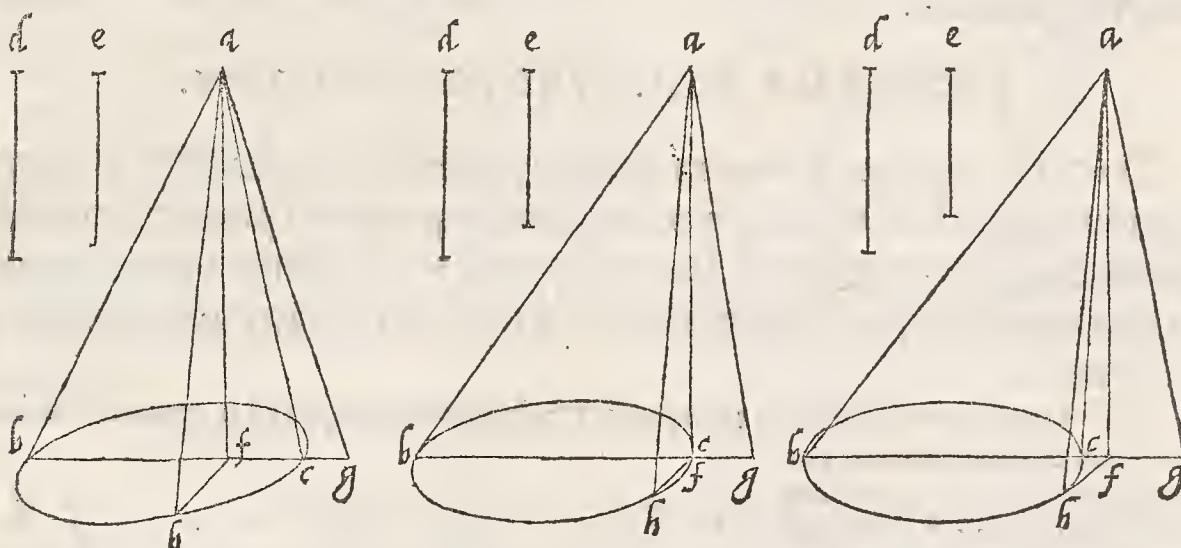


Quum basim bifariam secans: habetq; g a ad a h maiorem proportionem; quam c a ad a d. sunt enim c a, a d æquales. ergo g a h triangulum minus est triangulo c a d. similiter demonstrabitur, omnia triangula per axem ducta triangulo c a d minora esse. triangulum igitur a c d maximum est omnium triangulorum, quæ per axem consti-tuantur; & a e f minimum. quod demonstrare oportebat. Eodem modo demonstrabitur propinquius maximo maius esse eo, quod plus distat.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXIII.

IN dato cono scaleno à uertice ad circumferentiam basis lineam du-cere, ad quam maxima proportionem datam habeat. oportet autem da-tam proportionem esse maioris ad minus, & minorem esse ea, quam ha-bet maxima linearum, quæ in cono ducuntur ad minimam.

SIT conus datus basim habens b c circulum, cuius diameter b c: uerticem uero punctum a; & triangulum per axem a b c, ad rectos angulos ipsi b c circulo. ergo b a linearum, quæ à uertice coni ducuntur maxima est: & a c minima. Itaque oporteat à punto a ad circumferentiam circuli ducere lineam, ad quam ipsa b a proportionē habeat eandem, quam habet recta linea d maior ad e minorem. habeat autem d ad e minorem proportionem, quam b a ad a c. ducatur à punto a ad b c perpendicularis a f: protrahaturq; b f g, & ut d ad e, ita sit b a ad aliam quampiam a g, quæ coaptetur sub angulo a g f. ergo b a ad a g minorem proportionem habet, quam b a ad a c: & propterea g a maior est, quam a c, & g f maior, quam f c. Quoniam igitur ut quadratum d ad quadratum e, ita quadratum b a ad quadratum a g: erit quadratum



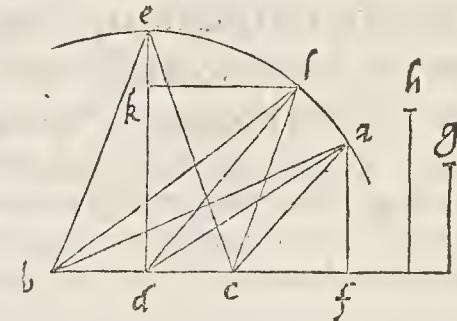
b a quadrato a g maius; hoc est quadrata b f, fa maiora quadratis a f, fg. commune auferatur quadratum a f. ergo reliquum b f quadratum maius est quadrato fg: & ideo linea b f ipsa fg maior. erat autem c f minor, quam fg. quare g f maior est, quam f c, & minor quam f b. Coaptetur igitur in circulo linea f h ipsi fg æqualis: & iungatur a h. Itaque quoniam h f ipsi fg est æqualis: communis autem fa: & utriusque ipsarum ad rectos angulos: erit basis h a æqualis basi a g. Sed ut d ad e, ita est b a ad a g, hoc est b a ad a h. estq; d ad e in data proportione. ergo & b a ad a h in data propor-tione erit. ducata igitur est a h, ad quam ipsa b a proportionem habet datam. quod face-re oportebat.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXIIII.

SIT datum triangulum scalenum a b c, cuius latus b a maius sit la-tere a c: & basis b c bifariam in d secetur, ducaturq; a d: sit autem e d

perpendicularis ad $b c$; & æqualis ipsi $d a$: & sit $a f$ ad eandem $b c$ perpendicularis; oporteatq; aliud triangulum constituere maius triangulo $a b c$, quod habeat lineam ductam à uertice ad punctum basim bifariam secans, utriusque ipsarum $d e, d a$ æqualem: & ad triangulū $a b c$ proportionem eandem habeat, quam h maior ad g minorem. habeat autem h ad g non maiorem proportionem, quam $d e$ ad $a f$.

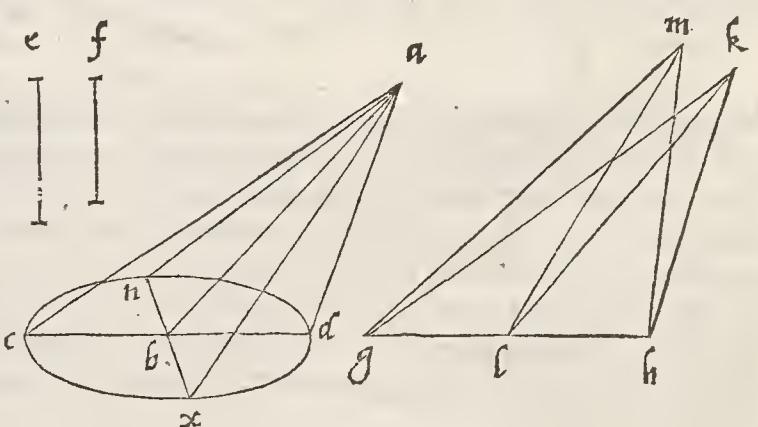
I T A Q V E centro d , & intervallo da circulus $e a$ describatur, qui per e transibit. & quoniam proportio h ad g non maiore est proportione $d e$ ad $a f$, erit uel eadem, uel minor. Sit primum eadem: & iungantur $e b, e c$. estigitur ut h ad g , ita $e d$ ad $a f$: & ut $e d$ ad $a f$, ita rectangulum ex $e d, b c$ ad rectangulum ex $a f, b c$. ergo ut h ad g , ita rectangulum ex $e d, b c$ ad rectangulum ex $a f, b c$. Sed rectanguli ex $e d, b c$ dimidium est $e b c$ triangulum: & rectanguli ex $a f, b c$, dimidium est triangulum $a b c$. triangulum igitur $b c$ ad triangulum $a b c$ eam proportionem habet, quam h ad g , hoc est datam. Habeat deinde h ad g minorem proportionem, quam $e d$ ad $a f$: & siat ut h ad g , ita $k d$ ad $a f$: perq; x ducatur $k l$ ipsi $c d$ æquidistans: & iungantur $l b, l c$. Quoniam igitur ut h ad g , ita $k d$ ad $a f$: ut autem $k d$ ad $a f$, ita $b l c$ triangulum ad triangulum $a b c$: triangulum $b l c$ ad triangulum $a b c$ datam habet proportionem, uidelicet quam h ad g : & habet $l d$ ipsi $d a$ æqualem. quod faciendum proponebatur.



PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXV.

D A T V M conum scalenum secare per axem plano faciente in eo triangulum, quod ad minimum triangulorum per axem proportionem datum habeat. oportet autem datam proportionem esse maioris ad minus, neque maiorem ea, quam maximum triangulorum per axem habet ad minimum.

S I T datus conus scalenus, cuius axis $a b$; basis circulus circa b centrum: minimum uero triangulorum per axem $a c d$: & oporteat eum per axem $a b$ ducto ita secare, ut faciat triangulum, quod ad triangulū $a c d$ proportionem quidem habeat eandem, quam recta linea e maior ad f minorem, non autem maiorem, quam maximum triangulorum per axem habet ad minimum $a c d$. Si igitur e ad f proportionem habeat eandem, quam maximum triangulorum per axem ad minimum; ducemus per b rectam lineam in circulo ad rectos angulos ipsi $c d$: & per eam & axem planum producentes, habebimus triangulum æquicrure, quod maximum est omnium, quæ per axem constituuntur, ut demonstratum fuit; habetq; ad triangulum $a c d$ proportionem eandem, quam e ad f , uidelicet datam. Sed habeat nunc



nunc e ad f proportionem minorem, quām maximum triangulorum per axem ad minimum; & describatur seorsum recta linea g h æqualis ipsi c d; & in ea triangulum k g h triangulo a c d simile, ita ut k g sit æqualis a c, & alia alijs itidem æquales. præterea in linea g h constituantur triangulum, habens eam, quæ à uertice ad punctum basim bifariam secans dicitur, ipsi k l æqualem: habensq; ad triangulum k g h proportionem eandem, quam e ad f. erit constituti trianguli uertex ad partes g, ut mox demonstrabitur. sit autem illud triangulum m g h, ita ut latus m g sit maius ipso m h. quoniam igitur m l est æqualis l k, & gl communis: angulus autem k l g maior angulo m l g: erit k g maior ipsa m g. & est k g æqualis c a. ergo c a, quām m g maior erit. Rursus quoniam k h est minor, quām m h: itemq; m h minor, quām m g: erit k h ipsa m g minor. quod cum m g sit minor, quām a c maxima earum, quæ in cono ducentur: & maior, quām a d minima; fieri potest ut à uertice ad basis circumferētiam ducatur recta linea æqualis ipsi m g, quemadmodum antea tradidimus. ducatur ergo, & sit a n; iunganturq; n b x, a x. & quoniam a n est æqualis m g; & n b ipsi g l, & b a ipsi l m: erit totum a n b triangulum triangulo m g l æquale: angulusq; a b n æqualis angulo m l g. quare & a b x angulus ipsi m l h æqualis. Rursus quoniam a b est æqualis l m, & b x ipsi l h. angulusq; a b x angulo m l h: erit & a x æqualis m h. sed a n æqualis erat m g: & basis n x basi g h. triangulum igitur a n x est æquale triangulo g m h. at triangulum g m h ad triangulum g k h, hoc est ad ipsum c a d habet eandem proportionem, quam e ad f. ergo & triangulum a n x ad a c d triangulum proportionem habet eandem, quam e ad f. Constitutū est igitur triangulum per axem a n x, quemadmodum proponebatur.

Quod si quis dicat triangulum in linea g h descriptū, maius scilicet triangulo g k h ad partes h uerticem habere, absurdum sequitur. Sit enim ita, si fieri potest. & quoniā æquales sunt k l, m l: communis autem l g: erit m l g angulus maior angulo k l g. quare & m g maior, quām k g. Eadem ratione demonstrabitur k h maior, quām h m. & cum m g sit maior, quām g k, & m h minor, quām h k; habebit m g ad g k maiorem proportionem, quām m h ad h k: permutoq; g m ad m h maiorem, quām g k ad k h. triangulum igitur g m h triangulo g k h est minus; quod fieri non potest. ponebatur enim maius. quare triangulum g m h non ad partes h, sed ad eas, in quibus est g, uerticem habebit.

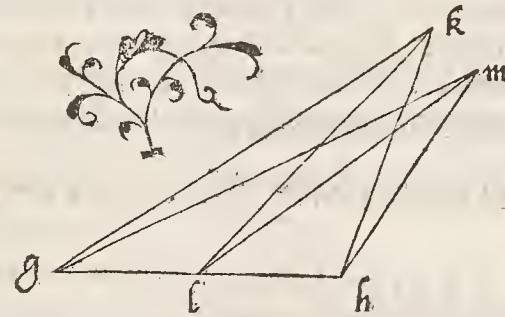
THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXVI.

Si conus scalenus plano per axem secetur ad rectos angulos ipsi basi: & linea, quæ à uertice facti trianguli ad basim perpendicularis ducitur, non minor sit basis semidiametro: erit triangulum ad rectos angulos basi maximum omnium, quæ extra axem in cono constituuntur, & bases habent dicti trianguli basi æquidistantes.

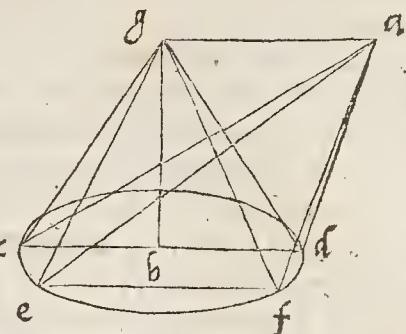
SIT conus, cuius uertex a; basis circulus circa b centrum; & secetur plano per axem, quod faciat a c d triangulum ad rectos angulos basi coni: linea uero, quæ à punto a ad c d perpendicularis ducitur, non sit minor semidiametro basis. Dico triangulum a c d maximum esse omnium, quæ in cono constituuntur, & bases habent ipsi c d æquidistantes. ducatur enim in circulo linea e f æquidistans c d: & in ipsa triangulum a e f describatur: in plano autem a c d trianguli ad rectos angulos ipsi c d erigatur b g: & ducatur a g eidem c d æquidistans. erit linea b g æqualis ei, quæ à punto a ad c d perpendicularis ducta fuerit. Itaque iunctis g c, g d, g e, g f, intelligatur conus, cuius uertex g, axis g b, & basis circulus circa b centrum descriptus; atque in co-

ex præcedenti

23. huius



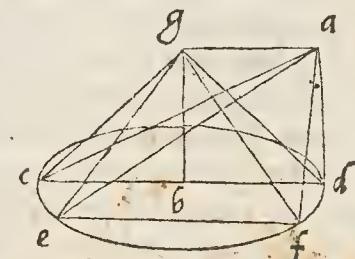
s.huius intelligentur triangula, per axem quidem gcd, extra axem uero gef. Quoniam igitur bg non est minor semidiametro basis; triangulum gcd ex iam demonstratis, maius erit triangulo gef; & maius omnibus triangulis, quae in cono constituuntur, basesq; habent ipsi cd aequidistantes. Sed triangulum gcd aequale est triangulo acd, quod sit in eadem basi, & in eisdem parallelis; triangulumq; gef aequale triangulo aef. ergo triangulum acd triangulo aef est maius. Similiter etiam maius demonstrabitur omnibus alijs, quae bases habent aequidistantes ipsi cd. triangulum igitur acd omnium eiusmodi triangulorum maximum est, quod demonstrare oportebat.



T H E O R E M A X I X . P R O P O S I T I O X X V I I .

A T si a puncto a ad cd perpendicularis ducta minor sit semidiametro basis: non erit triangulum acd maximum omnium, quae bases ipsi cd aequidistantes habent. demonstratio autem & figura eadem est.

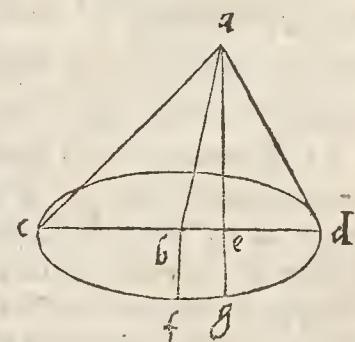
Quoniam enim gb minor est semidiametro basis; triangulum gcd non erit maximum omnium, quae bases habent ipsi aequidistantes: si quidem ut demonstrauimus, & eo maiora triangula, & minora, & aequalia constituuntur. Quod si triangulum gcd minus sit triangulo gef; & acd triangulum triangulo aef erit minus; & si maius, maius; & si aequale similiter aequale erit.



T H E O R E M A X X . P R O P O S I T I O X X V I I I .

S I cono scaleno planis per uerticem secto, in basibus aequidistantibus triangula aequicuria fiant: sitq; axis coni non minor semidiametro basis: triangulum aequicrure per axem transiens maximum erit omnium aequicurium, quae ex ea parte, ad quam axis inclinat, constituuntur.

SIT conus, cuius axis ab, basis circulus circa b centrum: trianguli uero per axe constituti ad rectos angulos ipsi circulo, basis sit cb d: & angulus abd minor sit angulo recto, ita ut ab ad partes d inclinet: sitq; ab non minor semidiametro basis. Dico triangulum aequicrure per ab transiens maximum esse aequicurium omnium, quae inter puncta bd bases habent. Sumatur enim in linea bd contingens punctum e: & ipsi cd ad rectos angulos ducatur in circulo bf, eg: & iungatur ae. Itaque ba uel minor est, quam ae, uel non minor. ponatur primum ba non minor, quam ae: & est eg minor, quam bf. ergo ab ad ae maiorem proportionem habet, quam eg ad bf: & idcirco abf rectangulum maius est rectangulo aeg. Sed rectangulo abf aequale est triangulum basim habens duplam ipsius bf, & altitudinem ab, hoc est triangulum aequicrure per axem constitutum. rectangulo autem aeg est aequale triangulum, cuius basis dupla est eg, & altitudo ae. ergo triangulum aequicrure per axem maius est aequicuri per ae constituto. Similiter quoque triangulum per axem triangulorum omnium, quae inter bd bases habent, maximum demonstrabitur.



Sed

Sed sit $b:a$ minor, quam $a:e$. & quoniam angulus $a:b$ minor est recto, ducatur in piano trianguli $a:b:e$ linea $b:h$ perpendicularis ad $c:d$, quæ ipsi $e:g$ sit æqualis: & iungantur $h:e, b:g$. Cum igitur angulus $a:b$ angulo $a:e$ sit maior: erit angulus $a:b$ minor recto: rectus autem est $h:b$. ergo lineæ $h:b, a:e$ productæ inter se conuenient. conueniant ad punctum k : & per h ducatur $h:l$ ipsi $k:e$ æquidistans. Itaque quoniam $h:b$ est æqualis $e:g$, communis autem $b:e$, & angulos æquales continent, uidelicet rectos: erit $b:g$ ipsi $h:e$ æqualis. Rursus quoniæ rectus est angulus $h:b$, linea $h:e$ maior erit, quam $h:l$. ergo $b:h$ ad $h:e$ minorem proportionem habet, quam $b:h$ ad $h:l$: ut autem $b:h$ ad $h:l$, ita $b:k$ ad $k:e$. quare $b:h$ ad $h:e$ minorem habet proportionem, quam $b:k$ ad $k:e$. Sed $b:k$ ad $k:e$ habet minorem, quam $b:a$ ad $a:e$, ut in sequenti theoremate ostendetur. multo igitur $b:h$ ad $h:e$ minorem habebit proportionem, quam $b:a$ ad $a:e$. ergo $b:a$ ad $a:e$ maiorem proportionem habet, quam $b:h$ ad $h:e$, uidelicet, quam $e:g$ ad $g:b$, hoc est ad $b:f$. quod cum $b:a$ ad $a:e$ maiorem habeat proportionem, quam $e:g$ ad $b:f$: erit rectangulum $a:b:f$ maius rectangulo $a:e:g$. Sed rectangulo $a:b:f$ æquale est triangulum æquicrure per axem: & rectangulo $a:e:g$ æquale triangulum æquicrure per æ: e, cuius basis sit dupla $e:g$. maius igitur est triangulum æquicrure per axem triangulo æquicruri per æ:e constituto. Eadem ratione demonstrabitur maius alijs, quorum bases inter puncta $b:d$ continentur. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIX.

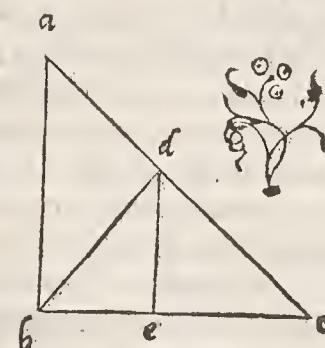
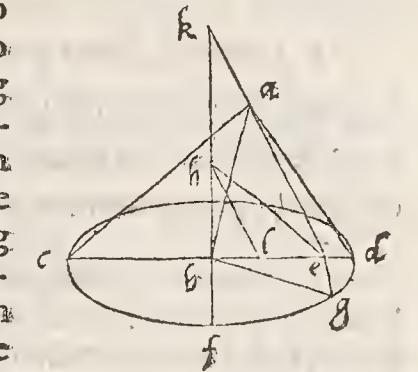
Si in triangulo orthogonio ab angulo recto ad subtensam quædam linea ducatur; habebit ducta ad partem, quæ inter ipsam & unam continetum angulum rectum interiicitur, maiorem proportionem, quam reliqua rectum angulum continens ad lineam subtensam.

SIT triangulum $a:b:c$ rectum habens angulum ad b , à quo ad $a:c$ basim ducatur linea $b:d$. Dico $b:d$ ad $d:c$ maiorem proportionem habere, quam $b:a$ ad $a:c$. ducatur enim per d linea $d:e$ ipsi $a:b$ æquidistans. & quoniam recti anguli sunt ad e ; maior erit $b:d$, quam $d:e$. ergo $b:d$ ad $d:c$ maiorem habet proportionem, quam $e:d$ ad $d:c$. sed ut $e:d$ ad $d:c$, ita $b:a$ ad $a:c$. maiorem igitur proportionem habebit $b:d$ ad $d:c$, quam $b:a$ ad $a:c$. ex quibus constat $b:a$ ad $a:c$ minorem habere proportionem, quam $b:d$ ad $d:c$. id quod nobis ad antecedens utile erit.

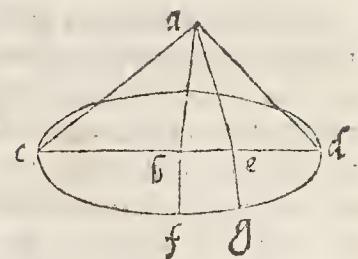
THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXX.

Si cono scaleno planis per uerticem secto, in basibus æquidistantibus æquicuria triangula constuantur ex ea parte, ad quam axis inclinat; & dictorum triangulorum unum aliquod æquale sit triangulo æquicruri per axem: recta linea, quæ à uertice ad basim trianguli perpendicularis ducitur, ipso axe maior erit.

SIT conus scalenus, cuius uertex a ; axis $a:b$ ad partes d' inclinans: & basis circulus circa centrum b : trianguli autem per axem ad rectos angulos circulo basis sit $c:b:d$:



& ad ipsam cd perpendiculares bf, eg in circulo ducantur: iungaturq; ae: & ponatur triangulum æquicrure per ae, eg transiens æqualē esse triangulo per ab, bf, hoc est triangulo æquicruri per axem. Dico ae maiorem esse ipsa ab. Quoniam enim triangulum æquicrure per ae, eg æquale eit triangulo per ab, bf: erit rectangulum ae g æquale abf rectangulo. Utigitur bf ad eg, ita ea ad ab; sed bf est maior quam eg: ergo & ea, quam ab maior erit.



T H E O R E M A X X I I I . P R O P O S I T I O X X I .

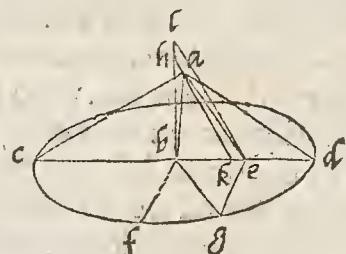
S i cono scaleno per uerticem planis secto in basibus æquidistantibus æquicruria triangula constiuantur ex ea parte, ad quam axis inclinat: & dictorum triangulorum unum aliquod æquale sit triangulo æquicruri per axem: axis coni semidiametro basis minor erit.

S I T conus scalenus, cuius uerterex a; axis ab ad partes d inclinans; & basis circulus circa b centrum: trianguli uero per axem ad rectos angulos circulo basis sit cb d: & ad ipsam cd perpendiculares in circulo ducantur bf, eg: iungaturq; ae: & ponatur triangulo per ab: & duplam bf transeunti, hoc est triangulo æquicruri per axem æquale triangulum æquicrure per ae, & duplam eg. Dico axem ab semidiametro basis minorem esse. Quoniam enim angulus abe minor est recto, ducatur in plano

A trianguli abe linea bh ad rectos angulos ipsi cd. & quoniam ea maior est, quam ab, ex ijs, quæ in antecedente demonstrata sunt, angulus bae minor est recto: rectus autem hbe. ergo linea hbe a productæ inter se conuenient, conueniant in h. Cum igitur triangulum æquicrure per axem sit æquale rectangulo abf: triangulum uero æquicrure per ae, & duplam eg æquale sit rectangulo aeg: & sint triangula æquicruria inter se æqualia: erit rectangulum abf rectangulo aeg æquale. ergo ut ba ad ae, ita eg ad bf, hoc est ad gb. Sed ba ad ae maiorem habet proportionem, quam bh ad he per uigesimam nonam huius. ergo ut ba ad ae, ita bh ad minorē, quam he,

B & ad maiorem, quam hb. Situt ba ad ae, ita bh ad hk: & per e ducatur el æquidistantis kh, conueniensq; cum bh in l. Itaque quoniā ut ba ad ae, ita bh ad hk, hoc est bl ad le: ut autem ba ad ae, ita eg ad gb: erit ut bl ad le, ita eg ad gb. sunt igitur duo triangula lbe, g eb, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, nempe rectum: circa alios autem angulos, qui ad lg latera habent proportionalia; & reliquorum angulorum uterque est acutus. ergo triangula lbe, g eb inter se similia sunt: & ut lb ad be, ita ge ad eb. quare lb ipsis ge est æqualis. minor autem est eg semidiametro basis.

C ergo & bl semidiametro basis minor erit. & quoniam utræque el, lb maiores sunt, quam utræque ea, ab. ut autem el ad lb, ita ea ad ab: & componendo ut utræque el, lb ad bl, ita utræque ea, ab ad ba: permutoandoq; sed maiores sunt utræque el, lb, quam utræque ea, ab. ergo & lb maior erit, quam ba. ostensa est autem lb minor semidiametro basis. quare & ba semidiametro basis minor erit. quod demonstrare oportebat.



C O M M E N T A R I V S.

A E T. quoniam ea maior est, quam ab, ex ijs, quæ demonstrata sunt, angulus bae minor est recto.] Nam cum ea sit maior, quam ab, erit ex decima octava primi elementorum angulus abe maior angulo bae. sed angulus abe est minor recto. ergo bae angulus recto multo minor erit.

Et

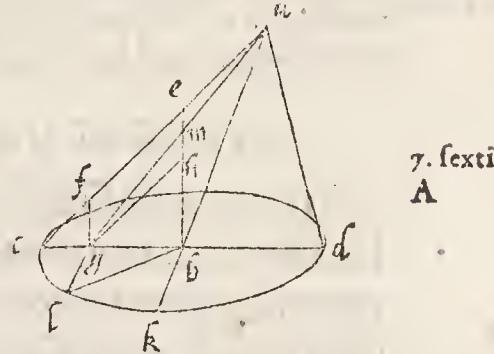
Et ad maiorem, quam hb .] Est enim ba minor ipsa ae , ut proxime demonstratum fuit. B
quare & bb minor erit ea, ad quam ita se habet, ut b à ad a .

Et quoniam utræque el, lb maiores sunt quam utræque ea, ab .] Ex uigesima prima C
primi elementorum.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXXII.

SI cono scaleno planis per uerticem secto, in basibus æquidistantibus triangula æquicuria constituantur ex ea parte, à qua axis declinat: triangulum æquicurum per axem transiens non erit omnium eiusmodi triangulorum minimum.

SIT conus scalenus, cuius axis $a b$; basis circulus circa b centrum; plani uero per axem ducti ad rectos angulos circulo, & ipsius circuli communis sectio sit diameter $c b d$: sitq; $a b d$ angulus recto minor. Dico triangulum æquicurum per axem transiens non esse minimum omnium triangulorum æquicurium, quæ inter puncta $c b$ bases habent. iungatur enim $a c$: & in triangulo $a b c$ ad rectos angulos ipsi $c d$ ducatur $b e$. Itaque quoniam $c e$ maior est semidiametro basis $c b$, sit $e f$ æqualis semidiametro, & $f g$ ducatur ipsi $e b$ æquidistans: iungaturq; $a m g$: & rursus ducatur $g h$ æquidistans $f e$. ergo $f h$ parallelogramnum est: & propterea $f e$ ipsi $g h$ est æqualis, & $g h$ æqualis semidiametro basis. denique in circuli plano ducantur $g l, b k$ ad rectos angulos ipsi $c d$: & iungatur $b l$. Quoniam igitur duo triangula orthogonia $h g b$, $l b g$ rectos angulos æquales habent: & circa alios angulos latera proportionalia, & reliquorum uterque est acutus; erunt ea triangula inter se similia; & ideo ut $g h$ ad $h b$, ita $b l$ ad $l g$. habet autem $g h$ ad $h b$ maiorem proportionem, quam $g m$ ad $m b$: & $g m$ ad $m b$ item maiorem quam $g a$ ad $a b$. ergo $g h$ ad $h b$ maiorem proportionem habebit, quam $g a$ ad $a b$. sed ut $g h$ ad $h b$, ita $b l$, hoc est $b k$ ad $l g$. quare $b k$ ad $l g$ maiorem habet proportionem, quam $g a$ ad $a b$. rectangulum igitur $a b k$ maius est rectangulo $a g l$, hoc est triangulum æquicurum per axem maius triangulo æquicuri per $a g$, cuius basis est ipsius $l g$ dupla. non ergo triangulum æquicurum per axem minimum est omnium eiusmodi triangulorum, quæ inter puncta $b c$ bases habent.

7. sexti
A

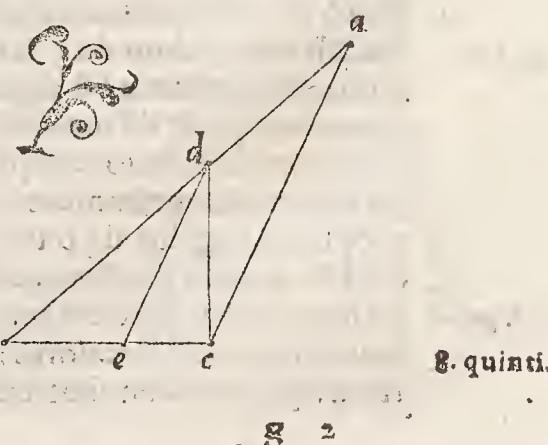
C O M M E N T A R I V S.

HABET autem gh ad hb maiorem proportionem, quam gm ad mb .] Ex se- A
cunda huius.

Et gm ad mb item maiorem, quam ga ad ab .] Illud autem nos hoc lemmate demon B
strarimus.

Sit triangulum ambligonum abc ; & ab angulo eius obtuso c ducatur cd perpendicularis ad bc , quæ lineam ba in d fecet. Dico bd ad dc maiorem proportionem habere, quam ba ad ac .

Ducatur enim à puncto d ad bc linea de ipsi ac æquidistans. erit ob triangulorum bde , bac similitudinem, ut bd ad de , ita ba ad ac . sed cum de sit maior, quam dc , subten ditur enim angulo dce recto: habebit bd ad dc maiorem proportionem, quam bd ad de , hoc est, quam ba ad ac .

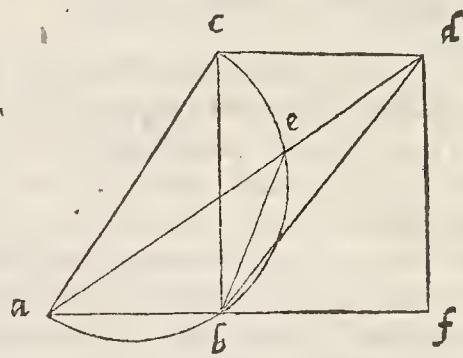


8. quinti.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXIII.

Si in eadem basi duo triangula constituantur: & alterius quidem latus sit ad rectos angulos basi: alterius uero ad angulos obtusos: sitq; ambligonii trianguli altitudo non minor altitudine orthogonii: angulus, qui ad orthogonii uerticem angulo, qui ad uerticem ambligonii maior erit.

Constituantur in basi ab triangula acb,adb: angulusq; abc sit rectus: & abd obtusus: linea uero, quæ à puncto d ad ab basim perpendicularis ducitur, uidelicet df non minor sit perpendiculari cb. Dico angulum acb angulo adb maiorem esse. Quoniā enim æquidistantes sunt b c, df, & ad rectos angulos ipsi abf; non minor autem df, quām cb: erit
19. primi.
21. tertii.
16. primi dc b angulus nō minor recto. quare ad maior est, quām ac. & cum triangulum acb orthogonium sit; in semicirculo continetur, cuius diameter ac. ergo descriptus circa ipsam semicirculus lineam ad secabit. fecet in e, & ebi iungatur. erit aeb angulus æqualis angulo acb: sed angulus aeb est maior ipso adb. ergo acb angulus angulo adb maior erit.

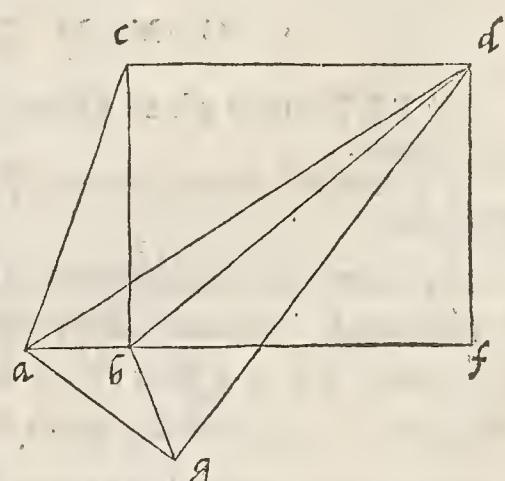


THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXXIV.

ISDEM positis, si trianguli orthogonii angulus ad uerticem nō maior sit eo, qui continetur linea uertices triangulorum coniungente, & latere ambligonii, quod obtusum angulum cum basi efficit: linea in triangulo orthogonio subtensa angulo recto ad eam, quæ est ad rectos angulos basi, minorem habet proportionem, quām subtensa angulo obtuso in ambligonio ad eam, quæ est ad angulos obtusos.

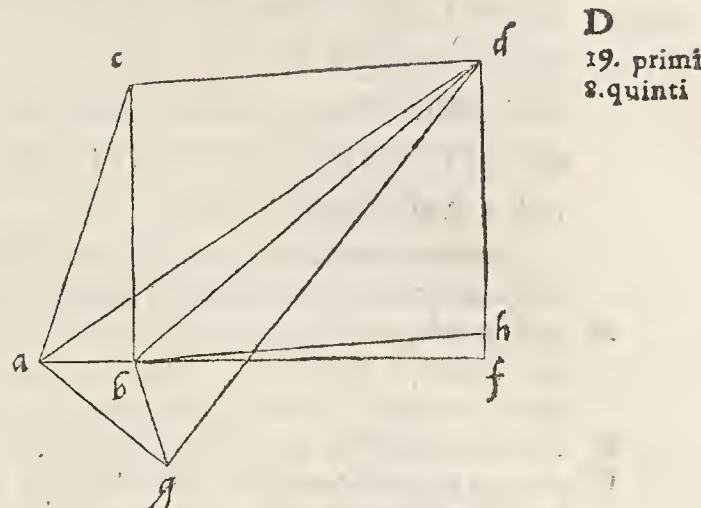
Desribantur triangula; & sit acb angulus non maior angulo cdb. Dico ac ad cb minorem habere proportionem, quām ad
in antece
dente.
6. sexti ad db. Quoniam enim angulus acb maior est angulo adb, ut ostensum fuit: & angulus cab maior dab angulo: constituatur ipsi quidem angulo acb æqualis angulus adg: angulo autem cab æqualis dag. erunt triangula acb, adg inter se similia. quare ut da ad ac, ita ga
A
B
C
29. primi ad ab: & continent æquales angulos. iuncta igitur gb triangulum dac triangulo gab simile erit: & angulus acd angulo abg æqualis. Quoniam igitur df non est minor ipsa cb; uel æqualis erit, uel maior. sit primum æqualis. ergo cdf parallelogrammum est rectangulum: & propterea angulus dc b unà cum angulis cbd
d
c
a
b
g
f
d
e
h
i
j

sed angulo cdb, hoc est dbf non est maior angulus acb. ergo angulus dc b unà cum angulis cbd, acb, uidelicet anguli acd, cbd non sunt duobus rectis maiores: angulo autem acd æqualis est angulus abg. anguli igitur abg, cbd non sunt maiores duobus rectis. apponatur angulus abc rectus,
quare



quare anguli $a b g, a b d$ non sunt maiores tribus rectis: & idcirco $d b g$ reliquus ex quatuor rectis non est recto minor. maior igitur $d g$, quam $d b$. & $a d$ ad $d g$ minorem habet proportionem, quam $a d$ ad $d b$. Sed ut $a d$ ad $d g$, ita $a c$ ad $c b$. ergo $a c$ ad $c b$ minorem proportionem habebit, quam $a d$ ad $d b$.

Sed sit $d f$ maior, quam $c b$. ergo $d c b$ angulus est obtusus. Itaque ducatur $b h$ ipsi $c d$ æquidistans. & quoniam angulus $d c b$ unà cum angulis $c b d, d b h$ est æqualis duobus rectis: angulo autem $c d b$, hoc est $d b h$ non est maior angulus $a c b$: erunt eadem ratione, qua supra, anguli $a c d, c b d$, hoc est $a b g, c b d$ non maiores duobus rectis. ergo $a b d, a b g$ non sunt maiores tribus rectis; & $d b g$ non est recto minor. quare $g d$ maior est, quam $d b$; ideoq; $a d$ ad $d g$ minorem E habet proportionem, quam $a d$ ad $d b$. quod demonstrare oportebat.



COMMENTARIUS.

Et continent æquales angulos.] *Factus est enim angulus $d a g$ æqualis ipsi $c a b$. quare dempto communi angulo $d a b$, reliquus $g a b$ reliquo $d a c$ æqualis erit.* A

Et propterea angulus $d c b$ unà cum angulis $c b d, d b f$ est æqualis duobus rectis.] B
Ex 29. primi elementorum.

Sed angulo $c d b$, hoc est $d b f$ non est maior angulus $a c b$.] Ex positione scilicet. C

Et idcirco $d b g$ reliquus ex quatuor rectis.] Ex 13. primi elementorum. D

Ideoq; $a d$ ad $d g$ minorem habet proportionem, quam $a d$ ad $d b$, quod demonstrare oportebat.] Non hoc est, quod demonstrare oportet, sed illud potius $a c$ ad $c b$ minorem proportionem habere, quam $a d$ ad $d b$, quod quidem ex his eodem, quo supra, modo concludetur. Hoc theorema à Sereno ita quidem demonstratum inuenitur. Sed non video cur necesse sit ducere lineam ipsi $e d$ æquidistantem, & demonstrationem in duas partes secare. nam siue angulus $d c b$ rectus sit, siue obtusus, trianguli $b c d$ tres angulos duobus rectis æquales esse manifesto constat. Quare una eademq; demonstratio in utroque casu satisfacere poterit, hoc modo.

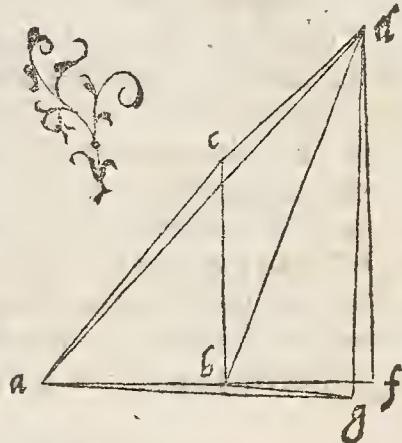
Describantur triangula; & sit $a c b$ angulus non maior angulo $c d b$. Dico $a c$ ad $c b$ minorem habere proportionem, quam $a d$ ad $d b$. Quoniam enim angulus $a c b$ maior est angulo $a d b$, ut ostensum fuit: & angulus $c a b$ maior $d a b$. angulo: constitutatur ipsi quidem angulo $a c b$ æqualis angulus $a d g$: angulo autem $c a b$ æqualis $d a g$. erunt triangula $a c b, a d g$ inter se similia. quare ut $d a$ ad $a c$, ita $g a$ ad $a b$; & continent æquales angulos. iuncta igitur $g b$ triangulum $d a c$ triangulo $g a b$ simile erit. angulus autem $b c d$ unà cum angulis $c b d, c d b$ est æqualis duobus rectis: & angulo $c d b$ non est maior angulus $a c b$. ergo $b c d$ angulus unà cum angulis $c b d, a c b$, uidelicet anguli $a c d, c b d$ non sunt duobus rectis maiores. Sed angulo $a c d$ æqualis est angulus $a b g$, propter similitudinem triangulorum $a c d, a b g$. anguli igitur $a b g, c b d$ non sunt maiores duobus rectis. apponatur angulus $a b c$ rectus. quare anguli $a b g, a b d$ non sunt maiores tribus rectis: & idcirco $d b g$ reliquus ex quatuor rectis non est recto minor. maior igitur est $d g$, quam $d b$; & $a d$ ad $d g$ minorem habet proportionem, quam $a d$ ad $d b$. sed ut $a d$ ad $d g$, ita $a c$ ad $c b$. ergo $a c$ ad $c b$ minorem proportionem habebit, quam $a d$ ad $d b$. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXV.

IIS DEM positis, si in triangulo orthogonio subtensa angulo recto

ad eam, quæ est ad rectos angulos basi maiorem proportionem habeat, quām angulo obtuso subtenſa in ambiligonio ad eam, quæ est ad angulos obtusos: angulus ad uerticem orthogonij maior est angulo, qui linea uertices triangulorum coniungente, & ea, quæ est ad angulos obtusos basi continetur.

- Ponatur eadem figura, iisdem constructis. Quoniam ac ad cb maiorem proportionem habet,
- A quām ad db: ut autem ac ad cb, ita ad ad dg: habebit ad ad dg maiorem proportionem, quām ad db: & ob id minor erit gd, quām db.
 - B angulus igitur dbg minor est recto. quare reliqui
 - C abd, abg tribus rectis sunt maiores. Sed angulus abg æqualis est angulo acd. ergo acd, abd anguli maiores sunt tribus rectis. auferatur angulus rectus abc. erunt acd, cbd anguli duobus rectis maiores. Quoniam igitur angulus bcd unā cum angulis acb, cbd est maior duobus rectis;
 - D unā uero cum ipsis cdb, cbd est duobus rectis æqualis: sequitur angulum acb angulo cdb maiorem esse.



C O M M E N T A R I V S.

- A *Vt autem ac ad cb, ita ad db ad dg.] Positum enim est triangulum acd triangulo acb simile.*
- B *Angulus igitur dbg minor est recto.] Nam cum sit gd minor, quām db, erit ex decima octaua primi angulus dgb maior angulo dbg. ergo dbg est recto minor; si enim esset rectus, trianguli bdg tres anguli duobus rectis maiores essent.*
- C *Sed angulus abg æqualis est angulo acd.] Ob triangulorum acd, abg similitudinem.*
- D *Quoniam igitur angulus bcd unā cum angulis acb, cbd est maior duobus rectis.] Sunt enim hi tres anguli æquales angulis acd, cbd, qui duobus rectis maiores erant.*

T H E O R E M A X X V I I I . P R O P O S I T I O X X X V I .

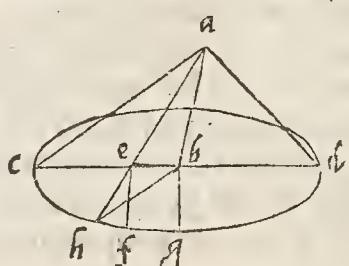
Si cono scaleno per uerticem planis secto, in basibus æquidistantibus triangula æquicuria constituantur ex ea parte, à qua axis declinat: triangulum æquicrure per axem transiens omnium eiusmodi triangulorum neque maximum, neque minimum erit.

Sit conus, cuius axis ab, & basis circulus circa b centrum: plani uero per axem ad rectos angulos circulo, & ipsis circuli communis sectio sit cbd; sitq; abd angulus recto minor. Dico triangulum æquicrure per axem triangulorum omnium æquicrurium, quæ bases habent inter puncta cb, neque maximum esse, neque minimum. uel enim axis est minor basis semidiametro, uel maior, uel ipsi æqualis. sit primum minor. & quoniam ab minor est semidiametro basis, aptetur ae æqualis semidiametro: perq; puncta b & e ducantur in circulo ef bg ad rectos angulos ipsi c d: & angulo a eb æqualis constituatur ebh:

& h e iungatur. quoniā igitur utraque ae, bh æqualis est semidiametro: communis autem be, & continent æquales angulos: & reliqua latera æqualia, & triangula inter-

A se similia erunt. ergo ut ea ad ab, ita bh ad he. & quoniam ef maior est, quām eh; æquales autem bg, bh; habebit bh ad he maiorem proportionem, quām bg ad fe.

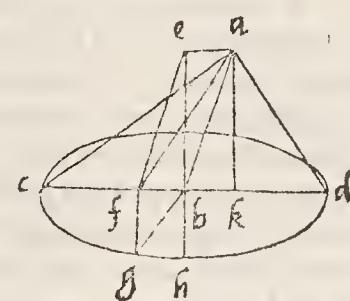
Sed



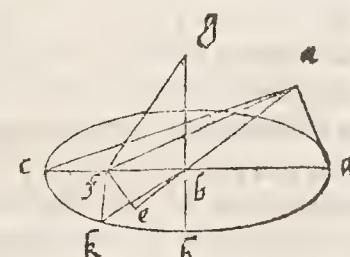
Sed ut $b h$ ad $h e$, ita ea ad ab . quapropter ea ad ab maiorem proportionem habet, quam bg ad ef : & idcirco rectangulum aef maius est rectangulo abh : hoc est triangulum æquicrure per ae , cuius basis est dupla ef , maius triangulo æquicruri per axem. triangulum igitur æquicrure per axem non est omnium eiusmodi triangulorum maximum. Sed sit axis ab semidiametro æqualis. Itaque angulus abd recto minor, uel minor est medietate recti, uel non. Sit primum non minor medietate recti: & per a in plano ad circulum recto ducatur $a e$ ipsi cb æquidistans, & ef æquidistans ab : iungaturq; fa : in circulo autem ducantur bh, fg ad rectos angulos ipsi cd : & bg iungatur. Quoniam igitur angulus abd non est minor medietate recti: neque bae medietate recti minor erit. ergo eb a, hoc est fe b non est maior medietate recti: & ideo fe b angulus non maior est angulo eab . Itaque duo triangula feb , fab in eadem basi constituta sunt: & perpendicularis à puncto a ad cd ducata, uidelicet ak non est minor ipsa eb : angulus autem feb orthogonii trianguli non maior angulo eab . quare ex trigesimo quarto theoremate, fe ad eb minorem habet proportionem, quam fa ad ab . Sed ut fe ad eb , ita bg , hoc est bh ad fg , æqualis enim est ef ipsi semidiametro. ergo bh ad fg minorem habet proportionem, quam fa ad ab : & propterea rectangulum abh minus est rectangulo afg , hoc est triangulum æquicrure per axem minus triangulo æquicruri per af . non igitur triangulum æquicrure per axem omnium eiusmodi triangulorum maximum erit.

Sit deinde abd angulus minor medietate recti: & producatur ab usque ad e , ita ut be sit æqualis dimidio semidiametri: in plano autem ad circulum recto, in quo est ae ducatur ef ad ipsam perpendicularis: & bg perpendicularis ad cd : & angulo fbg subtendatur fg æqualis semidiametro: iungaturq; fa . Quoniam igitur angulus abd , hoc est fbe minor est medietate recti: rectus autem, qui ad e : erit be maior quam ef : & est quadratum fb æquale quadratis fe, eb , quorum quidem quadratum eb maius est quadrato fe . ergo quadratum fb minus est, quam duplum quadrati be : & propterea quadratum fg maius, quam duplum quadrati fb . reliqui igitur quadrati bg erit quadratum fg minus, quam duplum. & quoniam eb dimidia est semidiametri; quod bis continetur ab, be æquale est quadrato ba . Sed quadratum fa est æquale quadratis ab, bf , & duplo rectanguli ab e . duplum uero rectanguli ab e æquale est quadrato ab . quadratum igitur fa duplo quadrati ab , & quadrato bf æquale erit. ergo quadratum fa maius est, quam duplum quadrati ab . demonstratum autem est quadratum fg minus, quam duplum quadrati gb . quadratum igitur fg ad quadratum gb minorem proportionem habet, quam quadratum fa ad ab quadratum. ergo & fg ad gb minorem proportionem, quam fa ad ab . Quod si rursus in circulo ducantur fk, bh ad rectos angulos ipsi cd , & iungatur bh : habebit bh ad fk minorem proportionem, quam fa ad ab . Triangulum igitur æquicrure per axem minus est triangulo æquicruri per af ducto. quare triangulum æquicrure per axem non erit omnium triangulorum, de quibus dictum est, maximum.

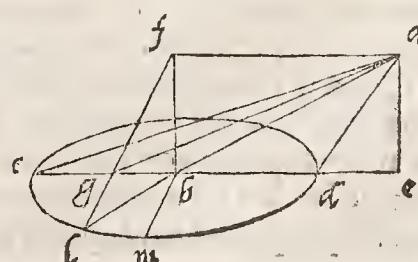
Denique sit axis ab semidiametro maior: & in plano ad circulum recto ducatur $a e$ ad cd perpendicularis: quæ uel minor erit semidiametro, uel non minor. Sit primum minor: perq; a ducatur af ipsi cd æquidistans: & per b ipsa bf æquidistans $a e$: & constituatur angulus bfg non maior angulo fab : iungaturq; ga . Rursus ex iam demonstratis



1.huius

C
47. primi
D
E

12. secundi

17. huius
F

34. huius

S E R E N I L I B E R I I.

gf ad fb minorem proportionem habebit, quam ga ad ab : Itaque quoniam fb æqualis ae est minor semidiametro: & gf maior, quam fb : erit fg uel maior semidiametro, uel minor, uel æqualis. Sit primum æqualis, & in circulo ducantur gl, bm ad ipsam cd perpendiculares, ut superius factum est: & iungatur bl . per ea, quæ satis demonstrata sunt, habebit ga ad ab maiorem proportionem, quam bm ad gl . quare triangulum æquicrure per ag , gl maius est triangulo per axem æquicruri.

Si uero fg est minor semidiametro, sit gn semidiametro æqualis. & quoniam ga ad ab maiorem proportionem habet, quam gf ad fb : gf uero ad fb maiorem habet, quam gn ad nb : habebit ga ad ab maiorem proportionem, quam gn ad nb , hoc est quam bm ad gl ; & ita triangulum æquicrure per ag, gl triangulo æquicruri per axem maius erit.

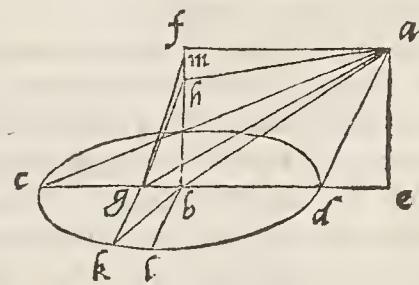
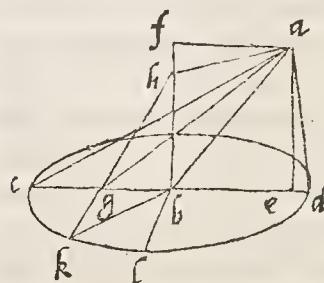
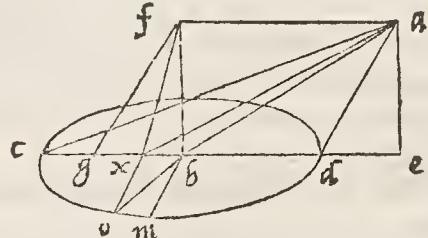
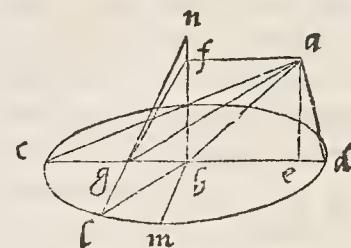
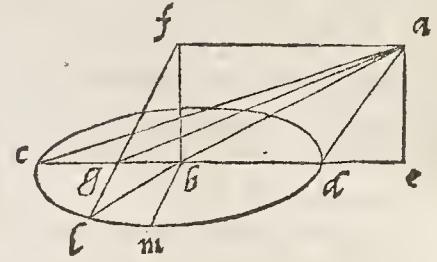
At si fg sit semidiametro maior, ducatur fx ipsis æqualis. Quoniam igitur xfb angulus non est maior angulo fab , iuncta xa ad ab maiorem proportionem habebit, quam xf ad fb : ut autem xf ad fb , ita bm ad xo . ergo xa ad ab maiorem proportionem habebit, quam mb ad xo : & propterea triangulum æquicrure per ax , xo maius est triangulo æquicruri per axem.

Sit perpendicularis ae non minor semi diametro; & fb semidiametro æqualis: iungaturq; af ; & ducatur linea, ut contingit ah : constituantur autem bhg angulus non maior angulo hab ; & iungatur ga . habebit rursus ex iis, quæ demonstrata sunt, gh ad hb minorem proportionem, quam ga ad ab . & quoniam hb minor est semidiametro: maior autem gh , quam hb : erit gh uel æqualis semidiametro, uel minor, uel maior. sit primum æqualis; & ducatur in circulo gk, bl ad rectos angulos ipsi cd . Cum igitur ga ad ab maiorem habeat proportionem, quam gh ad hb : & ut gh ad hb , ita bl ad gk : ga ad ab maiorem proportionem habebit, quam bl ad gk . ergo triangulum æquicrure per ag, gk triangulo æquicruri per axem maius erit.

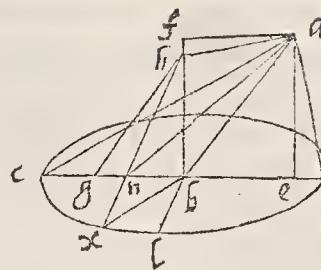
Si uero hg est minor semidiametro, sit semidiametro æqualis gm . Itaque quoniam ga ad ab maiorem habet proportionem, quam gh ad hb : & gh ad hb , item maiorem, quam gm ad mb : habebit ga ad ab maiorem proportionem, quam gm ad mb , hoc est, quam bl ad gk . Quare & ita maius erit triangulum æquicrure per ag, gk , triangulo per axem æquicruri.

Quod si gh est maior semidiametro, aptetur hn semidiametro æqualis; iungaturq; na ; & in circulo rursus ipsis cb ad rectos angulos ducatur nx . Quoniam igitur nhb angulus non est maior angulo hab : nh ad hb minorem habet proportionem, quam na ad ab : ut autem nh ad hb , ita bl ad nx . quare bl ad nx minorem habebit proportionem, quam na ad ab . maius igitur est triangulum æquicrure per

an



an, n x triangulo æquicruri per axem. ex quibus sequitur triangulum æquicrure per axem dictorum triangulorum æquicrurum non esse maximum: demonstratum autem est in trigesima secunda huius generaliter neque minimū esse. ergo neque maximum neque minimum erit. quod oportebat demonstrare.



COMMENTARIUS.

ET quoniam $e f$ maior est, quam $e h$.] Nam cum triangula $a e b, b h e$ similia sint, erit A
angulus $b e h$, & qualis scilicet angulo $e b a$, obtusus, & maior recto $b e f$. quare punctum h inter
 c & f cadit: & propterea ex septima tertij elementorum maior est $e f$, quam $e h$.

Sed ut fe ad $e b$, ita bg , hoc est $b h$ ad fg : & qualis enim est $e f$ ipsi semidiametro.] B
Etenim $e f$ est & qualis ipsi ab , quam semidiametro & quale posuimus. sunt igitur duo triangula
 $fe b, bgf$, quæ unum angulum uni angulo & quale habent, nempe rectum: & circa alios angulos
latera proportionalia, immo uero & qualia: & reliquorum angulorum uterque est minor recto. ergo
ea & & qualia, & inter se similia erunt. Ut igitur fe ad $e b$, ita erit bg ad gf ; hoc est $b h$ ad fg .

Erit $b e$ maior, quam $e f$.] Quoniam enim angulus $f b e$ minor est medietate recti, & re-C
ctus, qui ad e ; erit $b fe$ maior medietate recti; & ideo maior, quam $fb e$. quare sequitur lineam
 $b e$ ipsa $e f$ maiorem esse. 19. primi.

Et propterea quadratum fg maius, quam duplum quadrati fb .] Quoniam enim fg
& qualis semidiametro, dupla est ipsius $b e$: erit quadratum fg quadrati $b e$ quadruplum. quadra-
tum autem fb minus est, quam duplum quadrati $b e$. ergo quadratum fg maius erit, quam du-
plum quadrati fb .

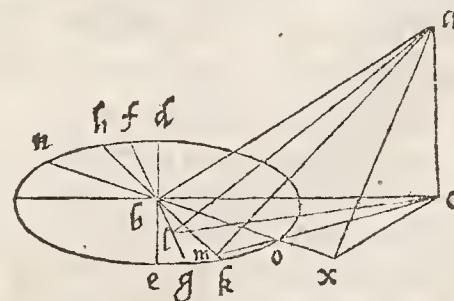
Reliqui igitur quadrati bg , erit quadratum fg minus, quam duplum.] Nam cum E
quadratum fg sit & quale duobus quadratis fb, bg : sitq; quadratum fb minus, quam duplum qua-
drati $b e$; erit reliquum quadratum bg maius, quam duplum eiusdem $b e$ quadrati, & ideo qua-
dratum fg quadrati bg minus erit, quam duplum.

Habebit $b h$ ad fk minorem proportionem, quam fa ad ab .] Erit & quoniam triangu-F
lum $b kf$ simile triangulo fgb : quod superius demonstratum est. Cum igitur fg ad gb minorem
habeat proportionem, quam fa ad ab ; & $b k$, hoc est $b h$ ad fk minorem proportionem habe-
bit, quam fa ad ab .

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXVII.

IN omni cono scaleno, cum triangula per axem potestate infinita
sint; lineæ, quæ à uertice coni ad bases dictorum triangulorum perpen-
diculares ducuntur, omnes in unius circuli circumferentiam cadunt:
qui quidem est in eodem plano, in quo basis coni, & circa diametrum
interiectam inter centrum basis, & perpendiculararem, quæ à uertice co-
ni ad dictum planum ducitur.

SIT conus scalenus, cuius uertex a punctum; basis circulus circa centrum b ; &
axis ab : à punto autem a ad basis planū perpendicularis sit ac . & iungatur cb , cui
ex pūcto b ad rectos angulos ducatur bd in eodem plano: & ducantur, ut contingit,
lineæ fg, h . erunt de e, fg, h bases triangulorum, quæ per axem transeunt. Itaque
à punto a ad lineas de, fg, h & perpendicularares ducantur ab, al, am . At uero axem
 ab perpendiculararem esse ad de : & perpendicularares al, am ad partes bg, bk cadere deinceps ostendetur. Dico pūcta $b l m$
 h



S E R E N I L I B E R . I I .

3. diff. un
decimi

in unius circuli circumferentia esse, cuius diameter est recta linea b c. iungatur enim c l, c m. & quoniam al perpendicularis est ad f g, erit f l a angulus rectus. Rursus quoniam a c ad basis planum est perpendicularis; anguli a c b, a c l, a c m recti erunt. quare cum a b quadratum æquale sit quadratis b l, l a : & quadrati l a quadratis l c, c a æquale: erit quadratum a b æquale tribus quadratis b l, l c, c a. est autem & æquale quadratis b c, c a. quadrata igitur b c, c a quadratis b l, l c, c a æqualia sunt. communne auferatur quadratum c a. erit reliquum quadratum b c æquale quadratis b l, l c: & idcirco angulus b l c in basis plano rectus. Rursus quoniam quadratum a b æquale est quadratis b m, m a: & quadratum m a æquale quadratis m c, c a: erit a b quadratum æquale quadratis b m, m c, c a. sed & æquale est quadratis b c, c a. ergo communni c a ablato, relinquitur quadratum b c quadratis b m, m c æquale. rectus igitur angulus est & b m c in basis plano: quare puncta b l m sunt in circumferentia circuli; cuius diameter est b c. Similiter & ductis alijs quibuscumque lineis, ut n o x, idem contingere demonstrabimus. quod quidem demonstrare oportebat.

Axem uero a b perpendicularem esse ad ipsam d e; & perpendicularares a l, a m cadere ad partes b g, b k: hoc modo ostendemus.

Iunctis enim a d, a e, erit d a e triangulum æquirure: & ideo linea, quæ à uertice a ad punctum basim bifariam diuidens ducitur, perpendicularis est ad d e. iungantur c f, c g, a f, a g. & quoniam angulus f b c obtusus est, acutus autem c b g; erit linea f c major, quam c g: & quadratum f c maius quadrato c g. ergo communis apposito quadrato a c; quadrata f c, c a. quadratis g c, c a maiora sunt; hoc est quadratum f a maius quadrato a g. maior igitur est f a, quam a g. suntq; f b, b g inter se æquales; communis autem b a; & maior f a, quam a g. ergo angulus f b a obtusus est, & a b g acutus. linea igitur à punto a ad f g perpendicularis ducta ad partes b g cadit. Eodem modo & in alijs demonstrabitnr.

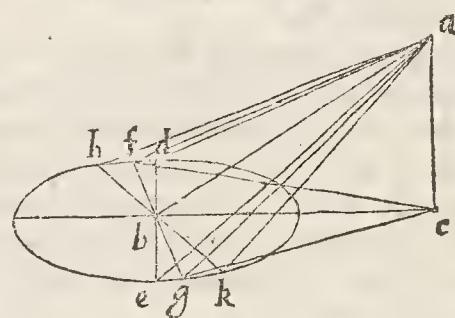
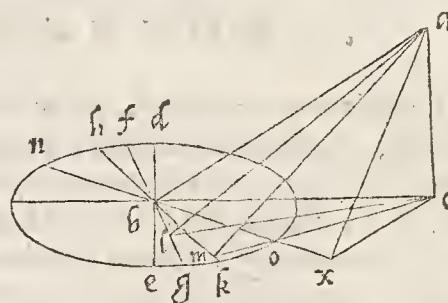
Quare constat dictas perpendicularares à punto sublimi ad circuli circumferentiam cadentes in coni superficie ferri: cuius quidem basis est circulus à casu perpendicularium descriptus, & uerx idem, qui est primi coni uerx.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO XXXVIII.

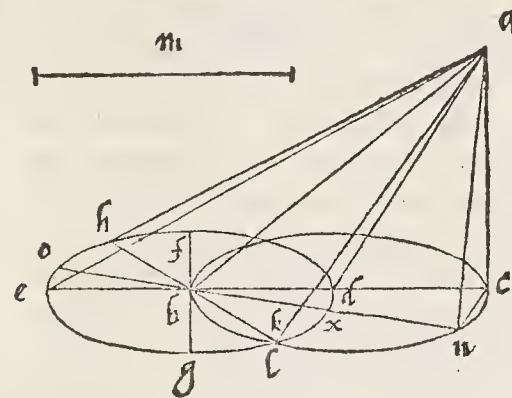
IN cono scaleno dato aliquo triangulo per axem, quod neque maximum sit, neque minimum: inuenire aliud triangulum per axem, quod una cum dato, utrisque maximo & minimo per axem sit æquale.

SIT conus scalenus, cuius uerx a punctum; basis circulus circa centrū b; axis autem a b; & a c ad basis planum perpendicularis. ducaturq; per c & b centrum linea c d b e; cui ad rectos angulos fit f b g. triangulorum igitur, quæ per axem trans-eunt, maximum quidem erit illud, cuius basis f g, & a b altitudo, ut saepius demonstratum est: minimum uero, cuius basis e d, & altitudo a c. Sit datum triangulum per axem, quod basim habeat h k, altitudinemq; a l & oporteat aliud triangulum per axem inuenire, quod una cum eo, cuius basis h k, & altitudo a l utrisque maximo & minimo sit

22. huius



mo sit æquale. Itaque quoniam al perpendicularis est ad basim h k, erit punctum l in circumferentia circuli, cuius diameter b c, ex proxime demonstratis. describatur circulus b l c: & quo utræque lineæ b a, a c superant al, ei sit æqualis m. Quoniam igitur linearum, quæ à puncto a ad circumferentiam b l c ducuntur, maxima quidem est a b, minima uero a c: erit al minor, quam a b, & maior, quam a c. Sed al unâ cum m est æqualis utrisque b a, a c, quarum al est minor, quam a b. ergo m, quam a c maior erit; & quadratū m maius quadrato a c. sint quadrato m æqualia quadrata a c, c n, linea c n in circulo aptata: ducaturq; n x b o; & na iungatur. erit angulus b n c in semicirculo rectus. quadratum autem a b æquale est quadratis b c, c a; & quadratum b c æquale quadratis b n, n c. ergo quadratum a b quadratis b n, n c, c a æquale erit. quorum quadratis n c, c a æquale est quadratum n a. quadratum igitur a b est æquale quadratis b n, n a: & idcirco angulus b n a rectus. quare a n est altitudo trianguli per axem; cuius basis o b x. & quoniam quadratum m est æquale quadratis a c, c n: & quadratum a n eisdem quadratis æquale; linea m lineæ a n æqualis esit. quare utræque lineæ l a, a n æquales utrisque b a, a c: & rectangulum contentum diametro, & utrisque l a, a n æquale ei, quod diametro & utrisque b a, a c cointinetur. sed rectangulum ex diametro, & utrisque b a, a c duplum est trianguli maximi, & minimi, quorum bases f g, e d, & altitudines b a, a c: rectangulum uero ex diametro, & utrisque l a, a n duplum est triangulorum, quorum bases h k, o x, & altitudines l a, a n. triangula igitur, quorum bases h k, o x, & altitudines l a, a n æqualia sunt triangulis maximo & minimo per axem: & datum est triangulum in basi h k. ergo triangulum per axem in basi o x inuentum est, quod unicum dato utrisque maximo & minimo sit æquale.



THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXIX.

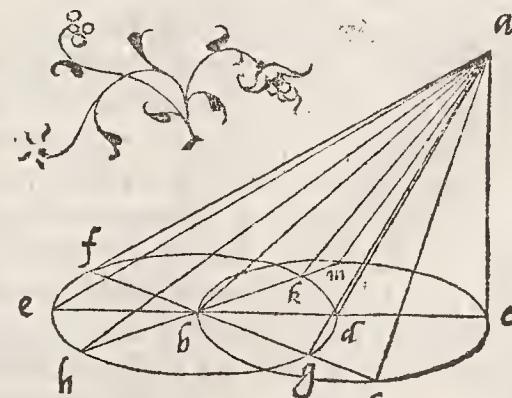
Si duorum triangulorum per axem bases abscindant æquales circumferentias ad diametrum, quæ per lineam perpendiculararem ducitur; triangula inter se æqualia erunt. uocentur autem eiusdem ordinis.

ὅμοταγή

SIT conus, cuius uertex a punctum; basis circulus circa centrum b; & axis a b: perpendicularis autem ad basim a c: & per c punctum perpendicularis diameter fit c d b e: ducanturq; f b g, h b k, quæ ad e d æquales circumferentias k d, d g abscindat.

Dico triangula per axem, quorum bases f g, h k, inter se æqualia esse. describatur enim circa b c diametrū circulus b l c m, & iungantur al, a m, quæ perpendicularares erunt: al quidem ad f g; a m uero ad h k. & quoniam angulus c b m æqualis est angulo c b l; & linea m b ipsi b l æqualis erit. sed quadratū a b quadratis a m, m b est æquale: itemq; æquale quadratis a l, l b. ergo quadrata a m, m b æqualia sunt a l, l b quadratis. quorum quadratū m b est æquale quadrato b l. reliquum igitur quadratum m a æquale est quadrato a l; & linea l a æqualis ipsi a m, quæ quidem sunt triangulorum altitudines; quorū

37. huinc



S E R E N I L I B E R II.

bases fg, hk . ergo triangula per axem in basibus fg, hk constituta inter se æqualia erunt. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XL.

Triangulorum per axem, quæ eiusdem sunt ordinis, & æqualia & inter se similia erunt.

SINT triangula eiusdem ordinis, ut in antecedenti figura fag, hak . Dico & æqualia, & iter se similia esse. æqualia enim iam demonstrata sunt: similia uero hoc modo demonstrabimus. Quoniam ab in utroque triangulorum ducta est à uertice ad punctum, quod basim bifariam dividit: & quadratum ab quadratis am, mb est æquale; itemq; æquale quadratis al, lb ; quorum quadratum am æquale est quadrato al : erit reliquum mb quadratum quadrato bl æquale: & linea mb æqualis ipsi bl . quare & tota mh toti lf est autem ma æqualis la . ergo & quæ ex ipsis efficiuntur, quadrata inter se sunt æqualia, hoc est quadratum af æquale quadrato ah : & propterea linea af linea ah . similiter etiam ak ipsi ag æqualis demonstrabitur. Sed & bases fg, hk sunt æquales. triangula igitur fag, hak , & æqualia, & inter se similia erunt.

Manifestum autem est, & huius theorematis conuersum.

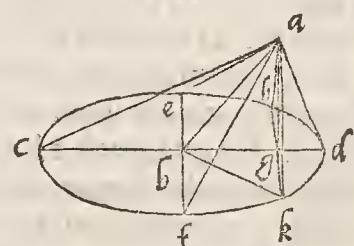
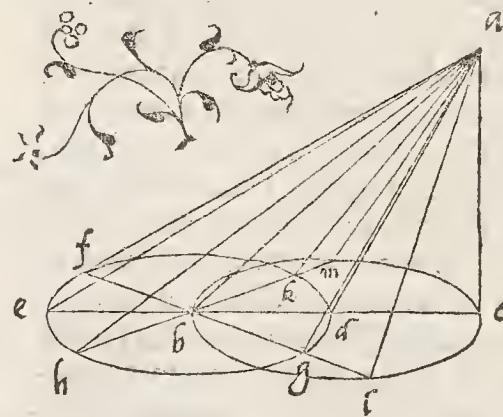
THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XLI.

Si coni scaleni axis æqualis sit basis semidiametro; erit ut maximum triangulorum, quæ per axem constituuntur ad minimum, ita minimum ad æquicrure, quod est ad rectos angulos basi.

18. unde-
cimi

Sit conus scalenus, cuius uertex punctum a ; & axis ab recta linea, quæ sit æqualis semidiametro basis: basis uero circulus circa b centrum: & triangulorum per axem, ad rectos quidem angulos basi fit cad , æquicrure autem eaf . erit eaf maximum omnium, quæ per axem constituuntur, & cad minimum, ex iis, quæ prius demonstrata sunt. Ducatur à puncto a ad basim perpendicularis ag , quæ in diametrum cd cadet: & hgk ad rectos angulos ipsi cd : ducaturq; planum faciens triangulum æquicrure hak , quod ad basim rectum erit. Dico ut triangulum eaf maximum scilicet eorum, quæ per axem constituuntur ad cad minimum, ita cad ad æquicrure hak . Quoniam enim triangulorum eaf, cad bases sunt æquales, diametri scilicet $e f, c d$: altitudo autem trianguli eaf est ba : & ipsius cad altitudo ag : erit ut ba ad ag , ita eaf triangulum ad triangulum cad . Rursus quoniam triangulorum cad, hak eadem est altitudo ag : trianguli autem cad basis cd , hoc est ef : & trianguli hak basis hk : erit ut ef ad hk , ita triangulum cad ad triangulum hak . Sed ut ef ad hk , ita earum dimidiae, hoc est bk ad kg : & ut bk ad kg , ita ba ad ag : similia etenim sunt triangula orthogonia bgk, bga . triangulum igitur cad ad triangulum hak est ut ba ad ag . erat autem & triangulum eaf ad ipsum cad , ut ba ad ag . ergo ut eaf triangulum ad triangulum cad , ita cad ad triangulum hak . quod oportebat demonstrare.

THEO-



THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XLII.

RVRVS sit ut triangulum eaf ad cad, ita cad ad hak. Dico axem ba semidiametro basis æqualem esse.

Quoniam enim ut triangulum eaf ad cad, ita ba ad ag: & ut eaf ad cad, ita cad ad hak: erit ut cad ad hak, ita ba ad ag. Vt autem cad ad hak, ita ef ad hk, hoc est bk ad kg. ergo ut ba ad ag, ita bk ad kg. & sunt triangula bag, bkg similia: & eiusdem rationis ab, bk linea igitur ab ipsi bk, uidelicet semidiametro basis æqualis erit. quod ostendendum proponebatur.

Simil uero & illud ostensum est in altera demonstratione triangulum eaf simile esse triangulo hak.

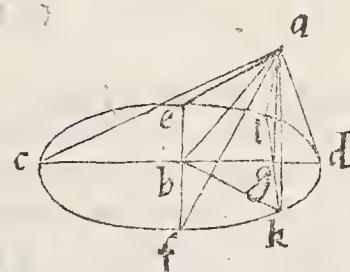
Vt enim ef ad hk, ita ba ad ag. triangulum autem eaf ad triangulum hak duplam habet proportionem eius, quam triangulum cad habet ad triangulum hak. estq; cad triangulum ad triangulum hak, ut cd, hoc est, ut ef ad hk. quare triangulum eaf ad ipsum hak duplam proportionem habebit laterum eiusdem rationis, uidelicet ef, hk: & idcirco triangula eaf, hak inter se similia erunt.

Ex quibus perspicuum est, si coni scaleni axis æqualis sit basis semidiametro; triangulum æquicrure ad rectos angulos basi, simile esse triangulo per axem æquicruri: & contra, si triangulum æquicrure ad rectos angulos basi simile sit triangulo per axem æquicruri; coni axem semidiametro basis æqualem esse. quod ex iam demonstratis facile intellegi potest.

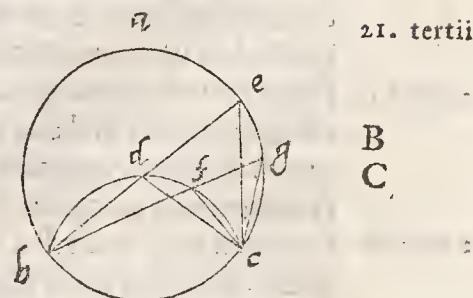
THEOREMA XXXIV. PROPOSITIO XLIII.

Si circulus circulum secet per centrum ipsius descriptus: & ab altera eorum sectione ducantur lineaæ secantes circumferentiam, quæ per centrum transit, & ad alterius circuli circumferentiam protrahantur: recta linea inter conuexam alterius circuli circumferentiam, & inter concavam alterius interiecta æqualis est lineaæ, quæ à communi sectione lineaæ ductæ, & circumferentiae per centrum, ad alteram communem circulorum sectionem perducitur.

SIT circulus abc circa centrum d: & per d alius circulus dbc describatur, secans priorem circulum in punctis bc: ducanturq; rectæ lineaæ; per d quidem bde; alia uero ut contingit bfg: & dc, fc iungantur. Dico lineam gf ipsi fc æqualem esse. iungantur enim ec, cg. & quoniam angulus bdc æqualis est angulo bfc: erit reliquus edc reliquo gfc æqualis. sed & æqualis est dec ipsi fgc, quod in eadem circumferentia consistat. reliquis igitur est æqualis reliquo; & triangula inter se similia sunt: æquicrure autem est triangulum cde. ergo & æquicrure cfg: & linea gf ipsi fc æqualis. similiter & in aliis lineis ductis idem demonstrabitur. Rursus in eadem figura ponatur ed ipsi dc æqualis, & gf æqualis fc, circumferentia bdc bifariam in d punto divisa. Dico circulum ex centro d, & inter-



ex cōuer-
sa 19. se
xti



21. tertii

B
C

S E R E N I L I B E R II.

uallo d b, uel d c descriptum per puncta e g transire. Quoniam enim angulus e d c æqualis est angulo g f c: & sunt triangula e d c, g f c æquicuria, anguli b e c, b g c inter se æquales erunt: & propterea in eodem circulo continebuntur. circulus igitur ex centro d, & interuallo d b descriptus per puncta e g transibit. quod oportebat demonstrare.

C O M M E N T A R I V S.

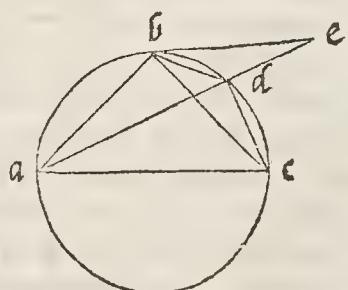
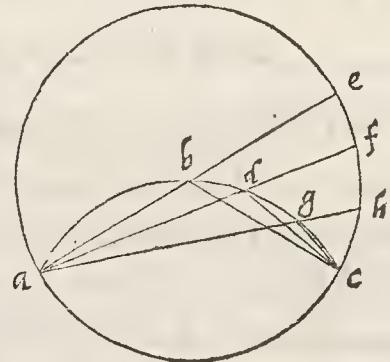
- A Dico lineam g f ipsi f c æqualem esse.] In græco codice ita legitur. $\lambda\acute{\epsilon}\gamma\omega\acute{\sigma}t\acute{\iota}$ $\acute{\iota}\acute{\sigma}\eta\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ $\acute{\iota}\acute{\mu}\acute{\epsilon}\acute{\nu}\acute{\epsilon}\acute{\delta}\acute{\tau}\acute{\iota}\acute{\delta}\acute{\gamma},$ $\acute{\iota}\acute{\delta}\acute{\epsilon}\acute{\zeta}\acute{\nu}\acute{\tau}\acute{\iota}\acute{\zeta}\acute{\gamma},$ hoc est, dico lineam e d linea d c, & g f ipsi f c æqualem esse. Nos primam partem ueluti superuacaneam sustulimus. tantum enim abest, ut demonstret lineam e d ipsi d c esse æqualem, quod per se ex circuli diffinitione apparet, ut etiam eo tanquam nota ad propositum demonstrandum utatur.
- B Equicrure autem est triangulum c d e.] Sunt enim d e, d c à centro circuli ad circumferentiam ductæ æquales. illud autem nos addidimus, quod in græcis codicibus desiderabatur.
Et linea g f ipsi f c æqualis.] Hoc loco etiam nonnulla alia sustulimus, quæ superuacanea uidebantur.

T H E O R E M A XXXV. P R O P O S I T I O XLIIII.

S i in portione circuli inflectantur rectæ lineæ; maxima quidem erit, quæ ad punctum medium inflectitur: aliarum uero semper ipsi propinquior, remotoire maior erit.

In portione enim a b c inflectantur rectæ lineæ; a b c quidem, ita ut circumferentia a b c bifariam in b secetur; a d c uero, & a g c ut contingit. Dico a b c maximam esse omnium, quæ in portione a b c inflectuntur: & a d c ipsa a g c maiorem esse. Quoniam enim a b circumferentia circumferentia b c est æqualis; & recta linea a b æqualis erit b c. Itaque centro b & interuallo b a, uel b c circulus a e f h c describatur: & producantur a b e, a d f, a g h. ergo ex antecedenti theoremate e b ipsi b c est æqualis, & f d æqualis d c, & h g ipsi g c. Quoniam igitur a e diameter est circuli a e f; erit a e omnium, quæ in circulo ducuntur, maxima; & a f maior quam a h. Sed ipsi a e æqualis est a b c, & ipsi a f æqualis a d c, & a h æqualis a g c. ergo a b c omnium maxima est, & a d c maior, quam a g c: & ita semper ea, quæ propinquior est puncto circumferentia medio, remotoire maior erit. quod demonstrandum proponebatur.

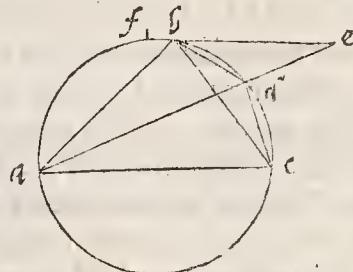
A L I T E R. Sit circulus a b c, & in portione a b c, inflectatur a b c recta linea, ita ut circumferentia a b c bifariam in b diuidatur. Dico lineam a b c maximam esse omnium, quæ in eadem portione inflectuntur. Inflectatur enim a d c, & a e producatur, ita ut d e ipsi d c sit æqualis: iunganturq; b d, b e. Quoniam igitur circumferentia a b æqualis est b c circumferentia: & in circumferentia quidem a b angulus b d a, in circumferentia uero b c angulus b a c con-sistit: erit angulus b d a angulo b a c æqualis. Communis apponatur b d e. ergo utriusque anguli b d e, b d a utrisque b d e, b a c æquales sunt: & sunt b d e, b d a duobus rectis æquales. ergo & b d e, b a c æquales duobus rectis. 21. tertii, sunt autem & b d c, b a c æquales duobus rectis. Vtrique igitur b d e, b a c utrisque b d c, b a c æquales sunt; & communis dempto b a c, reliquis b d e reliquo b d c est æqua-



lis.

lis. Itaque quoniam cd est æqualis de , & communis bd ; suntq; circa æquales angulos basis cb basi be æqualis erit. & quoniam ab, be maiores sunt ipsa ae : utrisque uero ab, be æqualis est ab c : & ae æqualis ipsi ad c : erit ab c , quæam ad c maior. Similiter & aliis maior ostendetur. ergo abc maxima est omnium, quæ in portione inflectuntur.

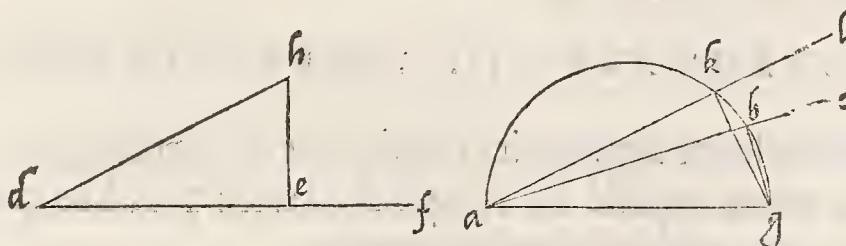
Sed sit punctum circumferentia medium ad f . Dico lineam abc , quæ punto f propinquior est, ipsa ad c remotiore maiorem esse. Quoniam enim circumferentia af b maior est, quæam circumferentia bdc ; angulus bdc a angulo bac est maior; & communis apposito bde ; erunt bde, bda anguli maiores angulis bde, bac . ergo bde, bac sunt duobus rectis minores. & sunt bdc, bac æqua les duobus rectis. anguli igitur bdc, bac angulis bde, bac maiores sunt: & communis bac dempto, reliquo bdc maior est reliquo bde . & quoniam cd est æqualis de , & communis bd ; erit basis cb basi be maior. Sunt autem ab, be maiores, quæam ae : & abc maior, quæam ab, be . ergo abc ipsa ae , hoc est ad c maior erit.



THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XLV.

Si quatuor rectis lineis inæqualibus existentibus quadrata maximæ & minimæ æqualia sint quadratis reliquarum: recta linea constans ex maxima & minima minor erit ea, quæ ex reliquis constat.

Sint quatuor rectæ lineæ a, b, c, d e, f, g, h : quarum maxima sit ab ; & b, c minima: d, e uero non sit minor, quæam ef : & sint quadrata ab, bc , quadratis de, eh æqualia. Dico lineam ac minorem esse, quæam df . Ducantur enim ad rectos angulos b, g, eh : & ponatur bg ipsi bc æqualis; & eh æqualis ef . iunctisq; ag, dh , describatur semicirculus circa triangulum abg orthogonium. & quoniam quadrata ab, bc , hoc est ab, bg quadratis de, eh sunt æqualia; erit quadratum ag æquale quadrato dh : & linea ag ipsi dh æqualis. est autem eh maior, quæam bg . quare aptata in semicirculo linea, quæ sit æqualis eh , angulum bg a secabit. Itaque aptetur, & sit gk : & iuncta ak producatur, ut sit kl æqualis kg . Quoniam igitur quadrata ak, kg quadratis ab, bg æqualia sunt: quadrata autem ab, bg æqualia quadratis de, eh : erunt quadra-

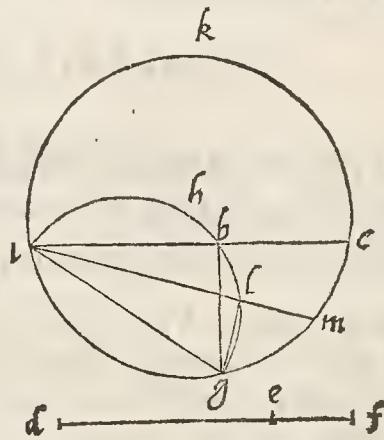


ta ak, kg quadratis de, eh æqualia: quorum quadratum kg est æquale quadrato eh . reliquum igitur quadratum ak reliquo de æquale erit; & linea ak linea de æqualis. ergo triangulum akg est æquale & simile triangulo deh ; & linea al æqualis ipsi df . Itaque quoniam recta linea ak non est minor, quæam kg : neque ak circumferentia minor erit, quæam circumferentia kg . quare cum in circuli portione inflectantur lineæ ak, bg , ab, g : sitq; ak uel ad punctum circumferentia medium, uel ipsi propinquior; erit ex antecedenti theoremate ak maior, quæam ab, g , hoc est al , uide licet df maior, quæam ac . minor est igitur ac , quæam df . quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XLVI.

Si duæ rectæ lineæ inæquales diuidantur: & partium minoris quadrata æqualia sint quadratis partium maioris: earum omnium maxima quidem erit maior minoris pars, minor uero minima.

Sint rectæ lineæ a b c, d e f in b, e punctis ita diuisæ, ut d e sit maior, quam e f: & a b non minor, quam b c: sitq; a c maior, quam d f: quadrata uero a b, b c quadratis d e, e f sint æqualia. Dico harum linearum a b, b c, d e, e f maximam d e, & e f minimam esse. Ducatur enim ipsi a c ad rectos angulos b g, quæ sit æqualis b c: & iungatur a g: circa triangulum uero a b g orthogonium semicirculus describatur. Quoniam igitur a b recta linea non est minor, quam b g; neque a b circumferentia, circumferentia b g minor erit: & idcirco circumferentiæ a b g punctum medium, uel est ad b, uel in circumferentia a b, ut ad h. Itaque ex puncto circumferentiæ a b g medio, tanquam ex centro, & interhallo a h, uel h g circulus descriptus & per punctum c transibit, ut supra demonstratum est. describatur, & sit a k c g. & quoniam quadratum d f maius est quadratis d e, e f: & quadrata d e e f quadrato a g sunt æqualia: erit quadratum d f maius quadrato a g: & linea d f, quam a g maior: minor autem d f, quam a c. ergo inter lineas a c, a g aptari poterit in circulo a k c g linea ipsi d f æqualis. aptetur: sitq; a l m, & iungatur l g. erit ex iam demonstratis l m æqualis l g. Sed a l est maior, quam a b; & a b non minor, quam b g. ergo a l utraque ipsarum a b, b g maior erit: & l g utraque a b, b g minor. linearum igitur a b, b g, a l, l g maxima est a l, & minima l g. Sed b g est æqualis b c: & a l ipsi d e: & l g, hoc est l m ipsi e f, ut ostendimus. ergo linearum a b, b c, d e, e f maxima est d e, & e f minima. quod propositum fuerat demonstrandum.



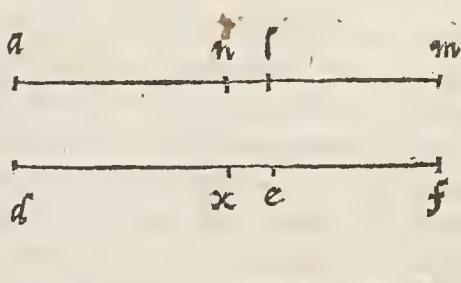
COMMENTARIUS.

Ergo utraque a b, b'g minor.] Si enim l g non est minor utraque a b b'g, quoniam a l est utraque ipsarum maior: erunt utraque a l l g maiores utrisque a b b'g, quod est absurdum; demonstratum etenim est supra minores esse.

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XLVII.

Si duæ rectæ lineæ æquales ita diuidantur, ut rectangulum contentum partibus unius æquale sit ei, quod alterius partibus continetur: erunt unius partes partibus alterius æquales.

Sint rectæ lineæ inter se æquales a l m, d e f in punctis l e ita diuisæ, ut rectangulum a l m rectangulo d e f sit æquale. Dico lineam a l ipsi d e æqualem esse. Quoniam enim a m est æqualis d f; & earum dimidiæ æquales erunt. ergo & quadratum dimidiæ a m est æquale quadrato dimidiæ d f. itaque si a m bifariam diuisa fuerit in l:rectangulum a l m est dimidiæ quadratum: ergo & d f bifariam diuiditur in e, quoniam rectangulum d e f æquale est quadrato dimidiæ a m, uidelicet dimidiæ d f: sin minus, diuidantur bifariam in punctis n x. æqualis igitur est n m ipsi x f: & propterea quadratum



dratum n m quadrato x f æquale, hoc est rectangulum alm unà cum quadrato n l æquale rectangulo d e f una cum x e quadrato: quorum rectangulum alm æquale est rectangulo d e f. ergo reliquum n l quadratum æquale quadrato x e, & linea n l linea x e æqualis. est autem & n m æqualis x f. reliqua igitur lm ipsi e f, & al ipsi d e æqualis erit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XLVIII.

Si conus scalenus per axem secetur; eorum, quæ fiunt triāgulorum, quod maius est, maiorem perimetrum habet: & cuius trianguli maior perimeter, illud maius est.

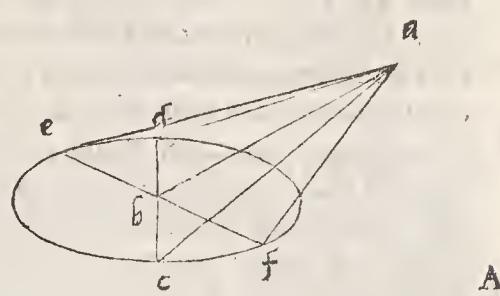
Secetur conus scalenus per axem a b, & ex sectione fiant a c d, a e f triangula, quorum maius a c d, ita ut e a quidem sit maior, quam a f; c a uero non minor, quam a d. Dico a c d perimetrum perimetro a e f maiorem esse. Quoniam enim æquales sunt c d, e f bases; communis autem ducta est b a à uertice ad punctum, quod ipsas bifariam secat: & triangulum a e f minus est triangulo a c d: habebit e a ad a f maiorem proportionē, quam c a ad a d, ut in uigesimo theoremate est demonstratum. ergo e a maxima est quatuor linearum, & a f minima: quod etiam demonstratum est. & quoniam quadrata à maxima & minima, hoc est quadrata e a, a f quadratis c a, a d sunt æqualia; erunt utræque linearē e a, a f minores B utrisque c a, a d, ex antecedenti theoremate. apponatur e f, c d tota igitur a e f perimetrū tota perimetro a c d est minor. ergo maioris trianguli perimeter maior erit.

Ex quibus perspicuum est in conis scalenis, maximi quidem triangulorum, quæ fiunt per axem, hoc est æquicurvis perimetrum esse maximam, minimi uero, hoc est eius, quod est ad rectos angulos basi coni, perimetrum minimam esse: & aliorum semper quod maius est maiorem perimetrum habere, quam quod minus.

Rursus ponatur trianguli c a d perimeter maior perinetro e a f. Dico triangulum a c d triangulo e a f maius esse. Quoniam enim a c d perimeter maior est perimetro e a f; æqualis autem c d ipsi e f; erunt reliquæ c a, a d reliquis e a, a f maiores. sed quadrata c a, a d æqualia sunt quadratis e a, a f. ergo quatuor linearum c a, a d, e a, a f maxima quidem est e a, minima uero a f; quæ omnia ante demonstrata sunt. quare e a ad a f maiorem habet proportionem, quam d a ad a c. Itaque quoniam duo triangula c a d, e a f bases æquales habent, & lineam, quæ à uertice ad punctum basim bifariā secans dicitur, habent eandem; alterius autem maius latus ad minus maiorem proportionem habet, quam alterius maius latus ad minus, uel æquale ad æquale: triangulum e a f minus erit. triangulum igitur c a d maius est triangulo e a f. quod demonstrare oportebat. C D

COMENTARIUS.

ERGO e a maxima est quatuor linearum, & a f minima.] Quoniam enim e a ad a f. A maiorem habet proportionem, quam c a ad a d; habebit e a quadratum ad quadratum a f maiorem proportionem, quam quadratum c a ad quadratum a d. sed quadrata e a, a f æqualia sunt quadratis c a, a d; quod ex sexta decima huins apparent, utraque enim sunt æqualia duobus quadratis semidiametrorum, & duplo quadrati a b. ergo ex decima octava huins quatuor quadratorum e a, a f, c a, a d maximum est e a, & minimum a f: & idcirco linearum e a, a f, c a, a d maxima est e a, & a f minima. 17. huius i



A

B

C

D

S E R E N I L I B E R II.

- B Erunt utræque lineæ e a, a f minores utrisque c a, a d ex antecedenti theoremate.]
Ex quadragesima quinta huius.
- C Quæ omnia ante demonstrata sunt.] *In quadragesima sexta huius.*
- D Triangulum e a f minus erit.] *Ex decima nona huius.*

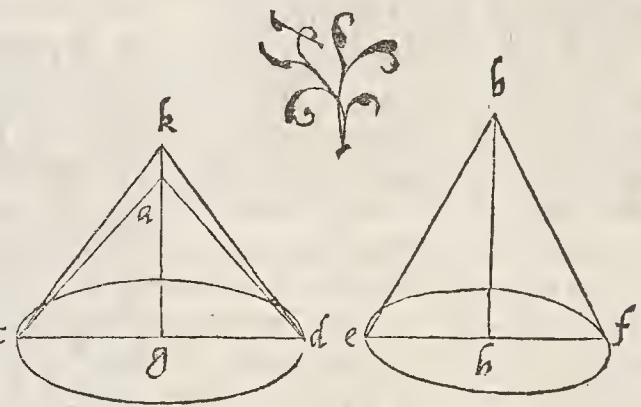
THEOREMA XL. PROPOSITIO XLIX.

Rectorum conorum æqualium, & dissimilium triangula per axem ex contraria parte respondent suis basibus.

Sint recti coni æquales & dissimiles, quorum uertices a b puncta; axes a g, b h: & triangula per axem a c d, b e f: bases autem circuli circa diametros c d, e f. Dico ut triangulum a c d ad triangulum b e f, ita esse e f basim ad basim c d. Quoniam enim coni sunt æquales, erit ut circulus circa centrum g ad circulum circa h, ita axis b h ad a g axē:

^{15.} ^{duo-}
^{decimi}

- A circulus autem circa g ad circulum circa h duplam proportionem habet eius, quam c d habet ad e f. sit inter b h & a g media proportionalis k g;
 B & iungantur k c, k d. erit ut c d ad e f,
 C ita b h ad k g: & k g ad g a. Quoniam igitur ut c d ad e f, ita b h ad k g: erit triangulum b e f triangulo k c d æquale. & quoniam ut c d ad e f, ita k g ad g a. ut
 D autem k g ad g a, ita k c d triangulum ad triangulum a c d: erit ut c d ad e f, ita triangulum k c d, hoc est b e f ad triangulum a c d. ergo ut a c d triangulum ad triangulum b e f, ita basis e f ad c d basim. triangula igitur exposita ex contraria parte suis basibus respondent.



C O M M E N T A R I V S.

- A Circulus autem circa g ad circulum circa h duplam proportionem habet eius, quam c d habet ad e f.] *Circulus enim circa g ad circulum circa h est ut quadratum c d ad quadratum e f. quadratum uero c d ad e f quadratum, duplam habet proportionem eius, quam c d habet ad e f. ergo circulus circa g ad circulum circa h duplam proportionem habebit eius, quam c d ad e f.*
- ^{2. duodecimi cor. 20 se xti.}
- B Erit ut c d ad a f, ita b h ad k g, & k g ad g a.] *Sequitur ex iam dictis axem b h ad axem a g duplam habere proportionem eius, quam habet c d ad e f. sed b h ad a g duplam proportionem habet eius, quam b h ad k g, & k g ad g a. ergo ut c d ad e f, ita erit b h ad k g, & k g ad g a.*
- C Quoniam igitur ut c d ad e f, ita b h ad k g, erit triangulum b e f triangulo k c d æquale.] *Erit enim ex quarta decima sexti rectangulum ex e f, & b h æquale ei, quod fit ex c d & k g. sed rectanguli ex e f, & b h triangulum b e f est dimidium: & rectanguli ex c d & k g dimidium est triangulum k c d. triangulum igitur b e f triangulo k c d æquale erit.*
- D Ut autem k g ad g a, ita k c d triangulum, ad triangulum a c d.] *Nam ut k g ad g a, ita rectangulum ex c d, & k g ad rectangulum ex c d, & g a; & ita horum dimidia, hoc est triangulum k c d ad triangulum a c d.*

THEOREMA XLI. PROPOSITIO L.

Quorum conorum rectorum triangula per axem ex contraria parte respondent suis basibus, ii inter se sunt æquales.

Sint conorum uertices quidem a b; axes a g, b h rectæ lineæ: triangula uero per

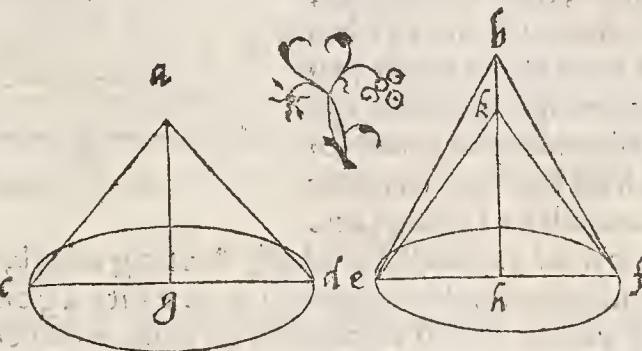
axem

axem ac d; b e f. & sit ut cd ad ef, ita triangulum bef ad triangulum acd. Dico conos inter se æquales esse, fiat enim ut bef triægulum ad triangulum acd, ita acd ad triangulum k e f. ergo triangulum bef ad triangulum k e f duplam habet proportionem eius, quam triangulum acd ad ipsum k e f. Quoniam igitur ut cd ad ef, ita bef trianguli ad triangulum acd: ut autem triangulum bef ad ipsum acd, ita acd ad triangulum k e f: erit ut cd ad ef, ita acd triangulum ad triangulum k e f. quare cum triangula acd, k e f inter se sint, sicuti bases, sub eadem erunt altitudine. ergo ag ipsi k h est æqualis.

habet autem circulus g ad circulum h duplam proportionem eius, quam cd diameter ad diametrum ef: & ut cd ad ef, ita triægulum acd ad triangulum k e f. ergo circulus g ad circulum h duplā proportionem habet eius, quam acd triangulum ad triangulum k e f. habebat autem

tem & triangulum eb f ad triangulum e k f duplam proportionem eius, quam acd triangulum ad triangulum e k f. ergo ut circulus g ad circulum h, ita eb f triangulum ad triangulum e k f, hoc est recta linea bh ad rectam hk. est autem hk ipsi ag æqualis. Ut igitur circulus g ad circulum h, ita recta linea bh ad ag. & sunt bh, ag axes conorum, qui ex contraria parte respondent basibus, uidelicet circulis gh. ergo coni agcd, bh ef inter se æquales sunt.

ex cōuet-
sa p̄imæ
sexti

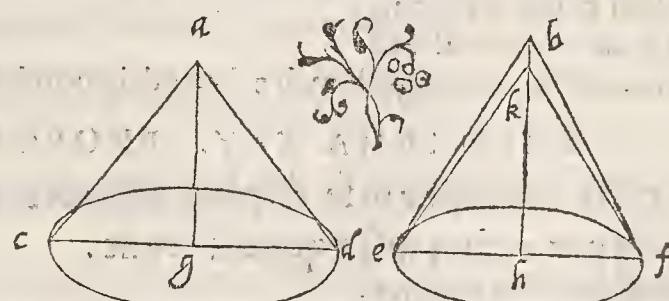


THEOREMA XLII. PROPOSITIO LI.

Si conorum rectorum basis ad basim duplam proportionem habeat eius, quam conus ad conum; triangula per axem inter se æqualia erunt.

Sint coni recti, quorum uertices ab puncta; bases circuli circa centra g, h: & triangula per axes acd, b e f. habeat autem circulus g ad circulum h duplam proportionem eius, quam agcd conus ad conum bhef. Dico triangula acd, b e f inter se æqualia esse. Sit enim ut agcd conus ad conum bhef, ita bhef ad conum khef: & quoniam circulus g ad circulum h duplam proportionem habet, quam agcd conus ad conum bhef. conus autem agcd ad conum khef proportionem duplam habet, quam agcd conus ad conum bhef: erit ut circulus g ad circulum h, ita conus agcd ad conum khef. quare cum agcd, khef coni inter se sint, sicuti bases, æqualem habebunt altitudinem, ex conuerſia undecimæ duodecimi elementorū. ergo ag ipsi kh est æqualis. Quoniam igitur circulus g ad circulum h duplam proportionem habet, quam agcd conus ad conum bhef, hoc est quam conus bhef ad conum kh et, hoc est quam bh ad hk: habet autem circulus g ad circulum h duplam proportionem, quam cd ad ef: erit ut cd ad ef, ita bh ad hk, hoc est ad ag. triangula igitur acd, b e f inter se æqualia erunt. quod oportebat demonstrare.

i5. duodecimi



14. duo decimi

THEOREMA XLIII. PROPOSITIO LII.

Si triangula per axem inter se æqualia sint: & basis ad basim duplam proportionem habebit eius, quam conus habet ad conum.

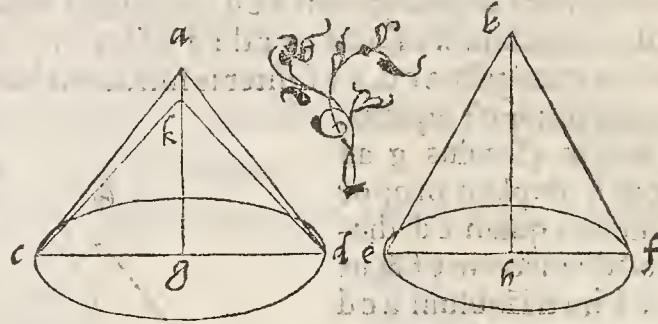
Describantur rursus prædicti coni: & ponantur triangula a c d, b e f inter se æqualia. demonstrandum est circulum g ad circulum h duplam proportionem habere eius, quam a g c d conus habet ad conum b h e f. Sit enim ut recta linea b h ad rectam a g, ita a g ad g k. Quoniam igitur triangula a c d, b e f sunt æqualia; erit ut c d ad e f, ita b h ad a g; hoc est a g ad g k.

& quoniam circulus g ad circulum h duplam habet proportionem, quam c d ad e f, hoc est quam b h ad a g: habetq; b h ad g k duplam proportionem, quam b h ad a g: erit ut circulus g ad circulum h, ita b h ad k g. Conus igitur k g c d cono b h e f est æqualis.

15. duo-
decimi

14. duo-
decimi

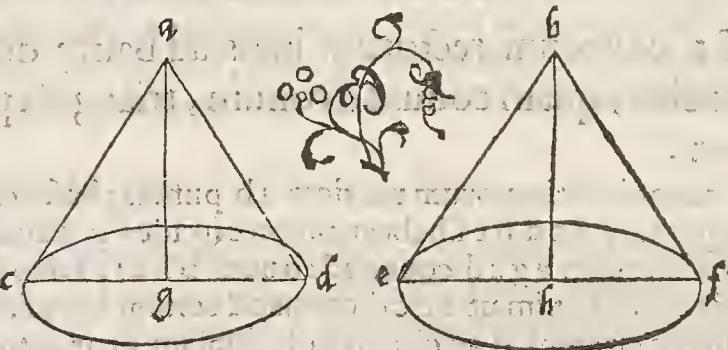
ut autē c d ad e f, ita est a g ad g k: & ut a g ad g k, ita a g c d conus ad conū k g c d, hoc est ad conum b h e f. ergo ut c d ad e f, ita a g c d conus ad conum b h e f. Sed circulus g ad circulum h duplam habet proportionem, quam c d ad e f, circulus igitur g ad circulum h, hoc est basis a g c d coni ad basim coni b h e f duplam proportionem habet, quam a g c d conus ad conum b h e f. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XLIII. PROPOSITIO LIII.

Recti coni æquealti duplam inter se proportionem habent eius, quam triangula per axem.

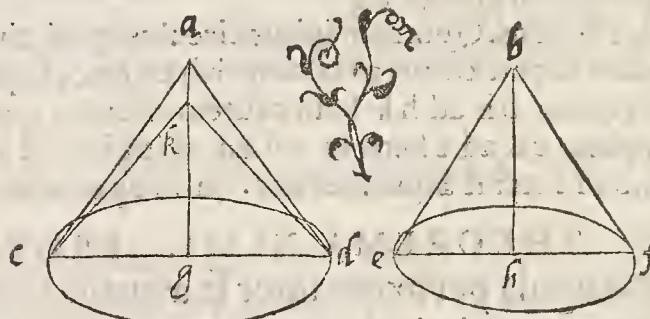
Describantur ijdem coni: & sit axis a g æqualis b h. Dico a g c d conum ad conum b h e f duplam proportionem habere eius, quam triangulum a c d habet ad triangulum b e f. Quoniam enim circulus g ad circulum h duplam proportionem habet, quam c d ad e f: & ut circulus g ad circulum h, ita a g c d conus ad conum b h e f: sunt enim æque alti: habebit conus a g c d ad conum b h e f duplam proportionem, quam c d ad e f; hoc est quā a c d triangulum ad triangulum b e f. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XLV. PROPOSITIO LIII.

Si recti coni inter se se duplam proportionem habeant eius, quam triangula per axem; ipsi æquealti erunt.

Describantur coni, & ponatur a g c d conus ad conū b h e f duplani habere proportionem eius, quam triangulum a c d ad triangulum b e f. Dico a g ipsi b h æqualem esse. Ponatur enim triangulo b e f æquale triangulum k c d. & quoniam a g c d conus ad conum b h e f duplam proportionem habet,



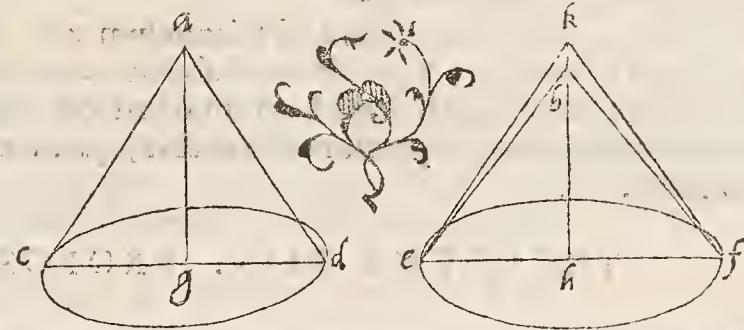
quam

quam a c d triangulum ad triangulum b e f: est autem triangulum b e f æquale triangu-
lo k c d: habebit a g c d conus ad conum b h e f duplam proportionem, quam trian-
gulum a c d ad triangulum k c d, hoc est quam a g ad g k, hoc est quam a g c d conus ad
conum k g c d. ergo ut conus a g c d ad k g c d conum, ita k g c d conus ad conum
b h e f. Quoniam igitur conorum k g c d, b h e f, triangula per axem k c d, b e f æqua-
lia sunt; basis coni g ad basim h duplam proportionem habebit, quam k g c d co-
nus ad conum b h e f, ut in quinquagesima secunda huius demonstratum est. Sed ut
k g c d conus ad conum b h e f, ita conus a g c d ad conum k g c d, & recta linea a g ad
g k. circulus igitur g ad circulum h duplam proportionem habet, quam a g ad g k.
sed & duplam habet proportionem, quam diameter c d ad e f diametrū. ergo ut c d
ad e f, ita a g ad g k. Itaque quoniam triangulum k c d triangulo b e f est æquale; ut
c d ad e f, ita erit b h ad k g. ostensum est autem ut c d ad e f, ita a g ad g k. quare ut
b h ad k g, ita a g ad g k. æqualis igitur est a g ipsi b h. quod oportebat demonstrare. 9. quinti

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO LV.

Si recti coni ex contraria parte respondeant suis axibus; triangula
per axem inter se æqualia erunt.

Desribantur coni; & sit ut a g c d conus ad conum b h e f, ita axis b h ad a g axem.
Dico triangula a c d, b e f inter se æqualia esse. sit enim a g c d cono conus æquealtus
k h e f. & quoniam ut a g c d conus ad conum b h e f, ita est recta linea b h ad a g æqua-
lis autem k h ipsi a g: erit ut a g c d conus ad conum b h e f, ita b h ad h k; hoc est
b h e f conus ad conum k h e f. conus igitur a g c d ad conum k h e f duplam propor-
tionem habet, quam b h e f conus ad conum k h e f. Sed
ut b h e f conus ad conum k h e f, ita b e f triangulum
ad triangulum k e f. ergo co-
nus a g c d ad conum k h e f
duplam proportionem ha-
bet, quam b e f triangulum
ad triangulum k e f. habet au-
tem conus a g c d ad conum
æquealtum k h e f duplam proportionem, quam a c d triangulum ad triangulum
k e f, ut demonstratum est in quinquagesima tertia huius. quare ut b e f triangulum
ad triangulum k e f, ita triangulum a c d ad triangulum k e f. Triangulum igitur a c d
triangulo b e f est æquale. quod demonstrandum proponebatur.



THEOREMA XLVII. PROPOSITIO LVI.

Si triangula per axem inter se æqualia sint; & coni ex contraria par-
te suis axibus respondebunt.

Ponatur a c d triangulum triangulo b e f æquale. Dico ut a g c d conus ad conum
b h e f, ita esse axem b h ad a g axem. in eadem enim figura, & constructione, quo-
niām triangulum a c d æquale est triangulo b e f, erit ut a c d triangulum ad triangu-
lum k e f, ita triangulum b e f ad k e f triangulum. sed conus a g c d ad conum æque-
altum k h e f duplam proportionem habet, quam a c d triangulum ad triangulum
k e f: & ut triangulum a c d ad triangulum k e f, ita triangulum b e f ad triangulum
k e f. Conus igitur a g c d ad conum k h e f duplam proportionem habebit, quam
triangulum b e f ad ipsum k e f. hoc est, quam conus b h e f ad conum k h e f. ergo ut
a g c d conus ad conum b h e f, ita conus b h e f ad k h e f, hoc est ita b h ad h k. est autē
k h ipsi a g æqualis. Ut igitur a g c d conus ad conum b h e f, ita b h axis ad axem
a g. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO LVII.

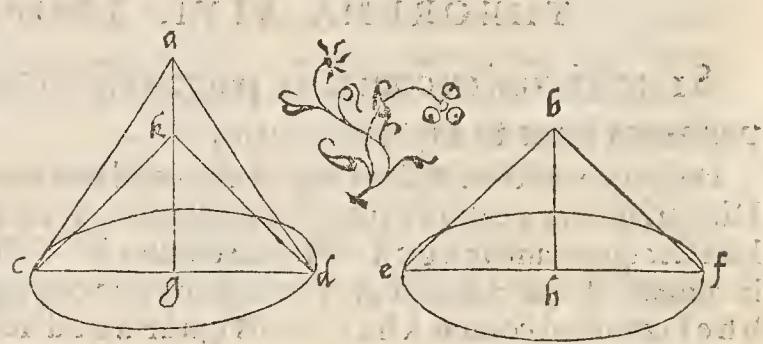
Si coni recti ex contraria parte suis basibus respondeant; triangula per axem inter se triplam proportionem habebunt eius, quam basis habet ad basim ex contraria parte.

Desribantur coni; & sit ut $agcd$ conus ad conum $bhef$, ita h basis ad basim g . Dico acd triangulum ad triangulum bef triplam proportionem habere eius, quam ef habet ad cd . Ponatur enim ipsi bh æqualis $k g$. erunt coni æquealti $k g c d$, bh ef inter se se, ut eorum bases. Quoniam igitur ut $agcd$ conus ad conum $bhef$, ita h basis ad basim g : & ut basis h ad basim g , ita conus $bhef$ ad conum $k g c d$; erit ut $agcd$ conus ad conum $bhef$, ita $bhef$ ad ipsum $k g c d$ conum. quare conus $agcd$ ad conum $k g c d$ duplam proportionem habet eius, quam conus $bhef$ ad conum $k g c d$. sed ut conus $agcd$ ad $k g c d$, ita acd triangulum ad triangulum kcd . triangulum igitur acd ad ipsum kcd duplam proportionem habet, quam $bhef$ conus ad conum æquealtum $k g c d$. conus autem $bhef$ ad ipsum $k g c d$ duplam proportionem habet, quam triangulum bef ad triangulum kcd . ergo triangulum acd ad triangulum kcd quadruplam proportionem habet eius, quam bef triangulum ad triangulum kcd : & propterea triangulum acd ad ipsum bef triplam proportionem habebit, quam triangulum bef ad triangulum kcd . sed ut triangulum bef ad kcd , ita ef ad cd . Triangulum igitur acd ad triangulum bef triplam proportionem habebit, quam ef ad cd . quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO LVIII.

QVORVM conorum rectorum triangula per axem inter se triplam proportionem habent eius, quam basis ad basim ex contraria parte: hi coni suis basibus ex contraria parte respondebunt.

In eadem figura, & constructione habeat acd triangulum ad triangulum bef triplam proportionem eius, quam ef basis trianguli ad cd basim. Dico ut $agcd$ conus ad conum $bhef$, ita h basis coni ad basim g . Quoniam enim acd triangulum ad triangulum bef triplam proportionem habet eius, quam ef ad cd ; ut autem ef ad cd , ita bef triangulum ad triangulum Kcd æquealtum: habebit triangulum acd ad triangulum bef triplam proportionem, quam bef triangulum ad ipsum Kcd . ergo triangulum acd ad triangulum Kcd quadruplam proportionem habebit, quam bef triangulum ad triangulum Kcd . ut autem triangulum acd ad ipsum Kcd , ita $agcd$ conus ad conum $Kgcd$. conus igitur $agcd$ ad conum $Kgcd$ quadruplam proportionem habet eius, quam triangulum bef ad triangulum Kcd . sed conus $bhef$ ad conum $Kgcd$ æquealtum duplam proportionem habet, quam triangulum bef ad triangulum Kcd . ergo conus $agcd$ ad conum $Kgcd$ duplam habebit proportionem eius, quam $bhef$ conus ad conum $Kgcd$. Quare ut conus $agcd$ ad conum $bhef$, ita $bhef$ conus ad conum $k g c d$. Sed ut $bhef$ conus ad conum $Kgcd$, ita h basis ad basim g . Ut igitur $agcd$ conus ad conum $bhef$, ita basis h ad g basim. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA L. PROPOSITIO LIX.

Si rectus conus ad conum rectum duplam proportionem habeat eius, quam basis ad basim; triangulum per axem ad triangulum per axem triplam proportionem habebit, quam trianguli basis ad basim.

Describantur coni, & ponatur $a g c d$ conus ad conum $b h e f$ duplam proportionem habere eius, quam g basis coni habet ad h basim. Dico triangulum $a c d$ ad triangulum $b e f$ triplam habere proportionem, quam $c d$ basis trianguli ad basim $e f$. si ipsi $a g$ æqualis $k h$. erunt coni æquealti $a g c d$, $k h e f$ inter se se, sicuti bases. Quoniam igitur $a g c d$ conus ad conum $b h e f$ duplam proportionem habet, quam g basis ad basim h : ut autem basis g ad h , ita $a g c d$ conus ad conum $k h e f$: habebit $a g c d$ conus ad conum $b h e f$ duplam proportionem, quam $a g c d$ conus ad conum $k h e f$. ergo ut $a g c d$ conus ad conum $k h e f$, ita $k h e f$ ad $b h e f$ conum. & quoniam coni $a g c d$, $K h e f$ æquealti sunt; habebit $a g c d$ conus ad conum $K h e f$ duplam proportionem, quam triangulum $a c d$ ad triangulum $k e f$: quod demonstratum iam est. Ut autem $a g c d$ conus ad conum $K h e f$, ita & conus $K h e f$ ad $b h e f$ conum: & $K h e f$ triangulum ad triangulum $b e f$. ergo $k e f$ triangulum ad triangulum $b e f$ duplam proportionem habet, quam triangulum $a c d$ ad triangulum $k e f$: ac propterea triangulum $a c d$ ad trian-

gulum $b e f$ triplam habebit proportionem, quam $a c d$ triangulum ad triangulum $k e f$. Sed ut triangulum $a c d$ ad triangulum $k e f$, ita basis $c d$ ad $e f$ basim: sunt enim triangula æquealta. Triangulum igitur $a c d$ ad triangulum $b e f$ triplam proportionem habet, quam $c d$ basis ad basim $e f$. quod demonstrasse oportuit.

THEOREMA LI. PROPOSITIO LX.

Si triangulum per axem ad triangulum per axem triplam proportionem habeat eius, quam trianguli basis ad basim; conus ad conum duplam proportionem habebit, quam coni basis ad basim.

In eadem enim figura triangulum $a c d$ ad triangulum $b e f$ triplam proportionem habeat, quam basis $c d$ ad $e f$ basim: & rursus ponatur ipsi $a g$ æqualis $k h$. Quoniam igitur triangulum $a c d$ ad triangulum $b e f$ triplam proportionem habet, quam $c d$ ad $e f$: ut autem $c d$ ad $e f$, ita $a c d$ triangulum ad triangulum $k e f$: habebit $a c d$ triangulum ad triangulum $b e f$ triplam proportionem, quam triangulum $a c d$ ad ipsum $k e f$. ergo $k e f$ triangulum ad triangulum $b e f$ duplami proportionem habet, quam $a c d$ triangulum ad triangulum $k e f$. Sed ut triangulum $k e f$ ad triangulum $b e f$, ita $K h e f$ conus ad conum $b h e f$. conus igitur $K h e f$ ad conum $b h e f$ duplam proportionem habebit, quam $a c d$ triangulum ad triangulum $K e f$. habet autem & $a g c d$ conus ad conum æquealtum $K h e f$ duplam proportionem, quam $a c d$ triangulum ad triangulum $K e f$. ergo ut conus $a g c d$ ad conum $K h e f$, ita $k h e f$ ad $b h e f$ conum: & idcirco $a g c d$ conus ad conum $b h e f$ duplam proportionem habet, quam $a g c d$ conus ad conum $K h e f$, hoc est quam basis g ad h basim. quod demonstrare oportebat.

LIBRORVM SERENI FINIS.

